PESQUIMAT Revista de la Fac. CC. MM. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. IX N° 1, pp. 17 - 29, LIMA - PERÚ. Julio 2006

UN PROBLEMA BIEN PUESTO EN EL SENTIDO DE HADAMARD PARA UNA VIGA TERMOELÁSTICA

José Luyo Sánchez[1]

RESUMEN.- *En este trabajo presentamos un modelo no lineal de una viga de longitud finita afectada por una fuente de calor, el cual describe los desplazamientos longitudinales y transversales, siendo este último fenómeno afectado de gradientes de temperatura. Demostramos que el sistema es bien puesto en el sentido de Hadamard para soluciones fuertes.*

PALABRAS CLAVE.- *Modelo no lineal, Hadamard, soluciones fuertes.*

ABSTRACT.- *In this work, we present a nonlinear model of a beam of finite length, which describes the longitudinal and cross - sectional displacements, being this last phenomenon affected by gradients of temperature.*
We demonstrate that the system is well - posed in the sense of Hadamard for strong solutions.

KEY WORDS.- *Nonlinear model, Hadamard, strong solutions.*

1. INTRODUCCIÓN

Consideramos un modelo no lineal de viga uniforme prismática, de longitud finita, que describe desplazamientos transversales y verticales; estos últimos vienen afectados de una fuente de calor. Gradientes de temperatura contribuyen, en cuerpos sólidos, a su deformación; pueden causar cambios en su rigidez, en el caso de la viga, cuando es sometida a las fuerzas externas, pueden también causar cambios en las frecuencias de sus vibraciones y hasta torsión, motivo por el cual hallamos importante considerar el estudio de este sistema.

Este modelo, sin presencia de temperatura, fue presentado por Lagnese y Leugering [7] para un modelo de viga de longitud finita y con efectos disipativos en los extremos de la viga, este también es conocido como el modelo termoelástico unidimensional del Von Kárman.

En este trabajo mostramos que el modelo no lineal es un problema que posee una única solución global fuerte y que además esta depende continuamente de sus datos iniciales. El punto principal de la prueba radica en el uso del método de Punto Fijo en conjunción con estimativas a priori, estas últimas son consecuencia de resultados de la teoria de semigrupos y de problemas elípticos.

2. PRELIMINARES Y NOTACIONES

Sea $u = u(x,t)$ y $w = w(x, t)$, con $(x, t) \in [0, L] \times [0, \infty)$, variables reales que representan los desplazamientos horizontales y verticales de la viga, además con la variable $\theta = \theta(x, t)$ con $(x, t) \in [0, L] \times [0, \infty)$ describiremos la temperatura que actúa sobre los desplazamientos verticales de la viga. En estas condiciones consideremos el sistema termoelástico que describe el modelo, ver [7].

[1] *Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Ciencias Matemáticas. e-mail:*jluyos@unmsm.edu.pe

$$\left\{\begin{array}{l} u_{tt} - \left[u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right]_x = 0, \text{ en } (0, L) \times (0, \infty), \\ w_{tt} - w_{xxtt} + w_{xxxx} - \left[w_x(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2)\right]_x + \alpha\theta_{xx} = 0, \text{ en } (0, L) \times (0, \infty), \\ \theta_t - \theta_{xx} - \alpha w_{xxt} = 0, \text{ en } (0, L) \times (0, \infty), \\ u(0) = u(L) = 0, \ w(0) = w(L) = w_x(0) = w_x(L) = 0, \ \theta(0) = \theta(L) = 0, \ \forall t \geq 0 \\ u(0) = u_0, \ u_t(0) = u_1, \ w(0) = w_0, \ w_t(0) = w_1, \ \theta(0) = \theta_0, \text{ en } (0, L). \end{array}\right. \tag{2.1}$$

La energía total de la viga está dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \left\{|u_t|^2 + |w_t|^2 + |w_{xt}|^2 + |w_{xx}|^2 + |\theta|^2\right\} dx + \frac{1}{2}\int_0^L (u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2)^2 \, dx.$$

Definición. Decimos que $\{u, w, \theta\}$ es una solución fuerte de (P) si

$$u \in C(0, \infty; H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)) \cap C^1(0, \infty; H_0^1(0, L)) \cap C^2(0, \infty; L^2(0, L)),$$
$$w \in C(0, \infty; H^3(0, L) \cap H_0^2(0, L) \cap C^1(0, \infty; H_0^2(0, L)) \cap C^2(0, \infty; H_0^1(0, L)),$$
$$\theta \in C(0, \infty; H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)) \cap C^1(0, \infty; L^2(0, L))$$

y estas funciones satisfacen

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d}{dt}(u_t, \varphi) + (u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2, \varphi_x) = 0, \ \forall \varphi \in H_0^1(0, L), \ \forall t \geq 0, \\ \frac{d}{dt}(w_t, \psi) + \frac{d}{dt}(w_{xt}, \psi_x) + (w_{xx}, \psi_{xx}) + (w_x(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2), \psi_x) - \alpha(\theta_x \psi_x) = 0, \\ \qquad \forall \psi \in H_0^2(0, L), \ \forall t \geq 0, \\ \frac{d}{dt}(\theta_t, \phi) + (\theta_x, \phi_x) + \alpha(w_{xt}, \phi_x) = 0, \ \forall \phi \in H_0^1(0, L), \ \forall t \geq 0, \\ u(0) = u_0, \ u_t(0) = u_1, \ w(0) = w_0, \ w_t(0) = w_1, \ \theta(0) = \theta_0, \text{ en } (0, L). \end{array}\right. \tag{2.2}$$

Donde (,) representa el producto interno en $L^2(0, L)$.

Lema 2.1. *Sea* $\{u, w, \theta\}$ *una solución fuerte de (2.11) entonces se tiene que*

$$E(t) \leq E(0), \forall t \geq 0.$$

Demostración. Suponiendo la existencia de una solución fuerte $\{u, w, \theta\}$ y considerando en (2.2) $\varphi = u_t$, $\psi = w_t$ y $\phi = \theta$ se tiene que

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\int_0^L |\theta_x|^2 \, dx, \quad t \geq 0.$$

de donde obtenemos el resultado.

3. EL PROBLEMA LINEALIZADO

Con el objetivo de obtener solución del problema (2.11), linealizamos este sistema y obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - f_x = 0, & \text{en} \quad (0, L) \times (0, T) \\ u(0) = u_0, \, u_t(0) = u_1, & \text{en} \quad (0, L), \end{cases} \tag{3.1}$$

donde $f : [0, L] \times [0, T] \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xxtt} + w_{xxxx} + \theta_{xx} - g_x = 0, \text{ en } (0, L) \times (0, T), \\ \qquad \theta_t - \theta_{xx} - w_{xxt} = 0, \text{ en } (0, L) \times (0, T), \\ w(0) = w_0, \, w_t(0) = w_1, \, \theta(0) = \theta_0, \text{ en } (0, L), \end{cases} \tag{3.2}$$

donde $g : [0, L] \times [0, T] \to \mathbb{R}$

A continuación demostraremos que estos problemas tienen solución; para tal efecto la teoría de semigrupos nos auxiliará en este propósito.

Teorema 3.1 *Sean* $u_0 \in H^2 \cap H_0^1$, $u_1 \in H_0^1$ y $f \in C^1([0, T]; H_0^1(0, L))$, *entonces el problema*

$$(P1) \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f_x, \text{ en } (0, L) \times (0, T), \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \text{ en } (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \, u_t(x, 0) = u_1(x), \text{ en } (0, L). \end{cases} \tag{3.3}$$

admite una única solución u tal que

$$u \in C^2([0, T]; H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)) \cap C^1([0, T]; H_0^1(0, L)) \cap C([0, T]; L^2(0, L)) \tag{3.4}$$

y satisface las condiciones iniciales del problema. Además existe una constante $C > 0$, *independiente de u y f, tal que*

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{H^2 \cap H_0^1} + \|u_t(t)\|_{H_0^1} + \|u_{tt}(t)\|_{L^2} \le \|u_1\|_{H_0^1} + \|u_0\|_{H^2 \cap H_0^1} + \|f(0)\|_{H_0^1} + \\ + \int_0^t \|f_t(s)\|_{H_0^1} \, ds, \textit{ para cada } t \in [0, T] \end{aligned} \tag{3.5}$$

El segundo problema linealizado, será estudiado desde el punto de vista variacional, establecemos entonces el sistema (P2) como

$$(P.2) \begin{cases} w_{tt} - w_{xxtt} + w_{xxxx} + \theta_{xx} - g_x = 0, \text{ en } (0, L) \times (0, T), \\ \qquad \theta_t - \theta_{xx} - w_{xxt} = 0, \text{ en } (0, L) \times (0, T), \\ w(0) = w(L) = w_x(0) = w_x(L) = 0, \; \theta(0) = \theta(L) = 0, \; \forall t \ge 0 \\ \qquad w(0) = w_0, \; w_t(0) = w_1, \; \theta(0) = \theta_0, \text{ en } (0, L), \end{cases} \tag{3.6}$$

Comenzamos definiendo el conjunto

$$D(\mathcal{B}) = \left\{\theta \in H^2 \cap H_0^1 / \exists z \in H^2 \cap H_0^1, \text{ tal que}, (\theta_x, \phi_x) = (z, \phi) + (z_x, \phi_x), \forall \phi \in H_0^1\right\}. \quad (3.7)$$

Se prueba entonces que $D(\mathcal{B}) = H^2 \cap H_0^1$. Definimos el operador $\mathcal{B}$ como

$$\mathcal{B} : D(\mathcal{B}) \to H^2 \cap H_0^1, \ \mathcal{B}\theta = z.$$

Entonces tenemos

$$(\theta_x, \phi_x) = (\mathcal{B}\theta, \phi) + (\mathcal{B}\theta_x, \phi_x), \ \forall \phi \notin H_0^1.$$

En particular si $\phi = \mathcal{B}\theta$, podemos encontrar una constante $C > 0$ tal que

$$\|\mathcal{B}\theta\|_{H_0^1} \leq C\|\theta\|_{H_0^1}$$

Por otro lado definimos el conjunto $D(\mathcal{A})$ por

$$D(\mathcal{A}) = \left\{w \in H_0^2 / \exists y \in H_0^1, \text{ tal que } (w_{xx}, \psi_{xx}) = (y_x, \psi_x) + (y, \psi), \forall \psi \in H_0^2\right\} \quad (3.8)$$

Lema 3.1. *En esta condiciones tenemos que* $D(\mathcal{A}) = H^3 \cap H_0^2$.

Consideremos ahora el operador $\mathcal{A}$ definido sobre $D(\mathcal{A})$ tal que

$$\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \to H_0^1$$
$$w \mapsto Aw = y.$$

donde y satisface (3.8). Se tiene entonces que el operador $\mathcal{A}$ está bien definido.

Construimos un operador que reuna los ya definidos, consideremos entonces $\mathbb{A}$ definido en el espacio $X = H_0^2 \times H_0^1 \times L^2$, con dominio

$$D(\mathbb{A}) = \left\{\begin{pmatrix} w \\ v \\ \theta \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A}) \times H_0^2 \times D(\mathcal{B})\right\},$$

y definido por

$$\mathbb{A}\begin{pmatrix} w \\ v \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\mathcal{A}w + \mathcal{B}\theta \\ \theta_{xx} + v_{xx} \end{pmatrix}, \text{ para cada } \begin{pmatrix} w \\ v \\ \theta \end{pmatrix} \in D(\mathbb{A})$$

Note que

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ -\mathcal{A} & 0 & B \\ 0 & \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \end{pmatrix}.$$

En $X = H_0^2 \times H_0^1 \times L^2$ consideramos el producto interno usual dado por

$$\left(\begin{pmatrix} w \\ v \\ \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{w} \\ \tilde{v} \\ \tilde{\theta} \end{pmatrix} \right)_2 = (w, \tilde{w}) + (w_{xx}, \tilde{w}_{xx}) + (v, \tilde{v}) + (v_x, \tilde{v}_x) + (\theta, \tilde{\theta}),$$

para cada $(w, v, \theta), (\tilde{w}, \tilde{v}, \tilde{\theta}) \in H_0^2 \times H_0^1 \times L^2$.

Lema 3.2. *El operador* $\mathbb{A}$ *y su dual* $\mathbb{A}^*$ *son disipativos en* $X = H_0^2 \times H_0^1 \times L^2$.

Demostración. Dado $(w, v, \theta) \in D(\mathbb{A})$, de la definición de $\mathbb{A}$ se sigue que

$$\left(\mathbb{A} \begin{pmatrix} w \\ v \\ \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ v \\ \theta \end{pmatrix} \right)_2 = -\|\theta_x\|^2 .$$

Por otro lado $\mathbb{A}^*$ tiene la siguiente estructura

$$\mathbb{A}^* = \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 \\ A & 0 & -B \\ 0 & -\frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{pmatrix}$$

De donde se puede deducir que dado $(w, v, \theta) \in D(\mathbb{A})$ se tiene

$$\left(\mathbb{A}^* \begin{pmatrix} w \\ v \\ \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ v \\ \theta \end{pmatrix} \right)_2 = -\|\theta_x\|^2 .$$

Luego, como $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}^*$ son disipativos, con dominio denso en X, de la teoría de semigrupos se deduce que $\mathbb{A}$ es generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones.

Teorema 3.2 *Dados* $w_0 \in H^3 \cap H_0^2$, $w_1 \in H_0^2$, $\theta \in H^2 \cap H_0^1$, $g \in C^1([0,T]; L^2)$, *entonces el problema (P2), admite una única solución* $\{w, \theta\}$, *tal que*

$$w \in C([0,T]; H^3 \cap H_0^2) \cap C^1([0,T]; H_0^2) \cap C^2([0,T]; H_0^1), \tag{3.9}$$

$$\theta \in C([0,T]; H^2 \cap H_0^1) \cap C^1([0,T]; L^2). \tag{3.10}$$

satisface el sistema

$$\frac{d}{dt}(w_t, \psi) + \frac{d}{dt}(w_{tx}, \psi_x) + (w_{xx}, \psi_{xx}) - (\theta_x, \psi_x) + (g, \psi_x) = 0, \ \forall \psi \in H_0^2 .$$

$$\frac{d}{dt}(\theta, \phi) + (\theta_x, \phi_x) + (w_{xt}, \phi_x) = 0, \ \forall \phi \in H_0^1 .$$

y verifica las condiciones iniciales del problema.

Demostración. Con los resultados obtenidos, establecemos un problema de valor inicial asociado al problema (P2). Sea entonces la función $\tilde{g}$ solución del problema variacional

$$(\tilde{g}, \psi) + (\tilde{g}_x, \psi_x) = (g, \psi_x), \ \forall \psi \in H_0^1, \tag{3.11}$$

entonces por el Teorema de Lax-Milgram se muestra que $\tilde{g} \in C^1([0,T] : H_0^1)$.

Sea $Y = \begin{pmatrix} w \\ v \\ \theta \end{pmatrix}$, $Y_0 = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \theta_0 \end{pmatrix}$ y $F = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{g} \\ 0 \end{pmatrix}$, consideremos el sistema

$$\begin{cases} Y_t = \mathbb{A}Y + F \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

donde $Y_0 \in D(\mathbb{A})$, $F \in C^1([0,T]; H_0^2 \times H_0^1 \times L^2)$. Luego, como $\mathbb{A}$ es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones, entonces existe una única solución

$$Y \in C([0,T]; D(\mathbb{A})) \times C^1([0,T]; H_0^2 \times H_0^1 \times L^2).$$

por lo tanto

$$w \in C([0,T]; H^3 \cap H_0^2) \cap C^1([0,T]; H_0^2) \cap C^2([0,T]; H_0^1)$$
$$\theta \in C([0,T]; H^2 \cap H_0^1) \cap C^1([0,T]; L^2)$$

de donde se sigue el resultado.

3.1 ANÁLISIS DE LOS TÉRMINOS NO LINEALES

Usaremos el teorema de punto de fijo de Banach para obtener solución del problema (2.1). Para ello debemos conocer el comportamiento de los términos no lineales del problema. Consideremos los espacios Y_u, Y_w, y Y_θ definidos como

$$Y_u = C^2([0,T]; H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)) \cap C^1([0,T]; H_0^1(0,L)) \cap C([0,T]; L^2(0,L)),$$
$$Y_w = C([0,T]; H^3 \cap H_0^2) \cap C^1([0,T]; H_0^2) \cap C^2([0,T]; H_0^1).$$
$$Y_\theta = C([0,T]; H^2 \cap H_0^1) \cap C^1([0,T]; L^2).$$

Observamos que Y_u y Y_w, Y_θ son los espacios solución de los problemas (3.3) y (3.6) respectivamente.

Teorema 3.3. *Sean $u \in Y_w$, $w \in Y_w$, definimos las funciones f y g como*

$$f = \frac{1}{2}(w_x)^2, \ g = w_x(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2). \tag{3.12}$$

Entonces

$$f \in C([0,T], H_0^2(0,L) \cap C^1([0,T]; H_0^1(0,L)) \cap C^2([0,T]; L^2(0,L)) := Y_f,$$
$$g \in C([0,T]; H_0^1) \cap C([0,T]; L^2(0,L)) := Y_g$$

y estas funciones satisfacen

$$\|f\|_{Y_f} \le C\|w\|_{Y_u}^2,$$

$$\|g\|_{Y_g} \le C(\|u\|_{Y_u}\|w\|_{Y_w} + \|w\|_{Y_w}^3),$$

donde $C > 0$ *es una constante que depende apenas de constantes de inmersión.*

3.2 ESTIMATIVAS DE LAS SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS (P1) Y (P2)

Considerando una estructura más específica para las funciones f y g de los problemas (3.3) y (3.6) respectivamente, fallaremos estimativas para las soluciones u y w, θ respectivamente. Usaremos resultados de la teoría de semigrupos para tal objetivo.

Dados $\tilde{u} \in Y_u$, $\tilde{w} \in Y_w$, definimos las funciones f y g como

$$f = \frac{1}{2}(\tilde{w}_x)^2, \tag{3.13}$$

$$g = \tilde{w}_x(\tilde{u}_x + \frac{1}{2}(\tilde{w}_x)^2). \tag{3.14}$$

Por el Teorema 3.3, estas funciones satisfacen las hipótesis de los Teoremas 3.1 y 3.2, luego para estas funciones los problemas (3.3) y (3.6) poseen solución $u \in Y_u$ y $(w, \theta) \in Y_w \times Y_\theta$ respectivamente.

Teorema 3.4. *Con las condiciones iniciales del Teorema 3.1 y la función f definida como en (3.13) y* $\tilde{w} \in Y_w$ *entonces existe una constante* $C > 0$, *independiente de u y w, tal que*

$$\|u(t)\|_{H^2} + \|u_t(t)\|_{H^1} + \|u_u(t)\|_{L^2} \le$$

$$C(\|u_0\|_{H^2} + \|u_1\|_{H^1} + \|\tilde{w}(0)\|_{H^3} + \|\tilde{u}(0)\|_{L^2}) + TC\|\tilde{w}\|_{Y_w}^2 + TC\|\tilde{u}\|_{Y_u}. \tag{3.15}$$

El siguiente Teorema nos brindará estimativas para el problema (P2)

Teorema 3.5. *En las condiciones iniciales del Teorema 3.2 y las funciones f y g definidas como en (3.13) y (3.14) y con* $\tilde{w} \in Y_w$, $\tilde{u} \in Y_u$ *entonces existe una constante* $C > 0$, *independiente de u, w y* θ, *tal que*

$$\begin{aligned} \|w\|_{H^3 \cap H_0^2} + \|w_t\|_{H_0^2} + \|w_{tt}\|_{H_0^1} + \|\theta\|_{H^2 \cap H_0^1} + \|\theta_t\|_{L^2} &\le \\ \le C(\|w_1\|_{H_0^2} + \|w_0\|_{L^2} + \|\mathcal{A}w_0\|_{H_0^1} + \|\theta_0\|_{L^2} + \|g(0)\|_{L^2}) &+ \\ + TC(\|\tilde{u}\|_{Y_w}\|\tilde{w}\|_{Y_w} + \|\tilde{w}\|_{Y_w}^3). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Demostración. Del problema (P2), y considerando la función real $\tilde{g}$ definida como en (3.11) tenemos

$$\begin{pmatrix} w \\ w_t \\ \theta \end{pmatrix}_t = A\begin{pmatrix} w \\ w_t \\ \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{g}(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

Aplicamos resultados de semigrupos, para obtener

$$\| w_t\|_{H^2} + \|w_{tt}\|_{H^1} + \|\theta_t\| \le \|w_1\|_{H^2} + \| \mathcal{A}w_0\|_{H_0^1} + \|\theta_0\|_{H_0^1} + C(\|\tilde{u}(0)_t\|_{H^2} \, \| \tilde{w}(0)\|_{H^3}$$
$$+\| \tilde{w}(0)\|_{L^2}) + CT(\|\tilde{u}\|_{Y_u} \|\tilde{w}\|_{Y_w} + \|\tilde{w}\|_{Y_w}^3). \tag{3.17}$$

Del problema variacional asociado a la ecuación linealizada (P2). Tenemos

$$(w_{xx}, \psi_{xx}) = (-w_{tt}, \varphi) + (-w_{xtt}, \psi_x) + (\theta_x, \psi_x) + (g, \psi_x), \ \forall \psi \in H_0^2 .$$

De donde podemos deducir, usando resultados de problemas elípticos y las estimativas sobre los términos no lineales del problema, que existe una constante $C > 0$, tal que para cada $t \in [\,0,T]$.

$$\| w\|_{H^3 \cap H_0^2} + \|w_t\|_{H_0^2} + \|w_{tt}\|_{H_0^1} + \|\theta\|_{H^2 \cap H_0^1} + \|\theta_t\| \le$$
$$\| w_1\|_{H_0^2} + \| \mathcal{A}w_0\|_{H_0^1} + \|\tilde{w}(0)\|_{H^3} + C(\|\tilde{u}(0)\|_{H^2} \, \|\tilde{w}(0)\|_{H^3} + \|\tilde{w}(0)\|_{H^3}^3) +$$
$$+ TC(\|\tilde{u}\|_{Y_w} \| \tilde{w}\|_{Y_w} + \|\tilde{w}\|_{Y_w}^3) \tag{3.18}$$

Con lo que el resultado queda demostrado.

4. EXISTENCIA DE SOLUCIÓN LOCAL

El objetivo de esta sección es mostrar que el sistema (2.1) posee una única solución, por lo menos definida en un pequeño intervalo de tiempo.

Consideremos los siguientes datos iniciales para el problema (2.1)

$$u_0 \in H^2 \cap H_0^1, \ u_1 \in H_0^1, \ w_0 \in H^3 \cap H_0^2, \ w_1 \in H_0^2, \ \theta \in H^2 \cap H_0^1$$

Sea $Y = Y_u \times Y_w \times Y_\theta$, definimos el conjunto

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{w} \\ \tilde{\theta} \end{pmatrix} \in Y \begin{pmatrix} \tilde{u}(0) \\ \tilde{u}_t(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{w}(0) \\ \tilde{w}_t(0) \\ \tilde{\theta}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \theta_0 \end{pmatrix}, \text{ tal que } \left\| \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{w} \\ \tilde{\theta} \end{pmatrix} \right\|_Y \le R \right\},$$

donde $R \ge 1$. En estas condiciones K es un conjunto cerrado del espacio de Banach $Y_u \times Y_w \times Y_\theta$.

Dadas las funciones $(\tilde{u}, \tilde{w}, \theta) \in K$, definimos f y g como en (3.12). Entonces con estos datos iniciales proveniente del conjunto K tenemos de los Teoremas 3.4 y 3.5 que existe una constante $C > 0$ independiente de u, w y θ tal que,

$$\| u(t)\|_{H^2 \cap H_0^1} + \|u_t(t)\|_{H_0^1} + \|u_{tt}(t)\|_{L^2} \le$$
$$C(\| u_0\|_{H^2} + \| u_1\|_{H_0^1} + \|w_0\|_{H^3}) + TC\| \tilde{w}\|_{Y_w}^2, \text{ para todo } t \in [0, T], \tag{4.1}$$

y

$$\| w\|_{H^3\cap H_0^2} + \|w_t\|_{H_0^2} + \|w_{tt}\|_{H_0^1} + \|\theta\|_{H^2\cap H_0^1} + \|\theta_t\| \leq$$
$$\| w_1\|_{H^2} + \| \mathcal{A}w_0\|_{H^1} + \| w_0\|_{H^3} + C(\|u_0\|_{H^2}\| w_0\|_{H^3} + \| w_0\|_{H^3}^3) + \tag{4.20}$$
$$+ TC(\|\tilde{u}\|_{Y_u}\| \tilde{w}\|_{Y_w} + \|\tilde{w}\|_{Y_w}^3), \text{ para todo } t\in[0, T].$$

Sobre el conjunto K, definimos la siguiente aplicación,

$$\mathcal{P}: K \to Y_u \times Y_u \times Y_\theta \text{ tal que}$$

$$\begin{pmatrix}\tilde{u}\\ \tilde{w}\\ \tilde{\theta}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}u\\ w\\ \theta\end{pmatrix},$$

donde $\{u, w, \theta\}$ son solución de (3.3) y (3.6) respectivamente, con f y g definidos como en (3.12) a partir de $(\tilde{u}, \tilde{w}, \theta)\in K$. La aplicación $\mathcal{P}$ está bien definida en razón de la unicidad de solución de los problemas linealizados (3.3) y (3.6).

Se tiene que $\mathcal{P}(\mathbb{K})\subset\mathbb{K}$ y además que es una contracción sobre $\mathbb{K}$. En efecto,

I) $\mathcal{P}:\mathbb{K}\to\mathbb{K}$. Usando las estimativas (4.1) y (4.2), veremos que para un $T>0$ suficientemente pequeño y adecuado, $\mathcal{P}(\mathbb{K})\subset\mathbb{K}$.

II) $\mathcal{P}$ **es una contracción.** Para demostrar esta propiedad de $\mathcal{P}$ tomamos un par de elementos de $\mathbb{K}$. Sean

$$\begin{pmatrix}\tilde{u}\\ \tilde{w}\\ \tilde{\theta}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\tilde{U}\\ \tilde{W}\\ \tilde{\Theta}\end{pmatrix}\in K.$$

Luego mediante $\mathcal{P}$ corresponden a estos elementos, respectivamente

$$\begin{pmatrix}u\\ w\\ \theta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}U\\ W\\ \Theta\end{pmatrix}\in\mathbb{K},$$

tal que

$$\mathcal{P}\begin{pmatrix}\tilde{u}\\ \tilde{w}\\ \tilde{\theta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u\\ w\\ \theta\end{pmatrix} \text{ y } \mathcal{P}\begin{pmatrix}\tilde{U}\\ \tilde{W}\\ \tilde{\Theta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}U\\ W\\ \Theta\end{pmatrix}.$$

Definimos las funciones:

$$f = \frac{1}{2}(\tilde{w}_x)^2,\ g = (\tilde{u}_x + \frac{1}{2}(\tilde{w}_x)^2)\tilde{w}_x,$$
$$F = \frac{1}{2}(\tilde{W}_x)^2,\ G = (\tilde{U}_x + \frac{1}{2}(\tilde{W}_x)^2)\tilde{W}_x.$$

El objetivo es estimar la diferencia de u con U, de w con W y de θ con Θ

En las estimativas escogemos un $T > 0$, suficientemente pequeño tal que

$$\left\| \mathcal{P}\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{w} \\ \tilde{\theta} \end{pmatrix} - \mathcal{P}\begin{pmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{W} \\ \tilde{\Theta} \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{K}} \leq \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{w} \\ \tilde{\theta} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{w} \\ \tilde{\Theta} \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{K}}$$

Luego $\mathcal{P}$ es una contracción en $\mathbb{K}$.

Por lo tanto existe un T_0 suficientemente pequeño de tal forma que aplicando el Teorema de *Punto Fijo* podemos decir que existe un único elemento $\begin{pmatrix} u \\ w \\ \theta \end{pmatrix} \in \mathbb{K}$ tal que

$$u \in C([0, T_0]; H^2 \cap H_0^1) \cap C^1([0, T_0]; H_0^1) \cap C^2([0, T_0]; L^2),$$
$$w \in C([0, T_0]; H^3 \cap H_0^2) \cap C^1([0, T_0]; H_0^2) \cap C^2([0, T_0]; H_0^1),$$
$$\theta \in C([0, T_0]; H^2 \cap H_0^1) \cap C^1([0, T_0]; L^2)$$

y satisface la ecuación

$$\begin{cases} u_{tt} - \left[u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2 \right]_x = 0, \text{ en } (0, L) \times (0, T_0), \\ w_{tt} - w_{xxtt} + w_{xxxx} - \left[w_x(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2) \right]_x + \alpha\theta_{xx} = 0, \text{ en } (0, L) \times (0, T_0), \\ \theta_t - \theta_{xx} - \alpha w_{xxt} = 0, \text{ en } (0, L) \times (0, T_0), \end{cases}$$

4.1 EXISTENCIA GLOBAL

La existencia de una solución local del sistema (2.1) nos garantiza la existencia de un intervalo maximal de solución $[0, T_{\max})$, pues el método induce a iterar esta construcción. La existencia global será resultado de una estimativa apriori sobre las soluciones en el espacio $Y_u \times Y_w \times Y_\theta$, pues tenemos el siguiente resultado; Si $\{u, w, \theta\}$ es la solución maximal del problema (2.1), entonces sólo una de las dos alternativas siguientes se satisface:

$A_1)$ $T_{\max} = +\infty$

$A_2)$ $T_{\max} < +\infty$, y en este caso

$$\lim_{t \to T_{\max}} (\|u(t)\|_{H^2 \cap H_0^1} + \|u_t(t)\|_{H_0^1} + \|u_{tt}(t)\|_{L^2} + \|w(t)\|_{H^3 \cap H_0^2} + \|w_t(t)\|_{H_0^2} + \|w_{tt}(t)\|_{H_0^1} +$$
$$\|\theta(t)\|_{H^2 \cap H_0^1} + \|\theta_t(t)\|_{L^2}) = \infty$$

Obviamente si A_1 es válido entonces $\{u, w, \theta\}$ es una solución global del problema. En el caso A_2, decimos que la solución $\{u, w, \theta\}$ explota en tiempo finito.

En el segundo caso,el límite necesariametne explota,en caso contrario es posible hallar un intervalo mayor de tiempo al intervalo $[0, T_{\max})$ donde existe solución del problema (2.1), lo que contradice el hecho de la maximalidad de $T_{\max}$.

De esta forma, para mostrar la existencia de una solución global del problema (2.1) es suficiente m ostrarque A_2 no sucede. Esto será verificado con el siguiente resultado.

Teorema 4.1. *Sea* $T < T_{\max}$, *considerando* $\{u, w, \theta\}$ *la solución maximal del sistema (2.1) sobre el intervalo* $[0,T]$, *entonces existe una constante* $M(T) > 0$, *de carácter exponencial, tal que para todo* $t \in [0, T]$.

$$\|u(t)\|_{H^2\cap H_0^1} + \|u_t(t)\|_{H_0^1} + \|u_{tt}(t)\|_{L^2} + \|w(t)\|_{H^2\cap H_0^2} + \|w_t(t)\|_{H_0^2} + \|w_{tt}(t)\|_{H_0^1} +$$
$$\|\theta(t)\|_{H^2\cap H_0^1} + \|\theta_t(t)\|_{L^2} \le M(T)$$

La demostración del Teorema 4.1 se sigue de los lemas 4.1 y 4.2 que a seguir enunciamos y demostramos.

Lema 4.1. *Con las hipótesis del Teorema 4.1, existe una constante* $M(T) > 0$, *tal que*

$$\|u_t(t)\|_{H_0^1} + \|u_{tt}(t)\|_{L^2} + \|w_t(t)\|_{H_0^2} + \|w_{tt}(t)\|_{H_0^1} + \|\theta_t(t)\|_{L^2} \le M(T),\ \forall t \in [0, T].$$

Demostración. De la definición de solución fuerte del problema (2.1) tenemos

$$\begin{cases} (u_{tt}, \phi) + (u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2, \phi_x) = 0, \quad \forall \phi \in H_0^1, \\ (w_{tt}, \psi) + (w_{xtt}, \psi_x) + (w_{xx}, \psi_{xx}) + (w_x(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2), \psi_x) - (\theta_x, \psi_x) = 0, \ \forall \psi \in H_0^2, \\ (\theta, \varphi) + (\theta_x, \varphi_x) + (w_{tx}, \varphi_x) = 0, \forall \varphi \in H_0^1. \end{cases}$$

Derivando las ecuaciones con respecto a t y después tomando $\phi = u_{tt}$, $\psi = w_{tt}$ y $\varphi = \theta$, y sumando las ecuaciones tenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{tt}\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|w_{tt}\|^2 + \|w_{ttx}\|^2 + \|w_{txx}\|^2 + \|\theta_t\|^2\right\} + \|\theta_{xt}\|^2 + \tag{4.3}$$
$$+(u_{xt} + w_x w_{xt}, u_{xtt} + w_x w_{xtt}) + (u_x + \tfrac{1}{2}(w_x)^2, w_{ttx} w_{xt}) = 0.$$

de donde obtenemos, ver [8]

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{tt}\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|w_{tt}\|^2 + \|w_{ttx}\|^2 + \|w_{txx}\|^2 + \|\theta_t\|^2\right\} + \|\theta_{xt}\|^2$$
$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{xt} + w_x w_{xt}\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2, (w_{xt})^2) - \frac{3}{2}(u_{xt} + w_x w_{xt}, (w_{xt})^2) = 0.$$

Integrando de 0 a $t \leq T$,

$$\frac{1}{2}\left\{\|u_{tt}\|^2 + \|w_{tt}\|^2 + \|w_{ttx}\|^2 + \|w_{txx}\|^2\right\}\Big|_0^t + $$
$$+\frac{1}{2}\|u_{xt} + w_x w_{xt}\|^2\Big|_0^2 + \frac{1}{2}(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2, (w_{xt})^2)\Big|_0^t \tag{4.4}$$
$$\leq \frac{3}{2}\int_0^t (u_{xt} + w_x w_{xt}, (w_{xt})^2)\, ds.$$

Luego usando los resultados de [8] obtenemos que

$$\|u_{tt}\|_{L^2}^2 + \|u_t\|_{H_0^1}^2 + \|w_{tt}\|_{H_0^1}^2 + \|w_t\|_{H_0^2}^2 + \|\theta_t\|_{L^2}^2 \leq M(T),$$

donde $M(T)$ es una constante que depende esencialmente de e^T, con lo que queda desmostrado el Lema.

Lema 4.2. *Con las hipótesis del Teorema 4.1, existe una constante* $M(T) > 0$, *tal que*

$$\|u(t)\|_{H^2 \cap H_0^1} + \|w(t)\|_{H^3 \cap H_0^2} + \|\theta(t)\|_{H^2 \cap H_0^1} \leq M(T), \ \forall t \in [0, T].$$

Demostración. De la ecuación inicial, para las oscilaciones longitudinales, tenemos

$$\|u\|_{H^2 \cap H_0^1}^2 \leq M(T) + CE(0). \tag{4.5}$$

Por otro lado, para la variable w, de la ecuación inicial, tenemos

$$(w_{xx}, \psi_{xx}) = (-w_{tt}, \psi) + (-w_{xtt}, \psi_x) + (-w_x(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2), \psi_x) + (\theta_x, \psi_x), \ \forall \psi \in H_0^2.$$

Entonces de la definición de $\tilde{g}$, tenemos

$$\|w\|_{H^3 \cap H_0^2} \leq \|w_{tt}\|_{H_0^1} + \|g\|_{L^2},$$

es decir

$$\|w\|_{H^3 \cap H_0^2} \leq C(\|w_{tt}\|_{H_0^1} + \|\mathcal{B}\theta\|_{H_0^1} + \|\tilde{g}\|_{H_0^1})$$
$$\|w\|_{H^3 \cap H_0^2} \leq \|w_{tt}\|_{H_0^1} + \left\|w_x(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2)\right\|_{L^2}.$$

Usando los resultados de productos de espacios de Sobolev tenemos

$$\left\|w_x(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2)\right\|_{L^2} \leq C\|w_x\|_{H_0^1}\left\|u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right\|_{L^2} \leq CE(0)^{\frac{1}{2}}\, E(0)^{\frac{1}{2}}.$$

Por lo tanto se tiene que

$$\|w\|_{H^3 \cap H_0^2} \leq M(T) + CE(0) \tag{4.6}$$

Luego de (4.5) y (4.1) en conjunción con estimativas sobre la función θ y el operador $\mathcal{B}$ se sigue el resultado enunciado.

5. UNICIDAD Y DEPEDENCIA CONTINUA DE LAS SOLUCIONES

Esta se sigue directamente del método de la energía, para tal ver [8].

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] **Adams R. A.** *Sobolev spaces.* Academic Press. New York (1975).

[2] **Brézis H.** *Análisis Funcional. Teoría y Aplicaciones.* Alianza Editorial, Madrid (1984).

[3] **Benabdallah A. and Teniou D.** *Exponential stability of a von Karmán model with thermal effects.* Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 1998, N° 07. pp. 1-13, (1998).

[4] **Cazenave T. and Haraux A.** *Introduction aux problemes d' évolution semi-linéaires.* Mathematics & Applications, Éditions ELLIPSES, Paris (1990).

[5] **Haraux A.** *Semi-Linear hyperbolic problems in bounded domains.* Mathematical Reports, Hardwood, London (1987).

[6] **Lagnese L.** *Boundary stabilization of thin plates.* SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, (1989).

[7] **Lagnese J. E. and Leugering G.** *Uniform stabilization of a nonlinear beam by nonlinear boundary feedback.* Journal of Differential Equations. 91, 355-388 (1991).

[8] **Luyo J.** *sobre una ecuación no lineal de viga,* Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Tesis de Licenciatura. Lima (2004).

[9] **Puel J. P. and Tucsnak M.** *Global existence for the full von Karmán system.* Appl. Math. Optim. 34: 139-160 (1996).

[10] **Simon J.** *Compact sets in the spaces* $L^p(0, T; B)$. Annali di Matematica Pura ed Applicata. (V) Vol. CXLVI, (1987).

[11] **Von Karmán T.** *Festigkeitprobleme in Maschinenbau,* Encyklopedie der Mathemastichen Wissenschaften 4, pp. 314-385, (1910).

[12] **Kesavan S.** *Topics in functional analysis and applications,* J. Wiley & sons, Kesavan. (1989).

[13] **Lasiecka I.** *Uniform Stability of a full von von Karmán system with nonlinear boundary feedback.* SIAM J. Control Optim. 36, 4, pp. 1376-1422, (1998).

[14] **Lasiecka I. and Benabdallah A.** *Exponential decay rates for a full von Karmán thermoelasticity system with nonlinear thermal coupling,* ESAIM - Control, Optimization and Calculus of Variations: Proceedings. Vol 8, pp. 13-88, (2000).

[15] **Magenes J. L. and Magenes E.** *Problems aux limites non homogenes et applications.* Vol. I. DUNOD, Paris (1968).

[16] **Pazy A.** *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Applied Mathematics Sciences, Springer Verlag, New York, (1983).

[17] **Perla Menzala G. and Zuazua E.** *Energy decay rates for the von Karmán system of thermoelastic plates.* Differential and Integral Equations. Vol 11, N° 5, pp. 755-770, (1998).