Un problema de transmisión para la viga Euler-Bernoulli con relación constitutiva de Kelvin-Voigt

A transmission problem for the Beam Euler-Bernoulli with constitutive relationship of Kelvin-Voigt

Alfonso Pérez Salvatierra[1], Víctor Tarazona Miranda[2], Marco Rubio Gallarday[3], Juan Raymundo Fernández[4], Zoraida Huamán Gutiérrez[5], Victoriano Yauri Luque[6].

1 Docente Principal a TC de la Facultad de Ciencias Matemática del Departamento Académico de Matemática, Docente Investigador del Instituto de Investigación de la FCM , Doctor en Ciencias doctorado en UFRJ - Brasil, Maestría en Matemática Pura obtenido en la UNMSM – Perú. Publicaciones realizadas a nivel Nacional e Internacional. Past Decano, actual Director de la UPG – FCM UNMSM, con conocimiento de varios idiomas.

2 Docente Asociado a TC de la Facultad de Ciencias Matemática del Departamento Académico de Matemática, investigador del Instituto de Investigación de FCM, con estudios de maestría concluidos y por optar el Grado de Mg en matemática pura, con estudios y conocimiento de idiomas.

3 Docente Asociado a TC de la Facultad de Ciencias Matemática del Departamento Académico de Matemática, investigador del Instituto de Investigación de FCM, con estudios de maestría concluidos y por optar el Grado de Mg en matemática pura, con estudios y conocimiento de idiomas.

4 Docente Auxiliar a TP de la Facultad de Ciencias Matemática del Departamento Académico de Matemática, investigador del Instituto de Investigación de FCM, con estudios de maestría concluidos y por optar el Grado de Magíster en Filosofía mención en Epistemología, y conocimiento de idiomas.

5 Docente Asociado a TP de la Facultad de Ciencias Matemática del Departamento Académico de Estadística, investigadora del Instituto de Investigación de FCM, con estudios de maestría concluidos y por optar el Grado de Magíster en Bioestadística, con estudios y conocimiento de idiomas.

6 Docente Asociado a TC de la Faculta de Ciencias Matemática del Departamento Académico de Matemática, investigador del Instituto de Investigación de FCM, con estudios de maestría concluidos y por optar el Grado de Mg en matemática pura, con estudios y conocimiento de idiomas.

Resumen

Nuestro principal objetivo es obtener la existencia y unicidad de la solución y el decaimiento exponencial de la energía asociada al sistema de un problema de transmisión para el desplazamiento longitudinal de una viga Euler-Bernoulli, donde una parte de la viga es de material viscoelástico con relación constitutiva de Kelvin-Voigt representado por

$$(*)\left|\begin{array}{ll} u_{tt}-\alpha u_{xx}-\gamma u_{txx}+u_{tx}=0\,, & en\ \ (0,L_0)\times(0,\infty) \\ v_{tt}-\beta v_{xx}+v_{tx}\qquad\quad =0\,, & en\ \ (L_0,L)\times(0,\infty) \\ u(0,t)=v(L,t)=0\,, & t>0,\ \ cond.\ de\ frontera \\ u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x)\ \ ; & x\in(0,L_0),\ \ datos\ iniciales \\ v(x,0)=v_0(x),\quad v_t(x,0)=v_1(x)\ \ ; & x\in(L_0,L),\ \ datos\ iniciales \\ u(L_0,t)=\ v(L_0,t)\,,\quad t>0\,, & cond.\ de\ transmisión \\ \alpha u_x(L_0,t)\ =\ \beta v_x(L_0,t),\ \ t>0, & cond.\ de\ transmisión \\ u_{tx}(L_0,t)=0\,,\quad t>0\,, & cond.\ de\ compatibilidad \end{array}\right.$$

Palabras clave

Problema de Transmisión, viga Euler Bernoulli, comportamiento asintótico

Abstract

Our main goal in this paper is to obtain the existence and uniqueness of the solution and the exponential decay of the energy associated with the system of a problem of transmission for longitudinal movement of a beam Euler-Bernoulli, where a part of the beam is of material viscoelastic with constitutive relation of Kelvin-Voigt represented by,

$$(*)\left|\begin{array}{ll} u_{tt}-\alpha u_{xx}-\gamma u_{txx}+u_{tx}=0\,, & en(0,L_0)\times(0,\infty) \\ v_{tt}-\beta v_{xx}+v_{tx}=0\,, & en(L_0,L)\times(0,\infty) \\ u(0,t)=v(L,t)=0\,, & t>0,\ \ cond.\ boundary \\ u(x,0)=u_0(x),\qquad u_t(x,0)=u_1(x)\ \ ; & x\in(0,L_0),\ \ initial\ data \\ v(x,0)=v_0(x),\qquad v_t(x,0)=v_1(x)\ \ ; & x\in(L_0,L),\ \ initial\ data \\ u(L_0,t)=\ v(L_0,t)\,,\quad t>0\,, & cond.\ transmission \\ \alpha u_x(L_0,t)\ =\ \beta v_x(L_0,t),\ \ t>0, & cond. transmission \\ u_{tx}(L_0,t)=0\,,\quad t>0\,, & cond. compatibility \end{array}\right.$$

Key words:

Transmission problem, Euler-Bernoulli beam, asymptotic behavior

1. Introducción

Consideremos un objeto elástico de longitud L. Sea el intervalo $[0,L]$ configuración referente de una viga y $x \in [0,L]$ denotará su punto material. Nosotros denotaremos por $u(x,t)$ el desplazamiento longitudinal de la viga. Supongamos que el estrés σ es de tipo de cambio, es decir,

$$\sigma = \alpha u_x + \gamma u_{xt} + u_t \quad con \quad \gamma > 0$$

Entonces, la ecuación que gobierna el movimiento es propuesto por

$$u_{tt} - \alpha u_{xx} - \gamma u_{txx} + u_{tx} = 0 \quad en \quad (0,L)\times(0,\infty) \qquad (1.1)$$

Suponiendo que la viga se mantiene fija en ambos extremos, $x=0$ y $x=L$, tenemos las siguientes condiciones de fronteras.

$$0,t) = 0, \qquad u(L,t) = 0$$

De sumo trabajaremos con el sistema (*), que enumeremos con (1.2) la primera fila hasta la última fila con (1.9), respectivamente:

Ahora observemos que en la ecuación (1.1) la viscosidad se distribuye de manera uniforme en toda la viga. Sin embargo, es deseable en la práctica, el caso en el que la viscosidad es activa solamente en una parte de la viga. En este caso, es importante saber si la disipación se transmite y además si es lo suficientemente fuerte para estabilizar el sistema en su conjunto.

Con el fin de resolver esta situación se considera el siguiente modelo en el cual una parte de la viga es de un material viscoelástico con relación constitutiva de Kelvin–Voigt, dadas en las ecuaciones (1.2) - (1.9).

Esta clase de problemas es conocido como de transmisión. Una cuestión importante planteada por el problema de transmisión y el problema con disipación localmente distribuida, es el comportamiento asintótico de las soluciones. Se pregunta

¿La solución tiende a cero uniformemente? Si es este el caso, ¿cuál es la tasa de decaimiento?

Existen muchos trabajos sobre los problemas de transmisión de tipo Timoshenko y viscoelásticas donde se analiza la existencia y unicidad de soluciones y además su estabilidad exponencial del semigrupo asociado al sistema, [11, 12]. En los problemas de tipo Timoshenko con amortiguamiento en la frontera del tipo memoria y otros con amortiguamiento local interno, se pueden ver en [13, 14, 15, 16, 17, y 18].

En [7] se estudia el problema de las vibraciones longitudinales y transversales de una viga sujetada en los extremos, y con amortiguamiento localmente distribuido. Se ha demostrado que cuando la amortiguación viscoelástica se distribuye solo en un subintervalo en el interior del dominio, la estabilidad exponencial es válida para el movimiento transversal; pero no para el movimiento longitudinal.

En este punto es crucial la diferencia entre la formulación de problemas de transmisión y problemas con amortiguamiento localmente distribuido. Mientras que en el primer caso, las condiciones de transmisión desempeñan un papel decisivo constitutivo de la forma en que las partes del cuerpo se mezclan unos con otros, en el segundo, solo se expresa por las discontinuidades en los coeficientes de la ecuación. Para más información sobre un problema de transmisión en general consultar [4].

La estabilidad exponencial del problema de transmisión para ondas con amortiguamiento por fricción fue tratada en [2]. Para el sistema de Timoshenko fue tratada en [12]; el decaimiento exponencial en general de las soluciones para el problema de transmisión de ondas viscoelásticas con memoria fue tratado en [13 y 8]. Se prueba la estabilidad uniforme para la ecuación de ondas con amortiguamiento viscoelásticas lisas aplicadas justo sobre la frontera.

En el presente trabajo se aborda las preguntas anteriores al sistema (1.2) – (1.9), siguiendo el esquema planteado en [19]. Se demuestra que la energía decae exponencialmente, es decir, la estimación

$$E(t) \le CE(0)e^{-wt}, \quad C>0, \quad w>0, \quad \forall\, t>0$$

se cumple para la energía total E(t) del sistema. Esto es equivalente, ver [15] a establecer la estabilidad exponencial para el Semigrupo S(t) generada por el sistema, es decir,

$$\|S(t)\| \le CE(0)e^{-wt}, \quad C>0, \quad w>0, \quad \forall\, t>0$$

La idea central es explorar el carácter disipativo del generador infinitesimal del Semigrupo y hacer uso de un teorema debido a Gearhart [5] y Prüss [10]. Es en este punto que las condiciones de transmisión hacen la diferencia entre las formulaciones de los problemas con amortiguamiento localmente distribuidos y problema de transmisión.

Por lo tanto, nuestro resultado no contradice lo obtenido en [7].

Este tipo de preguntas para las ondas viscoelásticas con memoria se estudia en [14], para amortiguamiento viscoelástica y friccional la ecuación de onda semilinial son estudiados en [3] y para la viga de Timoshenko con amortiguamiento viscoelástica y memoria son estudiados en [12].

Uno de los grandes avances en el estudio del comportamiento asintótico de la energía asociado al sistema, es hacer ver que este estudio es equivalente a estudiar la estabilidad exponencial del semigrupo asociado al sistema, ver [9]. Y la forma como plantearemos nuestro estudio de investigación es proponer el Problema de Cauchy Abstracto equivalente al sistema en estudio y luego estableceremos todas las condiciones necesarias para poder aplicar el Teorema de Lummer – Phillips para garantizar la existencia y unicidad de solución; luego, para obtener la estabilidad exponencial del semigrupo asociado al sistema seguiremos la orientación dada por Z. Liu & S. Zheng [9].

El trabajo está organizado de la siguiente manera: Primero haremos algunas definiciones y resultados preliminares que estaremos refiriéndo dentro del desarrollo del presente trabajo de investigación; luego estableceremos los espacios funcionales donde se encontrará la solución única del sistema en estudio y finalmente estudiamos la estabilidad exponencial del semigrupo generado por el sistema.

2. Métodos y técnicas utilizados

Para poder obtener los resultados de nuestro propósito, se ha utilizado entre otras técnicas lo siguiente:

1.- Formulación variacional del problema.

2.- Método de la energía.

3.- Introducción de operadores multiplicativos.

4.- Introducción de operadores integrales.

5.- Técnicas de la teoría de semigrupos.

6.- Técnicas de las inmersiones de Sobolev.

7.- Técnicas del uso del semigrupo S(t) del sistema para hallar su estabilidad.

3. Preliminares

En el presente trabajo consideramos un problema de transmisión para el desplazamiento longitudinal de una viga Euler-Bernoulli, donde una parte pequeña de la viga es hecha de un material viscoelástica representado por el sistema (1.2)-(1.9).

Daremos a continuación algunas definiciones y resultados importantes:

Sea $p \geq 1$, denotaremos con $L^p(\Omega)$ a la clase de todas las funciones medibles u , para las cuales es $|u|^p$ una función integrable sobre Ω.

En $L^p(\Omega)$ se define la norma,

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} ; 1 \leq p < \infty,$$

Con esta norma $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach.

Cuando $p = 2, L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con producto interno,

$$(u, v) = \left(\int_\Omega u(x)\bar{v}(x)dx \right) \text{ y norma} \|u\| = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Sean Ω un dominio acotado o no de $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$ y $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < \infty$

Definición: Denotaremos por $W^{m,p}(\Omega)$ el espacio de Sobolev constituidos por las funciones de $L^p(\Omega)$ que poseen derivadas en el sentido de las distribuciones hasta de orden m, pertenecientes a $L^p(\Omega)$, dotada de la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p_{(\Omega)}} \right)^{\frac{1}{p}} \text{ y si } p = 2,\ W^{m.2}(\Omega) = H^m(\Omega)$$

Definición: Sea L(E) el álgebra de los operadores lineales acotados de E. Se dirá que una aplicación $S : \mathbb{R}^+ \to L(E)$ es un semigrupo de operadores lineales acotados de E sí:

S (0) = I, donde I es el operador identidad de E,

$S(s)\circ S(t)=S(s+t);\ \forall\, t,s\in\mathbb{R}^+$

Diremos que el simigrupo S es de clase C_0 si además cumple

$$Lim_{t\to 0^+}\left\|\left(S(t)-I\right)x\right\|=0,\ \forall\ x\in E$$

Definición: Sea H un espacio de Hilbert. Un operador $A:H\to H$ es disipativo si

$$\operatorname{Re}(AU,U)_H\leq 0,\quad \forall\, U\in D(A).$$

Teorema 1: Sea H un espacio de Hilbert y $S(t)$ el semigrupo generado por A. Entonces S es un semigrupo de contracciones si, y solo si, A es disipativo.

Demostración (ver Pazy [20]).

Teorema 2: (Hille – Yosida) Un operador A lineal, no acotado es un generador infinitesimal de un semigrupo C_0 de contracciones si y solo si

- A es cerrado y $\overline{D(A)}=H$
- El conjunto resolvente $\rho\left(A\right)$ de A contiene $\mathbb{R}^+$ y para todo $\lambda>0$, es válido

$$\left\|\left(\lambda I-A\right)^{-1}\right\|\leq\frac{1}{\lambda}$$

Demostración (ver Muñoz [15])

Teorema 3: (Lummer- Phillips) Sea A un operador lineal con dominio denso en H. Entonces:

- Si A es disipativo y existe $\lambda_0>0$ tal que $\operatorname{Im}\left(\lambda_0 I-A\right)=H,$ entonces A es el generador infinitesimal de un semigrupo C0 de contracciones.
- Si A es el generador infinitesimal de un semigrupo C_0 de contracciones sobre H, entonces $\operatorname{Im}\left(\lambda I-A\right)=H,$ para todo $\lambda>0$ y A es disipativo.

Demostración (ver Muñoz [15])

A continuación definiremos los espacios funcionales donde se encuentran la solución única del sistema planteado (*), definimos por

$$V_1=\left\{\,u\in H^1(I_1):u(0)=0\,\right\}\quad I_1=(0,L_0)$$

$$V_2=\left\{\,v\in H^1(I_2):v(L)=0\,\right\}\quad I_2=(L_0,L)\ \ y$$

$$\mathcal{H}=\left\{\left(u^1,v^1,u^2,v^2\right)^t:u^i\in V_i, v^i\in L^2(I_i)\,,\, i=1,2\right\}$$

En $\mathcal{H}$ consideramos el siguiente producto interno,

$$\left\langle U^1,U^2\right\rangle=\int_0^{L_0}(\alpha\, u_x^1\, u_x^2+v^1v^2)\,dx+\int_{L_0}^{L}(\beta\, z_x^1\, z_x^2+w^1w^2)\,dx$$

Donde , $U^i=\left(u^i,\,v^i,\,z^i,\,w^i\right)^t\in\mathcal{H},\ i=1,2$

4.- Existencia, unicidad de soluciones y estabilidad exponencial

Haciendo el cambio de variable en el sistema (1.2)-(1.3)

$$z=u_t\quad, w=v_t$$

Obtenemos los sistemas equivalentes:

$$\begin{aligned} u_t &= z \\ z_t &= \alpha u_{xx} + \gamma u_{txx} - u_{tx} \\ v_t &= w \\ w_t &= \beta v_{xx} - v_{tx} \end{aligned} \quad \equiv \quad \begin{aligned} u_t &= 0u + Iz + 0v + 0w \\ z_t &= \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \left(\gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} z - \frac{\partial}{\partial x} z \right) + 0v + 0w \\ v_t &= 0u + 0z + 0v + Iw \\ w_t &= 0u + 0z + \beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} v - \frac{\partial}{\partial x} w \end{aligned} \quad \equiv$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ z_t \\ v_t \\ w_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \left(\gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & \beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ z \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

Luego, tenemos el Problema de Cauchy Abstracto siguiente, equivalente al sistema (*):

$$\left| \begin{aligned} U_t &= AU \\ U(0) &= U_0 \end{aligned} \right.$$

Donde el operador A y las condiciones iniciales son dados por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \left(\gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & \beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} , \quad U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

$A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ con dominio,

$$D(A) = \left\{ \left(u^1, v^1, u^2, v^2 \right) \in \mathcal{H} : u^i \in V_i \cap H^2(I_i), v^i \in V_i , \alpha u_x^1 + \gamma v_x^1 - u_t \in H^1\left(I_1\right), \ i = 1,2 \right\}$$

Con $I_1 = \left(0, L_0\right), \quad I_2 = \left(L_0, L\right)$

De la construcción del espacio de funciones y de la teoría de espacio de Sobolev, se sigue que D(A) es denso en $\mathcal{H}$.

Considerando:

$u_{tx}\left(x,t\right)u_t \geq 0, \quad \forall\, x \in \left(0, L_0\right), \forall\, t > 0 \quad y \quad v_{tx}\left(x,t\right)v_t \geq 0, \quad \forall\, x \in \left(L_0, L\right), \forall\, t > 0$

Se tiene la siguiente afirmación:

Afirmación: El operador $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es disipativo

En efecto, de la definición del producto interno dado en $\mathcal{H}$ se tiene:

$$\langle AU, U\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} u_t \\ \alpha u_{xx} + \gamma u_{txx} - u_{tx} \\ v_t \\ \beta v_{xx} - v_{tx} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ u_t \\ v \\ v_t \end{pmatrix} \right\rangle = \int_0^{L_0} \left(\alpha u_{tx} u_x + \alpha u_{xx} u_t + \gamma u_{txx} u_t - u_{tx} u_t \right) +$$

$$\int_{L_0}^{L} \left(\beta v_{tx} v_x + \beta v_{xx} v_t - v_{tx} v_t \right) dx$$

Considerando las condiciones iniciales, condición de compatibilidad y la condición de transmisión obtenemos,

$$\langle AU, U\rangle = -\gamma \int_0^{L_0} |u_{tx}|^2 dx - \int_0^{L_0} u_{tx} u_t dx - \int_{L_0}^{L} v_{tx} v_t dx \leq 0 \qquad (3.1)$$

Por lo tanto, el operador A es disipativo.

Calcularemos formalmente su energía total del sistema (1.2)-(1.9),

multiplicando a la ecuación (1.2) por u_t ; utilizando las condiciones iniciales y condiciones de compatibilidad, obtenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{L_0} |u_t(t,x)|^2 dx + \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{d}{dt}\int_0^{L_0} |u_x(t,x)|^2 dx = -\gamma \int_0^{L_0} |u_{tx}(t,x)|^2 dx + \alpha u_t(L_0) u_x(L_0) \qquad (3.2)$$

Ahora multiplicando a la ecuación (1.3) por v_t y utilizando las condiciones iniciales,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{L_0}^{L} |v_t(t,x)|^2 dx + \left(\frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{d}{dt}\int_{L_0}^{L} |v_x(t,x)|^2 dx = -\beta\, v_t(L_0) v_x(L_0) \qquad (3.3)$$

Sumando (3.2) y (3.3) obtenemos,

$$\frac{d}{dt}\left\{ \frac{1}{2}\int_0^{L_0} |u_t|^2 dx + \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\int_0^{L_0} |u_x|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{L_0}^{L} |v_t|^2 dx + \left(\frac{\beta+1}{2}\right)\int_{L_0}^{L} |v_x|^2 dx \right\} =$$

$$-\beta\, v_t(L_0) v_x(L_0) - \gamma \int_0^{L_0} |u_{tx}|^2 dx + \alpha\, u_t(L_0)\, u_x(L_0)$$

De la condición de transmisión y definiendo la energía total del sistema (1.2)-(1.9) por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^{L_0} |u_t|^2 dx + \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\int_0^{L_0} |u_x|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{L_0}^{L} |v_t|^2 dx + \left(\frac{\beta+1}{2}\right)\int_{L_0}^{L} |v_x|^2 dx$$

Se tiene,

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\gamma \int_0^{L_0} |u_{tx}(t,x)|^2 dx \leq 0 \qquad (3.4)$$

Y definiendo la energía en cada parte $I_1 = (0, L_0)$, $\quad I_2 = (L_0, L)$ por

$$E_1(t)=\frac{1}{2}\int_0^{L_0}\left|u_t(t,x)\right|^2dx+\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\int_0^{L_0}\left|u_x(t,x)\right|^2 dx$$

$$E_2(t)=\frac{1}{2}\int_{L_0}^{L}\left|v_t(t,x)\right|^2dx+\left(\frac{\beta+1}{2}\right)\int_{L_0}^{L}\left|v_x(t,x)\right|^2 dx$$

El resultado (3.4), nos dice que la energía asociada al sistema (1.2)-(1.9), es decreciente.

Teorema 4: El operador A genera un C_0 - semigrupo de contracciones $S(t)=e^{At}$

Demostración

Para cualquier

$F=\left(f^1 \quad f^2 \quad f^3 \quad f^4\right)^t \in \mathcal{H}$

Consideramos la ecuación $AU=F$, es decir,

$$u_t=f^1\in H^1(I_1) \qquad (3.5)$$

$$\alpha u_{xx}+\gamma u_{txx}-u_{tx}=f^2\in L^2(I_1) \qquad (3.6)$$

$$v_t=f^3\in H^1(I_2) \qquad (3.7)$$

$$\beta v_{xx}-v_{tx}=f^4\in L^2(I_2) \qquad (3.8)$$

Considerando (3.5)-(3.8) y la observación de la regularidad de la tensión y como se definió el D(A) se obtiene

$\alpha u_{xx}=f^2-\gamma f^1_{xx}+f^1_x\in L^2(I_1)$

Así, por los resultados estándar de la teoría de ecuaciones elípticas concluimos que,$u\in H^2(I_1)$. Entonces, obtenemos una única solución

$U=\left(u \quad u_t \quad v \quad v_t\right)^t \in \mathcal{H}$

Tal que $U\in D(A),\ \|U\|\le k\|F\| \quad para\ k>0$ y satisface (3.5)-(3.8). Así $0\in\rho(A)$, conjunto resolvente de A, y entonces, resulta que A es invertible y A-1 es un operador lineal limitado.

Por el teorema de la aplicación contracción, el operador $\lambda I-A=A\left(\lambda A^{-1}-I\right)$ es invertible para $0<\lambda<\left\|A^{-1}\right\|^{-1}$. Por lo tanto, se sigue del teorema de Lummer-Phillips que A es el generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo de contracción $S(t)=e^{At}$.

De la teoría de semigrupo se sigue que $U(t)=e^{At}U_0$, es la única solución del sistema (1.2)-(1.9), en la clase

$U\in C^0\left([0,\infty);D(A)\right)\cap C^1\left([0,\infty);H\right)$

Con el fin de demostrar el decaimiento exponencial vamos a utilizar los siguientes teoremas.

Teorema 5: Sea $S(t)=e^{At}$ C_0 -semigrupo de contracción en un espacio de Hilbert. Entonces, $S(t)$ es exponencialmente estable, si, y solo si,

$$i\mathbb{R}=\{i\beta;\beta\in\mathbb{R}\}\subset\rho(A) \quad y \quad \left\|\left(\lambda I-A\right)^{-1}\right\|\le C,\ \forall\lambda\in i\mathbb{R}$$

Demostración

Este resultado es debido a L. Gearhart y su prueba se puede ver en [5] o en Huang [6] y Prüss [10].

Ahora, utilizando el criterio de estabilidad debido a Gearhart probamos el resultado principal de este trabajo.

Teorema 6: El C_0- semigrupo de contracciones $S(t)=e^{At}$ generado por A es, exponencialmente estable.

Demostración

Desde que $0\in\rho(A)$ entonces, para cualquier β con $|\beta|<\left\|A^{-1}\right\|^{-1}$ el operador $i\beta-A=A\left(i\beta A^{-1}-I\right)$ es invertible y

$\left\|(i\beta-A)^{-1}\right\|$ es una función continua para $\beta\in\left(-\left\|A^{-1}\right\|^{-1},\left\|A^{-1}\right\|^{-1}\right)$

Usaremos el método de la contradicción, para ello supongamos que,

$\{i\beta;\,\beta\in\mathbb{R}\}\subset\rho(A)$ no se cumple.

Entonces, existe $\omega\in\mathbb{R}$ con $\left\|A^{-1}\right\|^{-1}\leq\omega<\infty$ tal que

$$\{i\beta;\,|\beta|<|\omega|\}\subset\rho(A)\ \text{ y el }\ Sup\left\{\left\|(i\beta-A)^{-1}\right\|;|\beta|<|\omega|\right\}=\infty .$$

Por lo tanto, existe (β_n) sucesión en $\mathbb{R}$ tal que $\beta_n\to\omega,\ \beta_n<\omega$

Y una sucesión de funciones complejas $U_n\in D(A)$ tal que $\|U_n\|=1$ en $\mathcal{H}$ y

$\left\|(i\beta_n-A)U_n\right\|\to 0.$

Tomando el producto interno de $(i\beta-A)U_n$ con U_n obtenemos $i\beta_n\|U_n\|^2-\langle AU_n,U_n\rangle\to 0$

Ahora de (3.4) obtenemos

$$i\beta_n\|U_n\|^2+\gamma\int_0^{L_0}\left|v_{n,x}^1\right|^2dx\to 0 \tag{4.1}$$

Tomando la parte real, obtenemos

$$\gamma\int_0^{L_0}\left|v_{n,x}^1\right|^2dx\to 0 \tag{4.2}$$

De (4.2) en (4.1) podemos deducir que,

$$i\beta_n\|U_n\|^2\to 0 \tag{4.3}$$

Observando que $\beta_n\to\omega$, $|\beta_n|<|\omega|$, podemos concluir que

$\|U_n\|\to 0$, lo cual contradice a $\|U_n\|=1$.

Por consiguiente se tiene $\{i\beta;\,\beta\in\mathbb{R}\}\subset\rho(A)$ una parte del teorema 5.

Faltaría la segunda parte del teorema 5. Nuevamente por el absurdo, supongamos que,

$\left\|(\lambda I-A)^{-1}\right\|\leq C,\ \forall\,\lambda\in i\mathbb{R}$ no se cumple.

Entonces, existe una sucesión de funciones vectoriales (V_n) tal que

$$\left\|(i\beta_n - A)^{-1} V_n\right\| > n\|V_n\| \qquad (4.4)$$

Como $(V_n) \subset \mathcal{H}$ y $i\beta_n \in \rho(A)$, existe una única sucesión $U_n \in D(A)$ tal que,

$$i\beta_n U_n - AU_n = V_n \quad con \quad \|U_n\| = 1$$

Introduciendo $g_n = (i\beta_n - A)U_n$ y de (4.4) ob tenemos, $\| g_n \| \leq \frac{1}{n}$ y consecuentemente $g_n \to 0$

Al tomar el producto interno de g_n con U_n y usando (3.1) obtenemos

$$i\beta_n \|U_n\|^2 + \gamma \int_0^{L_0} \left|v_{n,x}^1\right|^2 dx = \langle g_n, U_n \rangle$$

Ahora, tomando la parte real y observando que (U_n) es limitada y que $g_n \to 0$ obtenemos que, $\gamma \int_0^{L_0} \left|v_{n,x}^1\right|^2 dx \to 0$.

Procediendo como en el caso anterior demostramos $\|U_n\| \to 0$ el cual es una contradicción, con esto se demuestra la segunda parte del teorema 5 y se concluye el teorema 6.

5. Conclusiones y recomendaciones

1. El presente trabajo resulta de agregar dos términos en el sistema planteado en el trabajo realizado por C.A. Raposo [20], que nos permite una mejor estabilidad exponencial al semigrupo asociado al sistema.
2. La técnica de usar la teoría de semigrupo para encontrar la estabilidad exponencial del semigrupo asociado al sistema en estudio es bastante reciente y este resultado contribuirá para que los investigadores se familiaricen mucho más con esta técnica.
3. Es muy recomendable seguir el tratamiento realizado en el presente trabajo para estudios de existencia y unicidad de solución, y el comportamiento asintótico de la energía asociada al sistema que, generalmente usan el método de Faedo-Galerkin, método de la teoría de semigrupos para el primero y para el segundo método de la energía, entre otros; Sin embargo es menos el trabajo a realizarse si estudiamos la existencia y unicidad de soluciones del sistema planteado y seguir estudiando la estabilidad exponencial con el semigrupo obtenido asociado al sistema en estudio.
4. Siempre existirán nuevos estudios con diferentes hipótesis que se le pueden agregar tanto en el mismo sistema planteado como también agregar hipótesis adicionales en datos de la frontera. Se recomienda utilizar esta técnica de los semigrupos para obtener el estudio completo de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales (existencia, unicidad de soluciones y comportamiento asintótico de la energía asociada al sistema) dado que es una vía más rápida para obtener los resultados deseados.

6.- Referencias bibliográficas

[1] Adams, R.A. Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.

[2] Bastos, W.D. C.A. Raposo. Transmission problem fo r waves with frictional damping. Electronic of Differential Equations, 2007 (2007), 1-10.

[3] Cavalcanti M.M. and H.P. Oquendo, Frictional versus viscoelastic damping in a semilinear wave equation. SIAM J. Control Optim. 42 (2003), 1310-1324.

[4] Dautray R., J.L. Lions, Mathematical Analysis and Numerical Methods for Sciences and Technology. Vol 1, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg, 1990.

[5] Gearhart, L. Spectral Theory for the Contractions Semigroups on Hilbert Spaces. Trans. of the American Mathematical Society, 236 (1978), 385-349.

[6] Huang, F. Characteristic Conditions for Exponential Stability of the Linear Dynamical System in Hilbert Space. Annals of Differential Equations. 1 (1985), 43-56

[7] Liu, K. Z. Liu, Exponential decay of the energy of the Euler-Bernoulli beam with locallydistributed Kelvin-Voigt damping, SIAM J. Control Optim. 36(3) (1998), 1086-1098.

[8] Liu K, B. Rao, Exponential stability for the wave equations with local Kelvin-

Voigdamping. Z. angew. Math. Phys. 57 (2006), 419-432.

[9] Liu Z., & S. Zheng; Semigroups Associated with Dissipative Systems, CRC Research NotesMathematics, Chapmam & Hall, 1999.

[10] Prüss J., On the Spectrumm of Co-semigroups. Trans. of the American Mathematical Society 284(1984) 847-857.

[11] Raposo C. A., W. D. Bastos, M.L. Santos. A transmission Problem for Timoshenko System. Computational and Applied Mathematics. 26 (2007), 215-234.

[12] Raposo C. A., The transmission problem for Timoshenko system of memory type. International Jounal of Modern Mathematics 3 (3) (2008), 271-293.

[13] Raposo C. A. General Decay of Solution for the Transmission Problem of Viscoelastic Waves with Memory. Advances in Differential Equation and Control Processes, 3 (2009), 103-114.

[14] Muñoz J.E., H. P. Oquendo, The Transmission problem of viscoelastic waves. Acta Applicanda Mathematic, 62 (2000), 1- 21.

[15] Muñoz Rivera, Estabilizacao de Semigrupos e Aplicacoes. Edit. Academia das Contas, Rio de Janeiro-Brasil 2008.

[16] Zheng S., Nonlinear parabolic Equation and Hyperbolic - Parabolic Coupled Systems, Pitman series Monographs and Survey in Pure and Aplied Mathematics, Longman, 1995.

[17] Liu Weijiu and G. Williams; The exponential stability of the problem of transmission of the wave Equation Bull. Austral. Math. Soc. Vol. 57(1) 305- 327 (1998).

[18] De Lima Santos M., Decay rates for solutions of Timoshenko system with a memory conditionat the boundary, Abstr. Appl. Anal. 7(10), (2002) 531- 546.

[19] Shi D.-H., D.-X. Feng, Exponential decay rate of the energy of a Timoshenko beam with locally distributed feedback, ANZIAM J. 44(2) (2002) 205-220.

[20] Raposo C. A., W.D. Bastos and J.A.J. Avila; A Transmission Problem for Euler-Bernoulli beam with Kelvin-Voigt Damping. Applied Mathematics & Information Sciences-AInternational Journal, 5(1) (2011), 17-28.

[21] Pazy, A., Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Applied Mathematical Sciences 44. Springer. (1983).