PESQUIMAT
Revista del Instituto de
Investigación de la Facultad
de Ciencias Matemáticas de la UNMSM
Vol. I, N°1,pp 73- 81 Lima - Perú Julio -1998

CARACTERIZACION DE SINGULARIDADES DICRITICAS EN FOLIACIONES DE DIMENSION UNO

RENATO MARIO BENAZIC TOME
UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

1. INTRODUCCION

En el presente trabajo, caracterizamos la presencia de singularidades dicríticas aisladas en foliaciones holomorfas de dimensión uno, en función del primer jet no nulo del campo vectorial holomorfo que define la foliación.

Sea $\mathcal{M}^n$ una variedad compleja de dimensión n (el lector interesado en conocer detalles de la teoría de variedades analíticas y de las funciones de varias variables complejas, podrá consultar (6) y (8)) y consideremos en ella una foliación holomorfa singular de dimensión uno. Con esto queremos decir que en un punto $p \in \mathcal{M}^n$, la foliación es generada por el campo vectorial

$$Z = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad A_i \in O_{n,p}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad m.c.d.(A_1,\ldots,A_n) = 1$$

donde $O_{n,p}$ es el anillo de los gérmenes de las funciones analíticas en p. En lo que sigue, denotaremos a esta foliación por $\mathcal{F}_Z$ y las funciones A_i serán llamadas *componentes* de Z.

Sea (U,ϕ) una carta de $\mathcal{M}^n$ alrededor del punto $p \in \mathcal{M}^n$ tal que $\phi(p) = 0$, luego $A_i\phi^{-1}$ es una función holomorfa de varias variables complejas en una vecindad del origen y por lo tanto ella tiene un desarrollo en series de potencias

$$A_i\phi^{-1} = \sum_{k \geq 0} A_i^k, \quad 1 \leq i \leq n$$

donde los A_i^k son polinomios homogéneos de grado k de n variables complejas. El *orden* de $A_i\phi^{-1}$ en 0 es por definición, el mínimo número entero ν_i tal que $A_i^k \equiv 0 \ \forall k < \nu_i$ y $A_i^{\nu_i} \neq 0$. Se demuestra que el número ν_i es independiente de la elección de la carta (U,ϕ), por ésta razón denotaremos $\nu_i = ord_p(A_i)$. La *multiplicidad algebraica* $m_p(\mathcal{F}_Z)$ (o $m_p(Z)$), de $\mathcal{F}_Z$ en el punto $p \in \mathcal{M}^n$, es el mínimo de los ordenes $ord_p(A_i)$. Diremos que p es un *punto singular* de $\mathcal{F}_Z$ si $m_p(Z) \geq 1$, caso contrario, decimos que p es un *punto regular*. El conjunto de todos los punto singulares de la foliación será denotado por $Sing(\mathcal{F}_Z)$.

Sea E: $\mathcal{N}^n \to \mathcal{M}^n$ el *blow-up* con centro en el punto $p \in Sing(\mathcal{F}_Z)$, entonces existe una única manera de extender el pull-back $E^*(\mathcal{F}_Z - \{p\})$ a una foliación holomorfa singular $\mathcal{F}_Z{}^*$ en una vecindad del espacio proyectivo $CP(n-1) = E^{-1}(p) \subset \mathcal{N}^n$ con conjunto singular de codimensión ≥ 2. En este caso, decimos que $\mathcal{F}_Z{}^*$ es la *transformada estricta* de $\mathcal{F}_Z$ por E. El punto p es una *singularidad no-dicrítica* de $\mathcal{F}_Z$, cuando $E^{-1}(p)$ es invariante por $\mathcal{F}_Z{}^*$,esto significa que el espacio proyectivo es unión de hojas y singularidades de $\mathcal{F}_Z{}^*$. Caso contrario, el punto p es llamado singularidad dicrítica. El conjunto de las foliaciones holomorfas de dimensión uno en $\mathcal{M}^n$ con una singularidad dicrítica aislada, será denotado por $\mathcal{D}^n$. El resultado principal de este trabajo, establece que la presencia de una singularidad dicrítica aislada queda detectada por la forma del primer jet no nulo del campo Z.

2. BLOW-UP EN UN PUNTO

Este concepto es bien conocido y existe mucha literatura al respecto, lo que presentamos en esta sección es un breve resumen de los principales conceptos y propiedades. El lector interesado podrá consultar (2), (3), (5) y (7) para mayores detalles. El *transformado* $(C^n)^*$ de C^n por *blow-up* en el punto 0 es la adherencia en $C^n \times CP(n-1)$, del gráfico G de la aplicación de paso al cociente:

$$C^n\text{-}\{0\} \to CP(n-1)\ ; \qquad z \to [z]$$

Ella es una variedad holomorfa : si $y^{(j)}$: $U_j{}^* \to C^{n-1}$ designa las cartas canónicas del espacio proyectivo, $y^{(j)} = \left(y_1^j, \ldots, y_{j-1}^j, y_{j+1}^j, \ldots, y_n^j\right)$, $y_k^j = \dfrac{z_k}{z_j}$, las aplicaciones:

$$(z_j, y^{(j)}) : (C^n)^* \cap (C \times U_j) \to C \times C^{n-1}$$

Constituye un atlas de $(C^n)^*$. En estas cartas, la restricción E : $(C^n)^* \to C^n$ de la primera proyección, se llama *aplicación de blow-up* y su expresión en coordenadas, es:

$$E(z_j, y^{(j)}) = \left(z_j y_1^j, \ldots, z_j y_{j-1}^j, z_j, z_j y_{j+1}^j, \ldots, z_j y_n^j\right)$$

El *divisor excepcional* $E^{-1}(0)$ se identifica a $CP(n-1)$ y claramente E es un isomorfismo de $(C^n)^* - CP(n-1)$ sobre $C^n - \{0\}$.

3. SINGULARIDADES DICRITICAS EN DIMENSION DOS

Considérese $Z(z_1,z_2)=A_1(z_1,z_2)\frac{\partial}{\partial . z_1}+A_2(z_1,z_2)\frac{\partial}{\partial . z_2}$ un campo vectorial holomorfo definido en una vecindad U del $0 \in C^2$, el cual es un punto singular de Z. La ecuación diferencial ordinaria generada por Z en U es

$$\frac{dz_1}{dT} = A_1(z_1,z_2)$$
$$\frac{dz_2}{dT} = A_2(z_1,z_2)$$

Suponiendo que $m_0(Z) = \nu$, tenemos

$$\frac{dz_1}{dT} = A_1^{\nu}(z_1,z_2) + A_1^{\nu+1}(z_1,z_2) + \ldots\ldots$$
$$\frac{dz_1}{dT} = A_2^{\nu}(z_1,z_2) + A_2^{\nu+1}(z_1,z_2) + \ldots\ldots$$

Sea $U_1 = \{(z_1,z_2) \in U : z_1 \neq 0\}$ y $\mathcal{U}_1 = E^{-1}(U_1)$, donde E es el blow-up centrado en el origen de C^2. En $\mathcal{U}_1$ introducimos coordenadas (y_1,y_2) y en esta carta, E se expresa como $E(y_1,y_2) = (y_1, y_1y_2)$, y el pull-back de Z por E es

$$E^*Z = A_1E\,\frac{\partial}{\partial . y_1} + \frac{A_2E - y_2A_1E}{y_1}\,\frac{\partial}{\partial . y_2}$$

de donde

$$A_1E(y_1,y_2) = y_1^{\nu} A_1^{\nu}(1,y_2) + y_1^{\nu+1}A_1^{\nu+1}(1,y_2)+\ldots..$$

$$\frac{A_2E-y_2A_1E}{y_1}(y_1,y_2)=y_1^{\nu-1}\left[A_2^{\nu}(1,y_2)-y_2A_1^{\nu}(1,y_2)\right]+y_1^{\nu}\left[A_2^{\nu+1}(1,y_2)-y_2A_1^{\nu+1}(1,y_2)\right]+\ldots$$

Definiendo el polinomio homogéneo de grado $\nu+1$:

$$P_{\nu+1}(z_1,z_2) = z_1 A_2^{\nu}(z_1,z_2) + z_2 A_1^{\nu}(z_1,z_2)$$

se observa que se presentan dos casos:

Caso 1: $P_{\nu+1}(z_1,z_2) \equiv 0$. Podemos dividir por y_1^{ν} y considerar el campo vectorial $\dfrac{E*Z}{y_1^{\nu}}$ el cual induce en $\mathcal{U}_1$ la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dy_1}{dT} = A_1^{\nu}(1,y_2) + y_1^{1}\left[\ A_1^{\nu+1}(1,y_2)+\ldots\ \right]$$
$$\frac{dy_2}{dT} = A_2^{\nu+1}(1,y_2) - y_2 A_1^{\nu+1}(1,y_2) + \ y_2\left[A_2^{\nu+2}(1,y_2) - y_2 A_1^{\nu+2}(1,y_2)+\ldots\right]$$

Se deduce inmediatamente que la foliación en $\mathcal{U}_1$ tiene singularidades aisladas en los ceros comunes de los polinomios $A_1^{\nu}(1,y_2) = 0$ y $A_2^{\nu+1}(1,y_2) - y_2 A_1^{\nu+1}(1,y_2) = 0$. Además ésta foliación es transversal a la recta proyectiva $y_1 = 0$, en todos los puntos en donde $A_1^{\nu}(1,y_2) \neq 0$. Trabajando en la segunda carta del blow-up, se llega a resultados similares. Cuando se presenta éste caso, decimos que $0 \in C^2$ es una *singularidad dicrítica*.

Caso 2: $P_{\nu+1}(z_1,z_2) \neq 0$ Ahora solo podemos dividir por $y_1^{\nu-1}$ y considerar el campo vectorial $\dfrac{E*Z}{y_1^{\nu-1}}$ el cual induce en $\mathcal{U}_1$ la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dy_1}{dT} = y_1\left[A_1^{\nu}(1,y_2)+\ldots\right]$$
$$\frac{dy_2}{dT} = P_{\nu+1}(1,y_2) + y_1\left[A_2^{\nu+1}(1,y_2) + A_1^{\nu+1}(1,y_2)+\ldots\right]$$

También en este caso, la foliación inducida en $\mathcal{U}_1$ tiene singularidades
aisladas, en los puntos $(0,y_2)$, en donde los y_2 son raíces del polinomio $P_{\nu+1}(1,y_2)$. Observe que la recta proyectiva $y_1 = 0$ menos las singularidades es una hoja de la foliación.

Los detalles de los resultados obtenidos en la presente sección, el lector los podrá encontrar en (3) y (4)

4. EL RESULTADO PRINCIPAL

A continuación nosotros generalizaremos los resultados obtenidos en la sección anterior a campos vectoriales holomorfos en dimensión arbitraria (finita). Sea $\mathcal{M}^n$ una variedad compleja n-dimensional y consideremos una foliación holomorfa de dimensión uno $\mathcal{F}_Z$ sobre $\mathcal{M}^n$. Supongamos que $p \in \mathcal{M}^n$
sea una singularidad aislada de $\mathcal{F}_Z$. Denotemos por $z = (z_1,\ldots,z_n)$ las coordenadas locales de una vecindad de p en $\mathcal{M}^n$ tal que $p = (0,\ldots,0) \in C^n$. En estas condiciones, $\mathcal{F}_Z$ es generado por el campo vectorial holomorfo

$$Z = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

Si $m_o(Z) = \nu$, entonces las componentes A_i de Z tienen un desarrollo de Taylor en $0 \in C^n$

$$A_i = \sum_{k \geq \nu} A_k^i, \qquad 1 \leq i \leq n \tag{1}$$

donde los A_k^i son polinomios homogéneos de grado k.Este campo vectorial induce, sobre una vecindad del $0 \in C^n$ el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{dz_1}{dT} = \sum_{k \geq \nu} A_k^1(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

$$\frac{dz_2}{dT} = \sum_{k \geq \nu} A_k^2(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

....

$$\frac{dz_n}{dT} = \sum_{k \geq \nu} A_k^n(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

En el siguiente Teorema, probamos que la condición de que p sea una singularidad dicrítica de $\mathcal{F}_Z$ puede ser caracterizada en términos de los polinomios A_i^ν $(1 \leq i \leq n)$, i.e. de $J_0^\nu(Z)$: el *Jet de orden* ν de Z en el origen.

Teorema.- *Con las notaciones anteriores, las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) $\mathcal{F}_Z \in \mathcal{D}^n$.

b) $z_i A_\nu^j - z_j A_\nu^i = 0;\ \forall\ 1 \le i < j \le n$.

c) $\exists P_{\nu-1}$ *polinomio homogéneo de grado* $\nu - 1$ *tal que* $A_\nu^i = z_i P_{\nu-1},\ \forall\ 1 \le i \le n$.

d) $J_0^\nu(Z) = P_{\nu-1} R$, *donde* $R = \sum_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ *es el campo radial.*

Prueba:

a) $\Rightarrow$ *b)* Para cada $j = 1,\dots,n$ sea $U_j = \{(z_1,\dots,z_n) \in C^n : z_j \neq 0\}$ y $U_j^* = E^{-1}(U_j)$, donde E es el blow-up centrado en $0 \in C^n$. En U_j^* introducimos coordenadas
$(y_1,\dots,y_n)$, de esta manera E tiene la siguiente expresión:

$$E(y_1,\dots,y_n) = (z_1,\dots,z_n);\ \text{donde}\ z_i = y_i y_j\ \text{si}\ i \neq j\ \text{y}\ z_j = y_j \tag{2}$$

Además:

$$E^{-1}(0) \cap U_j^* = \{(y_1,\dots,y_n) \in U_j^* : y_j = 0\} \tag{3}$$

En esta carta, el pull-back de Z por E es generado por:

$$E^*Z = A_j E \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \left(\frac{A_i E - y_i A_j E}{y_j} \right) \frac{\partial}{\partial y_i} \tag{4}$$

De *(1)*:

$$A_i E(y) = \sum_{k \ge \nu} y_j^k A_k^i(y^*),\ \text{donde}\ y = (y_1,\dots,y_n),\ y^* = (y_1,\dots,y_{j-1},1,y_{j+1},\dots y_n)$$

Por *(4)*

$$E^*Z(y) = \left(\sum_{k\ge\nu} y_j^k A_k^j(y^*) \right) \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \left(\sum_{k\ge\nu} y_j^{k-1} \left[A_k^i(y^*) - y_i A_k^j(y^*) \right] \right) \frac{\partial}{\partial y_i} \tag{5}$$

Suponga por contradicción que *b)* es falso, entonces existe $i \neq j$, $1 \le i \le n$, tal que $A_\nu^i(y^*) - y_i A_\nu^j(y^*) \neq 0$, por lo tanto, E^*Z es divisible por $y_j^{\nu-1}$.
Sea $Z^* = \frac{E^*Z}{y_j^{\nu-1}}$, claramente $\mathcal{F}_Z{}^*$ es la foliación generada por Z^* sobre una vecindad de $E^{-1}(0) \cap U_j^*$. De *(5)* tenemos que:

$$Z^*(y) = y_j A_v^j(y^*)\frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1, i\neq j}^{n}\left(A_v^i(y^*) - y_i A_v^j(y^*)\right)\frac{\partial}{\partial y_i} + y_j Y^*(y) \qquad (6)$$

donde Y^* es un campo vectorial holomorfo. De *(6)*, se deduce fácilmente que $E^{-1}(0)$ es invariante por $\mathcal{F}_Z^*$, lo cual es una contradicción, desde que $\mathcal{F}_Z \in \mathcal{D}^n$.

b) $\Rightarrow$ *c)* Consideremos $A_v^i(z_1,\dots z_n) = \sum_{k=0}^{v} a_{v-k}^i(z_2,\dots,z_n)z_1^k$, donde $a_{v-k}^i, (1 \le i \le n)$ son polinomios homogéneos de grado v-k en las variables $z_1,\dots,z_n$. De las hipótesis, deducimos que:

$$0 = z_j A_v^1 - z_1 A_v^j = \sum_{k=0}^{v} a_{v-k}^j z_j z_1^k - \sum_{k=0}^{v} a_{v-k}^j z_j^{k+1} = a_v^1 z_j + \sum_{k=1}^{v}(a_{v-k}^1 z_j - a_{v-k+1}^j)z_1^k - a_0^j z_1^{v+1}$$

donde $1 < j \le n$. Por tanto:

$$a_v^1 = 0$$
$$a_{v-k}^j = z_j a_{v-k-1}^1, \quad 0 \le k \le v-1$$
$$a_0^j = 0$$

y por tanto:

$$A_v^1 = \sum_{k=1}^{v} a_{v-k}^1 z_1^k = z_1\left(\sum_{k=0}^{v-1} a_{v-k-1}^1 z_1^k\right)$$

$$A_v^j = \sum_{k=0}^{v-1} a_{v-k}^j z_1^k = \sum_{k=0}^{v-1} a_{v-k-1}^1 z_j z_1^k = z_j\left(\sum_{k=0}^{v-1} a_{v-k-1}^1 z_1^k\right), \quad 1 \le j \le n.$$

Deducimos de aquí que $P_{v-1}(z_1,\dots,z_n) = \sum_{k=0}^{v-1} a_{v-k-1}^1(z_2,\dots,z_n)z_1^k$ es el polinomio homogéneo de grado v-1 buscado.

c) $\Rightarrow$ *d)* $J_0^v(Z) = \sum_{i=1}^{n} A_v^i \frac{\partial}{\partial z_i} = \sum_{i=1}^{n} z_i P_{v-1}\frac{\partial}{\partial z_i} = P_{v-1}\sum_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$.

d) $\Rightarrow$ *a)* Por hipótesis y *(5)*, tenemos:

$$E^*Z(y) = y_j^{\nu}\left(P_{\nu-1}(y^*)\frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \left(A_{\nu+1}^{i}(y^*) - y_i A_{\nu+1}^{j}(y^*)\right)\frac{\partial}{\partial y_i}\right) + y_j^{\nu+1}Y^*(y).$$

se sigue que E^*Z es divisible por y_j^{ν} y $\mathcal{F}_{Z^*}$ es la foliación generada por $Z^* = \frac{E^*Z}{y_j^{\nu}}$ donde:

$$Z(y) = \left(P_{\nu-1}(y^*)\frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \left(A_{\nu+1}^{i}(y^*) - y_i A_{\nu+1}^{j}(y^*)\right)\frac{\partial}{\partial y_i}\right) + y_j Y^*(y). \tag{7}$$

en donde Y^* es un campo vectorial holomorfo. Por *(3)*, tenemos que:

$$Z^* = \left(P_{\nu-1}(y^*)\frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \left(A_{\nu+1}^{i}(y^*) - y_i A_{\nu+1}^{j}(y^*)\right)\frac{\partial}{\partial y_i}\right). \tag{8}$$

Esto implica que $E^{-1}(0)$ no es invariante por $\mathcal{F}_{Z^*}$ y por tanto $\mathcal{F}_Z \in \mathcal{D}^n$, lo cual finaliza la demostración.

Considere una foliación $\mathcal{F}_Z \in \mathcal{D}^n$. De *(8)* observamos que los puntos de $Sing(\mathcal{F}_{Z^*}) \cap E^{-1}(0)$ en la carta U_j^* (j fijo, $1 \leq j \leq n$) son las soluciones de:

$$P_{\nu-1}(y^*) = 0$$

$$A_{\nu+1}^{i}(y^*) - y_i A_{\nu+1}^{j}(y^*) = 0; \quad 1 \leq i \leq n, \ i \neq j$$

Concluimos que $Sing(\mathcal{F}_{Z^*}) \cap E^{-1}(0)$ es el conjunto de puntos $[z_1;\ldots;z_n] \in CP(n-1)$ las cuales son soluciones de las siguientes $\frac{(n-1)n}{2} + 1$ sistema de ecuaciones homogéneas:

$$\begin{aligned} &P_{\nu-1}(z) = 0 \\ &z_j A_{\nu+1}^{i}(z) - z_i A_{\nu+1}^{j}(z) = 0; \quad 1 \leq i < j \leq n \end{aligned} \tag{9}$$

De ésta manera, la prueba del siguiente Corolario, es evidente:

Corolario.- *Con las notaciones anteriores, tenemos que:*

$\mathcal{F}_Z \in D_0^n$ si y solo si $z = 0 \in C^n$ es la única solución del sistema (9).

Finalmente, observe que para cada $\mathcal{F}_Z \in D_0^n$, definimos

$$S = \{ \ [z_1;\ldots;z_n] \in CP(n-1) : P_{\nu-1}(z_1,\ldots,z_n) = 0 \ \}$$

Claramente, S es una hipersuperficie algebraica en $CP(n-1)$ (ver (1)) y tiene la siguiente propiedad : Sea $p^* \in E^{-1}(0)$ y L^* la hoja de $\mathcal{F}_Z^*$ que pasa por p^*. Se sigue inmediatamente que L^*es no singular y si $p^* \notin S$ entonces L^* es transversal al espacio proyectivo $E^{-1}(0)$. Por esta razón llamaremos a S la *hipersuperficie de tangencia* de la foliación $\mathcal{F}_Z$.

5. REFERENCIAS

(1) ***BENAZIC, R.*** *Isolated dicritical singularities of a holomorphic vector fields,*Tesis de doctorado, IMPA, (1996).

(2) ***CAMACHO, C. - LINS NETO, A. - SAD, P.*** *Topological invariants and Equidesingularization for Holomorphic Vector Fields,* Journal of differential geometry, 20,(1984), 143 - 174

(3) ***CAMACHO, C.*** *Holomorphic Dynamical Systems,* Summer School on Dynamical Systems, ICTP, (19889.

(4) ***CAMACHO, C. - SAD, P.*** *Pontos singulares de Equaçoes Diferenciais Analiticas,* 16° Colóquio Brasileiro de Matemáticas, IMPA, (1987).

(5) ***CERVEAU, D. - MATTEI, J-F.*** *Formes Intégrables Holomorphes Singulières,* astérisque, 97, (1982).

(6) ***GUNNING, R. - ROSSI, H.*** *Analytic functions of several complex variables.*Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. (1965)

(7) ***MATTEI, J-F. - MOUSSU, R.*** *Holonomie et intégrales premières,* Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup. (4), 13, (1980), 469 - 523

(8) ***WHITNEY, H.*** *Complex Analytic Varieties,* Addison-Wesley Publishing Company, (1972).