PESQUIMAT , Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XVIII N°1, pp. 16-20, Lima - Perú, Abril 2015

COMPLECIÓN DE CUERPOS CONVEXOS

Helmuth Villavicencio Fernández [1]

(Recibido: 26/01/2014 - Aceptado: 18/11/2014)

Resumen: El presente trabajo muestra que todo cuerpo convexo de diámetro h está contenido en un cuerpo completo y de ancho constante h, usando para ello la noción de H-convexidad.

Palabras clave: Geometría convexa. H-convexidad. Teorema de Meissner. Cuerpos convexos. Análisis convexo.

COMPLETION OF CONVEX BODIES

Abstract: This paper shows that every convex body with dia-meter h is contained in a full body of constant width h, using the notion of H-convexity.

Keywords: Convex geometry. H-convexity. Meissner Theorem. Convex bodies. Convex Analysis.

1. Introducción

Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo, es decir C es convexo, compacto y tiene interior no vacío. Dado $v \in \mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$, definimos $h_C(v)$ como la mayor distancia desde el origen hasta un hiperplano de soporte de C con normal v, es decir $h_C(v) = máx\{\langle x, v\rangle : x \in C\}$.
El ancho de C en la dirección de v, denotado por $A_C(v)$, viene dado por $A_C(v) = h_C(v) + h_C(-v)$.
Dado $\lambda \in \mathbb{R}_+$ diremos que un cuerpo convexo C tiene ancho constante λ si para todo $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ se tiene que $A_C(v) = \lambda$. Todo cuerpo convexo está incluido en un conjunto de ancho constante, de hecho la esfera es el conjunto de ancho constante más simple que contiene a un cuerpo convexo; pero ¿el diámetro de dicha esfera podría coincidir con el diámetro del cuerpo convexo? la respuesta a dicha interrogante es en general, negativa. Basta tomar $C = Co\{(-1,0),(1,0),(0,\sqrt{3})\}$ que tiene diámetro 2 y la circunferencia circunscrita tiene radio $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
El teorema de Meissner afirma que todo cuerpo convexo de diámetro h está incluido en un conjunto de ancho constante h, dicho conjunto es llamado *compleción del cuerpo convexo.* Luego la respuesta a la interrogante es positiva si consideramos conjuntos de ancho constante en lugar de esferas. Para probarlo usaremos la noción de H-convexidad. El lector interesado en mayores detalles puede consultar las referencias [1], [2], [3] y [4].

2. Preliminares

Definición 2.1 (Conjunto diametralmente completo) *Dado $C \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y acotado. Se dice que C es diametralmente completo si para $x \notin C$ se tiene*

$$diam(C) < diam(C \cup \{x\})$$

[1] UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: hvillavicencio@imca.edu.pe

De la definición se sigue que completez diametral implica compacidad, pero compacidad no implica dicha completez, para ver esto basta considerar una corona circular.
Sea $h \in \mathbb{R}^+$, denotemos por Δ_h al conjunto de todos los cuerpos convexos tales que su diámetro es h, es decir

$$\Delta_h = \{A \subseteq \mathbb{R}^n : A \text{ es cuerpos convexos, } diam(A) = h\}$$

Los conjuntos diametralmente completos con diámetro h son elementos maximales en Δ_h.

Teorema 2.2 *Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo. Si C es un conjunto de ancho constante λ, entonces C es diametralmente completo y $diam(C) = \lambda$.*

Demostración. Por ser C de ancho constante λ, se tiene $diam(C) = máx\{A_C(v) : v \in \mathbb{S}^{n-1}\}$. Como $A_C(v) = \lambda$ para todo $v \in \mathbb{S}^{n-1}$, entonces $diam(C) = \lambda$. Ahora probemos que C es diametralmente completo. Sea $x \notin C$ tomemos $w \in C$ tal que $\|x - w\| = d(x, C)$. Sea $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ con dirección $x-w$, existen $a, b \in C$ tales que $\|a-b\| = A_C(v) = \lambda$. Notemos que $x-w$ es paralelo con $a-b$ y consideremos que a se halle más cerca de w que b. Supongamos que $w \notin \{a, b\}$. Como $w \in B[b, \lambda]$ y $x \in L$ entonces $d(x, [a, w)) < \|x - w\|$, absurdo. Luego $a = w$ por tanto $a \in (x, b)$ de donde

$$\lambda < \|a - b\| + \|b - x\| = \|x - a\|$$

Entonces $diam(C) < diam(C \cup \{x\})$, luego C es diametralmente completo. ■

Definición 2.3 (Conjunto H-convexo) *Sean $h \in \mathbb{R}_+$ y $P, Q \in \mathbb{R}^n$ tales que $\|P - Q\| \leqslant 2h$. El h-segmento determinado por P y Q, el cual denotaremos por $[P, Q]_h$ viene dado por*

$$[P, Q]_h = \bigcap \{B_h[c] : P, Q \in B_h[c],\ c \in \mathbb{R}^n\}$$

Donde $B_h[c]$ es la bola cerrada en $\mathbb{R}^n$ de centro c y radio h. Diremos que un cuerpo convexo C es H-convexo de valor h si dados $P, Q \in C$ entonces $[P, Q]_h \subseteq C$.

De la definición notamos que si h se toma muy grande entonces el h-segmento $[P, Q]_h$ tiende a ser el segmento $[P, Q]$. Es decir la convexidad usual puede ser vista como caso límite de la H-convexidad de valor h.
Al igual que en convexidad usual se prueba que la intersección arbitraria de cuerpos H-convexos, es un cuerpo H-convexo, lo cual permite definir un análogo al de cápsula convexa de un conjunto.

Definición 2.4 (Extensión H-convexa) *Sea C un cuerpo convexo tal que $diam(C) \leqslant 2h$. La extensión H-convexa de valor h de C que denotaremos por $\mathfrak{S}_h(C)$, es la intersección de todos los cuerpos H-convexos de valor h que contienen a C.*

Se sigue directamente de la definición que si $diam(C) = h$, entonces $diam(\mathfrak{S}_h(C)) = h$.

Proposición 2.5 *Todo conjunto diametralmente completo en $\mathbb{R}^n$, es H-convexo.*

Demostración. Sea $diam(C) = h$. Basta notar que $\mathfrak{S}_h(C)$ es un cuerpo convexo tal que $diam(\mathfrak{S}_h(C)) = h$ entonces $\mathfrak{S}_h(C) \in \Delta_h$, por maximalidad se tiene que $C = \mathfrak{S}_h(C)$. ■

Proposición 2.6 *Todo conjunto de ancho constante en $\mathbb{R}^n$, es H-convexo.*

Demostración. Sea C un conjunto de ancho constante h. Dado $d \in \mathbb{S}^{n-1}$, existen $x_0, y_0 \in C$ tales que $A_C(d) = \langle x_0 - y_0, d\rangle$. Sean $\mathfrak{C}_d = B_h[x_0]$ y $\mathfrak{C}'_d = B_h[y_0]$ entonces $C \subseteq \mathfrak{C}_d \cap \mathfrak{C}'_d$ de donde $C \subseteq \bigcap(\mathfrak{C}_d \cap \mathfrak{C}'_d)$ donde la intersección se realiza para todo $d \in \mathbb{S}^{n-1}$.
Como $\mathfrak{D} = \bigcap(\mathfrak{C}_d \cap \mathfrak{C}'_d)$ es H-convexo de valor h, probaremos que $C = \mathfrak{D}$. En efecto; basta probar que $\mathfrak{D} \subseteq C$. Sea $z \in \mathfrak{D}$ y supongamos que $z \notin C$, existe un hiperplano Σ que separa estrictamente a z de C. Sin pérdida de generalidad consideremos que $C \subseteq \Sigma^+$. Sea $u \in \mathbb{R}^n$ un vector unitario y normal a Σ. Entonces $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_u \cap \mathfrak{C}'_u \subseteq \Sigma^+$ luego $z \notin \mathfrak{D}$, absurdo. ■

Proposición 2.7 *Sean P y Q en $\mathbb{R}^n$. Si $\widehat{PQ}$ denota al menor arco de una circunferencia de radio h que pasa por P y Q, entonces $\widehat{PQ} \subseteq [P,Q]_h$.*

Demostración. Supongamos $\widehat{PQ} \nsubseteq [P,Q]_h$, existe $x \in \widehat{PQ}$ tal que $x \notin [P,Q]_h$ donde $[P,Q]_h = \bigcap_{B_h \in \Gamma} B_h$ donde Γ es dado por $\Gamma = \{B_h : P,Q \in \partial B_h\}$. Existe $z \in \mathbb{R}^n$ tal que P, $Q \in \partial B_h[z]$ pero $x \notin B_h[z]$. Sea $\mathcal{C}$ el círculo de centro c, que pasa por P, Q y x. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que P, Q y c son coplanares (basta hacer una rotación sobre $\overline{PQ}$). Luego $c = z$, entonces $x \in B_h[z]$, absurdo. ■

Definición 2.8 (H-esfera de soporte) *Sean $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo y una esfera $\mathfrak{C}$ de radio h. Decimos que $\mathfrak{C}$ es una H-esfera de soporte de valor h de C si contiene a C y su frontera intersecta C.*

Teorema 2.9 *Todo cuerpo H-convexo de valor h posee una H-esfera de soporte de valor h en cualquier punto de su frontera.*

Demostración. Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo H-convexo de valor h. Dado $P \in \partial C$, existe Σ un hiperplano de soporte de C en P con normal unitaria μ, que sin pérdida de generalidad es tal que $C \subseteq \Sigma^+$. Probaremos que $\mathfrak{C} = B_h[c]$ es una H-esfera de soporte de valor h de C, donde $c = P - h\mu$. En efecto; supongamos $C \nsubseteq \mathfrak{C}$ entonces existe $Q \in C$ tal que $Q \notin \mathfrak{C}$. Sea Σ' el plano generado por los vectores μ y $\overrightarrow{PQ}$. Como $[P,Q]_h \subseteq C$ luego $\|P - Q\| \leqslant 2h$, entonces es posible construir un círculo $\mathcal{C}$ de radio h en Σ' que pase por P y Q. Para mostrar esto basta tomar $c' \in B_h[P]$ tal que $\|P - c'\| = \|c' - Q\| = h$ y hacer $\mathcal{C} = B_h[c']$. Notemos que $\mathfrak{C} \cap \Sigma$ es un círculo en Σ' que no contiene a Q y $\Sigma \cap \Sigma'$ es una recta en Σ'. Como $\mathcal{C} \neq \mathfrak{C} \cap \Sigma$ entonces $\widehat{PQ} \nsubseteq \Sigma^+$, lo cual contradice la proposición 2.7 . ■

Corolario 2.10 *Todo cuerpo H-convexo de valor h es la intersección de sus H-esferas de soporte de valor h.*

Demostración. Sea C un cuerpo H-convexo de valor h. Por el teorema anterior para todo $P \in \partial C$ existe una H-esfera de soporte $\mathfrak{C}_P$ de valor h de C. Entonces $C \subseteq \bigcap_{P \in \partial C} \mathfrak{C}_P$. Supongamos $\bigcap_{P \in \partial C} \mathfrak{C}_P \nsubseteq C$, entonces existe $x \in \mathfrak{C}_P$ para todo $P \in \partial C$ tal que $x \notin C$. Sean $z \in \partial C$ tal que $d(x, C) = \|x - z\|$ y Σ el hiperplano de soporte de C en z de donde $x \notin \mathfrak{C}_z$, absurdo. Por tanto $C = \bigcap_{P \in \partial C} \mathfrak{C}_P$. ■

3. Teorema Central

La noción de H-convexidad permite probar de manera ingeniosa dos grandes resultados de la geometría convexa.

Lema 3.1 *Sea C un cuerpo convexo de diámetro h. Para todo $v \in \mathbb{S}^{n-1}$, existe un cuerpo convexo $\mathfrak{R}$ de diámetro h, que contiene a C y tal que $A_{\mathfrak{R}}(v) = h$.*

Demostración. Sea $v \in \mathbb{S}^{n-1}$. Si $A_C(v) = h$, el resultado se sigue tomando $\mathfrak{R} = C$. Supongamos que $A_C(v) < h$, luego existen $x_0, y_0 \in C$ tales que $A_C(v) = \langle x_0 - y_0, v\rangle$. Sean Σ_1 y Σ_2 hiperplanos de soporte de C en x_0 y y_0 respectivamente, consideremos que $C \subseteq \Sigma_2^+$. Por el teorema 2.9, existe una H-esfera de soporte $\mathfrak{C}_{x_0} = B_h[z]$ de valor h tal que $C \subseteq \mathfrak{S}_h(C) \subseteq \mathfrak{C}_{x_0}$. Notemos que Σ_2 separa estrictamente a z de C, entonces consideremos $\mathfrak{R} = \mathfrak{S}_h(\mathfrak{S}_h(C) \cup \{z\})$ el cual tiene diámetro h, pues $diam(\mathfrak{S}_h(C) \cup \{z\}) = diam(\mathfrak{S}_h(C)) = diam(C) = h$ y además $A_{\mathfrak{R}}(v) = \|x_0 - z\| = h$. ■

Estamos ahora en condiciones de probar el recíproco del teorema 2.2.

Teorema 3.2 *Todo conjunto diametralmente completo en $\mathbb{R}^n$, es de ancho constante.*

Demostración. Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto diametralmente completo de diámetro h, por la proposición 2.5, C es H-convexo de valor h. Supongamos que C no sea de ancho constante, luego existe $v \in S^{n-1}$ tal que $A_C(v) < h$. Sea $\mathfrak{R}$ como en el lema 3.1, entonces $\mathfrak{R}$ es un cuerpo convexo de diámetro h que contiene propiamente a C, por lo que C no es maximal, absurdo. ■

El siguiente teorema es el resultado principal del trabajo, nos dice que todo cuerpo convexo admite una compleción de ancho constante.

Teorema 3.3 (Meissner) *En $\mathbb{R}^n$, todo cuerpo convexo de diámetro h está contenido en un cuerpo de ancho constante h.*

Demostración. Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo de diámetro h. Como cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es separable, entonces para $\mathbb{S}^{n-1}$ existe un subconjunto numerable y denso $S = \{v_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{S}^{n-1}$. Por el lema 3.1, sean $\{\mathfrak{R}_i\}_{i=1}^{\infty}$ una colección de cuerpos convexos de diámetro h y tales que para todo $k \in \mathbb{N}$, $A_{\mathfrak{R}_k}(v_k) = h$ además

$$C \subseteq \mathfrak{R}_1 \subseteq \mathfrak{R}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{R}_k \subseteq \ldots$$

Afirmamos que $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{R}_i$ es un convexo de diámetro h.

En efecto, sean $a, b \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{R}_i$, existen $i, j \in \mathbb{N}$ tales que $a \in \mathfrak{R}_i$ y $b \in \mathfrak{R}_j$ podemos suponer $i \leqslant j$, entonces $[a, b] \subseteq \mathfrak{R}_j$ de donde $[a, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{R}_i$ y además se tiene $\|a - b\| \leqslant h$. Entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{R}_i$ es convexo y con diámetro h.

Sea $\mathfrak{A} = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{R}_i}$, entonces $\mathfrak{A}$ es un cuerpo convexo de diámetro h.

Afirmamos que $\mathfrak{A}$ es de ancho constante h.

Dado $k \in \mathbb{N}$ como $\mathfrak{R}_k \subseteq \mathfrak{A}$ entonces $h = A_{\mathfrak{R}_k}(d_k) \leqslant A_{\mathfrak{A}}(d_k) \leqslant h$ luego $A_{\mathfrak{A}}(d_k) = h$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Sea $d \in \mathbb{S}^{n-1}$ entonces existe $(d_i)_{i=1}^{\infty} \subseteq S$ tal que $d_i \to d$, usando la continuidad de la función ancho $h = A_{\mathfrak{A}}(d_k) \to A_{\mathfrak{A}}(d)$, entonces $A_{\mathfrak{A}}(d) = h$, para todo $d \in \mathbb{S}^{n-1}$. ■

4. Conclusiones

4.1 Todo cuerpo convexo en $\mathbb{R}^n$ admite compleción de ancho constante.

4.2 Las nociones de ancho constante y completitud son equivalentes en $\mathbb{R}^n$.

4.3 La convexidad usual puede ser aproximada por la H-convexidad, por lo que se espera para futuros trabajos obtener resultados del análisis convexo clásico para conjuntos H-convexos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Florenzano, M. (2001). *Finite Dimensional Convexity and Optimization.* Springer-Velag, Berlín.

[2] Eggleston, H.G. (1958). *Convexity.* Cambridge University Press, New York.

[3] Rockafellar, R.T. (1970). *Convex Analysis.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[4] Boltianski, V.G. and Gojberg, I.T. (1994). *División de figuras en partes menores.* Editorial Mir, Moscú.