Artículos originales

theorēma
Vol 2, N° 3, pp.13-34 (UNMSM, Lima 2015)
ISSN 2312-6450

CIENCIAS MATEMÁTICAS

Operadores m-disipativos y existencia de solución de un modelo de transporte de electrones

M-dissipative operators and existence of solution of an electron transport model

Yolanda Santiago Ayala[1], Santiago Rojas Romero[2] y Teófanes Quispe Méndez[3]
Universidad Nacional Mayor de San Marcos

RESUMEN

En este artículo hacemos un estudio dando sutiles pruebas de algunos resultados de operadores disipativos, m-disipativos y perturbación de semigrupos. Demostramos también la existencia y unicidad de solución del modelo de transporte de electrones.

Palabras clave: Transporte de electrones, existencia de solución, ecuación de Schrödinger, mecánica cuántica, operadores disipativos.

ABSTRACT

In this article, we make a study, giving subtle proofs of some results of dissipative operators, m-dissipative operators and semigroups perturbation. Also, we demonstrated the existence and uniqueness of solution of an electrons transport model.

Keywords: Electrons transport existence of solution, Schrödinger equation, quantum mechanics, dissipative operators.

Recibido: 25/05/2015 *Aceptado: 17/07/2015*

1 Facultad de Ciencias Matemáticas, UNMSM, <ysantiagoa@unmsm.edu.pe>.
2 Facultad de Ciencias Matemáticas, UNMSM, <srojasr@unmsm.edu.pe>
3 Facultad de Ciencias Matemáticas, UNMSM, <tquispem@unmsm.edu.pe>.

1. Introducción

Se conoce que para el modelo: $i\beta u_t - \Delta u = 0$ con condiciones en la frontera de un dominio rectangular, usando el análisis espectral y Sturm-Liouville se obtiene su solución, citamos [2]. Entonces es aceptable pensar que se pueda obtener existencia de solución del modelo de transporte de electrones a través de un hilo metálico, la ecuación de Schrödinger:

$$(P)\left|\begin{array}{l} iu_t + \Delta u - \alpha u = 0 \\ u(x,0) = u_o(x) \end{array}\right.$$

considerando posibles α. En efecto, se consigue probar la existencia y unicidad de solución del problema de valor inicial (P), considerando α una función medible en R^n y para los casos cuando

$\alpha \equiv 0$ en R^n, o $\alpha \in L^\infty(R^n)$ $\alpha \in L^p(R^n)$ con $p > \frac{n}{2}$, $p \geq 2$ y $\alpha \geq 0$ en c.t.p. en R^n.

Podemos citar algunos trabajos relacionados para nuestro estudio, como son [1], [3], [4], [5] y [10].

Se sabe que la ecuación de Schrödinger fue desarrollada por el físico austriaco Erwin Schrödinger en 1925, ella describe la evolución temporal de una partícula no relativista. Esta ecuación es importante en la teoría de la mecánica cuántica. Schrödinger discute en detalle las relaciones entre la mecánica hamiltoniana y la óptica en 1926, ver [8] y [18]. Para el sustento físico podemos citar [7] y [20].

Citamos algunos trabajos de existencia vía semigrupos: [6], [9], [11]-[16] y [21], y nos apoyamos de algunos resultados de [17], [18] y [22].

Nuestro artículo está organizado como sigue. En la sección 2, enunciamos los métodos y técnicas usadas en este artículo. En la sección 3, enunciamos los resultados preliminares. En la sección 4, hacemos un estudio de operadores disipativos, su caracterización e importantes resultados que nos permitirán saber cuando un operador es generador de un semigrupo de contracción o grupo unitario respectivamente. En la sección 5, estudiamos la perturbación de semigrupos, dando sutiles pruebas. En la sección 6, probamos la existencia de solución de un modelo de transporte de electrones. En la sección 7, damos nuestras conclusiones y finalmente en la sección 8 listamos las referencias bibliográficas usadas.

2. Métodos y técnicas utilizadas

Para obtener los resultados de nuestro estudio, primeramente para la perturbación de operadores m- disipativos, hemos usado las siguientes técnicas y fundamentos:

1. Principios fundamentales del análisis funcional.
2. Teoría de operadores y teoría espectral.
3. Operadores simétricos y Autoadjuntos.
4. Desigualdades integrales.
5. Semigrupos de Operadores y el Teorema de Hille-Yosida.
6. Perturbación de Operadores acotados.

Y para la existencia de solución del modelo de transporte de electrones usamos:

1. Perturbación de Operadores disipativos.
2. Espacios de Sobolev modelados en $L^2(R^n)$.
3. Abordaje de existencia de solución vía Lumer-Phillips.
4. Teoría de Fourier y la desigualdad de Hausdorf-Young.

3. Preliminares

3.1 Operador autoadjunto

Definición 1 *Sea H un espacio de Hilbert y $A : D(A) \subset H \to H$ un operador tal que $\overline{D(A)} = H$. Diremos que A es **simétrico** si satisface $D(A) \subset D(A^*)$ y $A = A^*$ en $D(A)$. Esto es equivalente a que suceda $(Ax, y) = (x, Ay)$, $\forall x, y \in H$.*

Diremos que el operador simétrico A ***es autoadjunto*** si $D(A) = D(A^*)$. (Esto es, A es autoadjunto si $D(A) = D(A^*)$ y $A = A^*$).

Teorema 1 *Si A es simétrico y existe $\lambda_0 \in \rho(A) \cap R$ tal que $Im(\lambda_0 I - A) = H$, entonces A es autoadjunto.*

3.2 Algunas desigualdades

Teorema 2 (Hausdorff-Young) *Si $u \in L^p(R^n)$ y $1 \le p \le 2$ entonces $\hat{u} \in L^{p'}(R^n)$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$*

y $\|\hat{u}\|_{L^{p'}(R^n)} \le (2\pi)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \|u\|_{L^p(R^n)}$.

Prueba.- Ver [3].

Teorema 3 (Desigualdad generalizada de Hölder) *Sean $u_i \in L^{p_i}(R^n)$ con $p_i \ge 1$ para $i = 1, \ldots, k$*

satisfaciendo $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} \le 1$. Entonces

$$\prod_{i=1}^{k} u_i \in L^p(R^n) \quad y \quad \left\| \prod_{i=1}^{k} u_i \right\|_{L^p(R^n)} \le \prod_{i=1}^{k} \|u_i\|_{L^{p_i}(R^n)},$$

donde $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i}$.

3.3 El Teorema del Inverso

Teorema 4 *Sea $T \in L(E)$, donde E es un espacio de Banach. Si $\|T\| < 1$, entonces $\exists (I - T)^{-1} \in L(E)$*

y

$$(I-T)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} T^i = I + T + T^2 + T^3 + \dots$$

donde la serie es convergente en $L(E)$.
Prueba.- Ver [18].

3.4 Semigrupos de Operadores: El Teorema de Hille Yosida

Teorema 5 (Hille-Yosida) *Sea* $A: D(A) \subset X \to X$ *un operador lineal.* A *es el generador infinitesimal de un semigrupo de clase* C_o*:* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *si y solamente si*

(i) A es cerrado y $\overline{D(A)} = X$

(ii) $\exists M$ y w tal que, para cada $\lambda > w$ se tiene: $\begin{cases} \lambda \in \rho(A) \\ \left\| R(\lambda, A)^n \right\| \leq \dfrac{M}{(\lambda - w)^n}, \forall n \in N \end{cases}$.

En este caso: $\|S(t)\| \leq Me^{wt}$, $t \geq 0$.
Prueba.- Ver Pazy [10].

Teorema 6 *Sea* A *el generador infinitesimal de un semigrupo* C_o*:* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$*. Definimos*

$$B = aA + bI, \; a > 0$$

y un número complejo. Entonces B *es el generador infinitesimal de* $\left\{e^{bt} S(at)\right\}_{t\geq 0}$.
Prueba.- Ver [9].

4. Estudio sobre los operadores disipativos

Sea X un espacio de Banach y X^* su dual topológico.
Definición 2 *Para* $x \in X$ *definimos al* ***conjunto dualidad***

$$F(x) = \{x^* \in X^* \; y \; < x^*, x > = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}. \tag{1}$$

Entonces $F(x) \subset X^*$. Por otro lado, debido al **Teorema de extensión de Hanh Banach** (citamos [18]), para $x \in X$ sabemos que existe $x^* \in X^*$ tal que $< x^*, x > = \|x\|^2$ y $\|x^*\| = \|x\|$, luego $F(x) \neq \emptyset$.
Notación 1 $< x^*, x > = x^*(x) = < x, x^* >$.

Definición 3 *Un operador lineal* A *en un espacio de Banach* X *es* ***disipativo*** *si para cada* $x \in D(A)$ *existe* $x^* \in F(x)$ *tal que* $Re < Ax, x^* > \leq 0$.
El siguiente resultado es una caracterización de Operadores disipativos

Teorema 7 *Un operador lineal A es disipativo si y solamente si*

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda\|x\| \ \forall x \in D(A) \ \ y \ \ \lambda > 0. \tag{2}$$

Prueba.- Sea A disipativo, $\lambda > 0$ y $x \in D(A)$ entonces $\exists x^* \in F(x)$ tal que $Re < Ax, x^* > \leq 0$.
Así,

$$\|\lambda x - Ax\| \underbrace{\|x^*\|}_{=\|x\|} \geq |< \lambda x - Ax, x^* >| \geq Re < \lambda x - Ax, x^* > \tag{3}$$

$$Re\{\underbrace{\lambda}_{>0} \underbrace{< x, x^* >}_{=\|x\|^2} - < Ax, x^* >\} = \lambda\|x\|^2 \underbrace{-Re < Ax, x^* >}_{\geq 0} \geq \lambda\|x\|^2. \tag{4}$$

De estas dos desigualdades (3) y (4) obtenemos $\|\lambda x - Ax\|\|x\| \geq \lambda\|x\|^2$.
Luego si $x \neq 0$ entonces $\|\lambda x - Ax\| \geq \lambda\|x\|$. Si $x = 0$ se cumple (2).
Recíprocamente, sea $x \in D(A)$ satisfaciendo (2) i.e. $\|\lambda x - Ax\| \geq \lambda\|x\|$ para $\lambda > 0$.

Como $F(\lambda x - Ax) \neq \emptyset$ entonces existe $y_\lambda^* \in F(\lambda x - Ax)$ y normalizando, definimos $z_\lambda^* = \dfrac{y_\lambda^*}{\|y_\lambda^*\|}$,
luego, $\|z_\lambda^*\| = 1$.
Como $< y_\lambda^*, \lambda x - Ax > = \|\lambda x - Ax\|^2 = \|y_\lambda^*\|^2$ tenemos

$$< z_\lambda^*, \lambda x - Ax > = \|y_\lambda^*\| = \|\lambda x - Ax\|. \tag{5}$$

Usando (5) obtenemos

$$\lambda\|x\| \leq \|(\lambda I - A)x\| = < z_\lambda^*, \lambda x - Ax > = Re < z_\lambda^*, \lambda x - Ax >$$

$$= \lambda \underbrace{Re < z_\lambda^*, x >}_{\leq |< z_\lambda^*, x >| \leq \underbrace{\|z_\lambda^*\|}_{=1} \|x\|} - Re < z_\lambda^*, Ax > \tag{6}$$

$$\leq \lambda\|x\| - Re < z_\lambda^*, Ax > \ \ para \ \ \lambda > 0,$$

i.e. $Re < z_\lambda^*, Ax > \leq 0$.

Por otro lado, como $\underbrace{| Re < z_\lambda^*, Ax >|}_{-Re < z_\lambda^*, Ax >} \leq |< z_\lambda^*, Ax >| \leq \underbrace{\|z_\lambda^*\|}_{=1} \|Ax\| = \|Ax\|$
se tiene

$$-Re < z_\lambda^*, Ax > \leq \|Ax\|. \tag{7}$$

De (6) y usando (7) obtenemos

$$\lambda\|x\| \leq \lambda Re < z_\lambda^*, x > -Re < z_\lambda^*, Ax > \leq \lambda Re < z_\lambda^*, x > + \|Ax\|,$$

i.e. $Re < z_\lambda^*, x > \geq \|x\| - \dfrac{1}{\lambda}\|Ax\|$.

Usando el Teorema de **Banach Alaoglu** (ver [18]), existe $z^* \in X^*$ con $\|z^*\| \leq 1$ tal que $z^*_\lambda \quad \rightarrow \quad z^*$ en la topología débil *.

Como $Re < z^*_\lambda, Ax > \leq 0$ y $Re < z^*_\lambda, Ax > \rightarrow Re < z^*, Ax >$, desde que $< z^*_\lambda, Ax > \rightarrow < z^*, Ax >$, entonces $Re < z^*, Ax > \leq 0$.

Análogamente, como $Re < z^*_\lambda, x > \geq \|x\| - \frac{1}{\lambda}\|Ax\|$ y $Re < z^*_\lambda, x > \rightarrow Re < z^*, x >$, desde que $< z^*_\lambda, x > \;\rightarrow\; < z^*, x >$, entonces $Re < z^*, x > \geq \|x\|$.

Pero, $Re < x, z^* > \leq |< x, z^* >| \leq \|x\| \, \|z^*\| = \|x\|$.

Luego $Re < x, z^* > = |< x, z^* >| = \|x\|$, de donde se tiene que $< x, z^* > = Re < x, z^* >$. i.e.

$< x, z^* > = \|x\|$, esto nos permite observar que $z^*(\frac{x}{\|x\|}) = 1$, luego $\|z^*\| = 1$.

Definimos: $x^* = \|x\| z^*$

entonces, para $x \in D(A)$ se verifican los siguientes enunciados:

(i) $\|x^*\| = \|x\| . \underbrace{\|z^*\|}_{=1} = \|x\|$

(ii) $x^* \in F(x)$, i.e. $< x^*, x > = < \|x\| z^*, x > = \|x\| < z^*, x > = \|x\|^2$

(iii) $Re < Ax, x^* > = Re < Ax, \|x\| z^* > = Re \|x\| < Ax, z^* > \leq 0$.

Proposición 1 *Sea $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ un operador disipativo, asumimos que su dominio es denso. Si $Im(\lambda_0 I - A) = X$ para algún $\lambda_0 > 0$, entonces valen los siguientes enunciados:*

a) *A es cerrado*

b) $Im(\lambda I - A) = X$, $\forall \lambda > 0$.

Prueba.- Ver Pazy [10].

Teorema 8 (Lumer-Phillips, 1961) *Sea A un operador lineal con dominio $D(A)$ denso en X (i.e. $\overline{D(A)} = X$).*

a) Si A es disipativo y existe $\lambda_0 > 0$ tal que $Im(\lambda_0 I - A) = X$, entonces A es el generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_o de ***contracción*** *en X.*

b) Si A es el generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_o de ***contracción*** *en X, entonces*

i) $Im(\lambda I - A) = X$, $\forall \lambda > 0$,

ii) A es disipativo.

Además: Para cada $x \in D(A)$ y cada $x^* \in F(x)$ se verifica que $Re < Ax, x^* > \leq 0$.

Prueba.- $a)$ A disipativo implica $\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\|$ para $x \in D(A)$ y $\lambda > 0$, de ahí $\lambda I - A$ es inyectiva, entonces existe su inverso con dominio todo el espacio (desde que $\lambda I - A$ es sobreyectiva), que es lineal y **continua** i.e.

$$Para\ \lambda > 0,\ \underbrace{(\lambda I - A)^{-1}}_{R(\lambda,A)=} \in L(X)\ \ y\ además\ \|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

El Teorema de **Hille Yosida** nos garantiza que A es el generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_o de contracción en X .

$b)$ Por el Teorema de Hille Yosida tenemos que A es cerrado, $\overline{D(A)} = X$, $R^+ \subset \rho(A)$ y si $\lambda > 0$ entonces $\|R(\lambda, A)\| \leq \dfrac{1}{\lambda}$.

De esto obviamente se tiene que $Im(\lambda I - A) = X$, $\forall \lambda > 0$.

Nos resta mostrar que A **es disipativo**. Si $x \in D(A)$ y $x^* \in F(x)$ entonces

$$Re < T(t)x, x^* > \ \leq\ |< T(t)x, x^* >|\ \leq \underbrace{\|T(t)x\|}_{\leq\|T(t)\|\|x\|}\underbrace{\|x^*\|}_{\|x\|} \leq \|x\|^2.$$

Por otro lado,

$$< T(t)x - x, x^* > \ = \ < T(t)x, x^* > - < x, x^* > \ = \ < T(t)x, x^* > - \|x\|^2,$$

tomando la parte real, obtenemos

$$Re < T(t)x - x, x^* > \ = Re < T(t)x, x^* > - \|x\|^2 \leq 0,$$

multiplicandolo por $\frac{1}{t}$, para $t > 0$, obtenemos $Re < \dfrac{T(t)x - x}{t}, x^* > \ \leq 0$ y tomando el límite cuando $t \to 0^+$, conseguimos $Re < Ax, x^* > \ \leq 0,$ esto sucede para cada $x^* \in F(x)$.

Observación 1 *La versión del Teorema de Lumer-Phillips en el caso especial cuando X es un espacio de Hilbert fue obtenida por R. S. Phillips en 1959.*

Previamente enunciamos el siguiente lema que será útil en la prueba del Teorema 9.

Lema 1 *Sea X un espacio de Banach, $S : X \to X$ un operador lineal **continuo** tal que existe S^{-1} continuo. Sea $B \in L(X)$ tal que $\|B\| < \dfrac{1}{\|S^{-1}\|}$. Entonces $S + B$ es lineal continuo e inversible con inversa **continua**.*

Prueba.- En la prueba usamos el Teorema de contracción del punto fijo de Banach para mostrar que $S + B$ es sobreyectiva y por otro lado, usamos el Teorema del gráfico cerrado (ver [18]) para probar la continuidad de $(S + B)^{-1}$.

Teorema 9 *Sea $A: X \to X$ un operador lineal, disipativo y $\overline{D(A)} = X$. Si $0 \in \rho(A)$ entonces A es el generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_o de contracción.*

Prueba.- En la prueba usamos el lema previo y el Teorema de Lumer-Phillips. Esto es, primero tenemos que existe $A^{-1} \in L(X)$, y observamos que podemos escribir:

$$\lambda I - A = A(\underbrace{\lambda A^{-1}}_{B=}\underbrace{-I}_{S=}).$$

Como $\|B\| \leq \lambda \|A^{-1}\|$ y si tomamos $0 < \lambda < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$, entonces $\|B\| < 1$, recordemos que $\|-I\| = 1$, luego se satisface las hipótesis del Lema previo, por lo que obtenemos que $(\lambda A^{-1} - I)$ es lineal, continua con **inversa continua**.

Por lo que concluimos que existe $(\lambda I - A)^{-1} = (\lambda A^{-1} - I)^{-1} \circ A^{-1}$ continua, i.e. $\lambda \in \rho(A)$.
Por el teorema de Lumer-Phillips, tenemos que A es el generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_o de contracción.

Es mucho más frecuente usar el teorema 9 que el teorema 8, pues en la práctica con esto se reducen las cuentas. Otro resultado importante y muy usado es el siguiente corolario.

Corolario 1 *Sea A un operador lineal cerrado tal que $\overline{D(A)} = X$ (densamente definido). Si ambos A y A^* son disipativos entonces A es el generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_o de* ***contracción*** *en X.*

Prueba.- Debido al Teorema de Lumer-Phillips, basta mostrar que $Im(I - A) = X$.

Como A es disipativo y cerrado entonces $Im(I - A)$ es un subespacio cerrado de X.

Supongamos que $Im(I - A) \neq X$, entonces debido al **Teorema de Hanh Banach** (ver [18]) existe $x^* \in X^*$ tal que $x^* \neq 0$ y $x^*(Im(I - A)) = 0$, i.e. $< x^*, x - Ax > = 0$, $\forall x \in D(A)$.

De ahí que $< x^* - A^* x^*, x > = 0$, $\forall x \in D(A)$. La densidad de $D(A)$ en X nos conduce a

$$< x^* - A^* x^*, x > = 0, \ \forall x \in X.$$

Luego $x^* - A^* x^* = 0.$

Como A es disipativo tenemos $\underbrace{\|x^* - A^* x^*\|}_{=0} \geq \|x^*\|$ entonces $x^* = 0$, lo cual es absurdo. Por lo tanto $Im(I - A) = X$.

Como una aplicación de este corolario tenemos el teorema de Stone de caracterización de grupos. Previamente introduciremos la siguiente definición y resultado.

Definición 4 *Sea H un espacio de Hilbert. Diremos que un operador $V : H \to H$ es* ***Unitario*** *si $V^* = V^{-1}$.*

Antes de enunciar el teorema de caracterización de grupos, previamente precisamos de los dos siguientes resultados en un espacio de **Hilbert**:

a) A^* es cerrado

b) U es unitario $\Leftrightarrow$ $Im(U) = H$ y U es una isometría.

Teorema 10 (STONE) *El operador A es el generador infinitesimal de un* ***grupo*** *de clase C_o de operadores unitarios en un espacio de Hilbert H, si y solamente si iA es Autoadjunto.*

Prueba.- Si A es el generador infinitesimal de un grupo C_0 de operadores unitarios $\{U(t)\}_{t \in R}$ entonces A es densamente definido y para $x \in D(A)$ tenemos

$$-Ax = -\lim_{s\to 0^-}\frac{U(s)x-x}{s} = \lim_{t\to 0^+}\frac{U(-t)x-x}{t} = \lim_{t\to 0^+}\frac{U(t)^{-1}x-x}{t} = \lim_{t\to 0^+}\frac{U(t)^*x-x}{t} = A^*x$$

i.e. $A=-A^*$ y por consiguiente $(iA)^* = -iA^* = iA$, esto es iA es Autoadjunto.

Recíprocamente, si iA es autoadjunto entonces A es densamente definido y $\underbrace{(iA)^*}_{=-iA^*} = iA$, i.e. $-A^* = A$.

Sea $x\in D(A)$,

$$<Ax,x> = <x,A^*x> = <x,-Ax> = -<x,Ax> = -\overline{<Ax,x>}\ .$$

Sabemos que si z es un número complejo tal que $z=-\bar{z}$ entonces $Re\, z = 0$, aplicando esto obtenemos $Re<Ax,x> = 0 \ \ \forall x\in D(A)$, i.e. A es disipativo.

Como $A=-A^*$ tenemos $D(A)=D(A^*)$ y A cerrado, de la igualdad anterior tenemos $<x,A^*x> = -\overline{<x,A^*x>}$, que es equivalente a $<A^*x,x> = -\overline{<A^*x,x>}$ luego $Re<A^*x,x> = 0$ para todo $x\in D(A^*)$, i.e. A^* es disipativo.

De $A=-A^*$ tenemos $\underbrace{A^*}_{=-A} = -A^{**}$ i.e. $A=A^{**}$. Aplicamos el corolario 1 en ambos casos y obtenemos que A y A^*, respectivamente son generadores infinitesimales de un semigrupo de clase C_o de contracción en H. Denotemos por $\{U_+(t)\}_{t\geq 0}$ y $\{U_-(t)\}_{t\geq 0}$ los semigrupos de contracción cuyos generadores infinitesimales son respectivamente A y $A^*=-A$.

Definimos

$$U(t) = \begin{cases} U_+(t) & t\geq 0 \\ U_-(-t) & t\leq 0 \end{cases}.$$

Se verifica que $\{U(t)\}_{t\in R}$ es un grupo y como $I=U(t-t)=U(t)U(-t)$ tenemos $U(t)^{-1}=U(-t)$.

Como ambos semigrupos son de contracción entonces $\|U(t)\|\leq 1$ y $\|U(-t)\|\leq 1$ en consecuencia:

$$\|U(t)x\| \leq \underbrace{\|U(t)\|}_{\leq 1}\|x\| \leq \|x\|$$

$$\|x\| = \|U(0)x\| = \|U(-t)U(t)x\| \leq \underbrace{\|U(-t)\|}_{\leq 1}\|U(t)x\| \leq \|U(t)x\|$$

i.e. $\|U(t)x\| = \|x\|$, $\forall x\in H$, es decir $U(t)$ es una isometría. Por otro lado, sabemos que $Im(U(t)) = H$, luego podemos concluir que $U(t)$ es unitario.

Observación 2 *Si iA es Autoadjunto entonces A y $-A$ son generadores infinitesimales de Semigrupos de Contracción.*

5. Estudio sobre la Perturbación de Semigrupos

Teorema 11 (PERTURBACIÓN) *Sea* A *el generador infinitesimal de un semigrupo* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *de clase* C_o *sobre* X *,* B *un operador lineal continuo sobre* X *. Entonces* $A+B$ *es el generador infinitesimal de un semigrupo de clase* C_o*.*
Prueba.- Citamos [18]

Definición 5 *Diremos que un operador disipativo es* m ***-disipativo*** *si* $Im(I-A)=X$ *, i.e. si* $I-A$ *es sobreyectivo.*
Observación 3 *Fácilmente observamos:*
1. Si A *es disipativo entonces* μA *es disipativo* $\forall \mu > 0$*.*
2. Si A *es* m *-disipativo entonces* $Im(\lambda I - A) = X$ *,* $\forall \lambda > 0$*.*
En función a la definición de operadores m disipativos reescribimos el Teorema Lumer-Phillips del siguiente modo,
"Un operador lineal densamente definido es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracción si y solamente si es m **- disipativo".**

A continuación enunciamos y probaremos el teorema de perturbación para operadores m -disipativos.

Teorema 12 *Sean* A *y* B *operadores lineales en* X *de modo que* $D(A)\subset D(B)$ *y* $A+tB$ *es disipativo* $\forall t\in[0,1]$*. Si*

$$\|Bx\| \leq \alpha\|Ax\| + \beta\|x\| \quad \forall x\in D(A), \tag{8}$$

donde $0\leq\alpha<1$*,* $\beta\geq 0$ *y* $\exists t_o\in[0,1]$ *tal que* $A+t_oB$ *es* m *-disipativo, entonces* $A+tB$ *es* m *-disipativo* $\forall t\in[0,1]$*.*

Prueba.- Observemos que $D(A+t_oB)=D(A)$. Probaremos que si $A+t_oB$ es m-disipativo entonces existe $\delta>0$ tal que $A+tB$ es m-disipativo $\forall t\in[0,1]$ con $|t-t_o|\leq\delta$.
En efecto, si $A+t_oB$ es m-disipativo entonces $A+t_oB$ es disipativo y $I-(A+t_oB)$ es sobreyectiva. Que $A+t_oB$ sea disipativo implica

$$\|\{I-(A+t_oB)\}x\| \geq \|x\|, \forall x\in D(A), \tag{9}$$

luego $I-(A+t_oB)$ es inyectiva. Así, existe

$$\underbrace{[I-(A+t_oB)]^{-1}}_{R(t_o)=} : X\to D(A). \tag{10}$$

De (9) tenemos $R(t_o)\in L(X)$ y $\|R(t_o)\|\leq 1$.

Afirmamos que $BR(t_o)$ **es un operador lineal acotado.**
En efecto, tenemos por la desigualdad triangular:

$$\|Ax\| = \|Ax+t_oBx-t_oBx\| \leq \|Ax+t_oBx\| + \|t_oBx\| = \|A+t_oBx\| + t_o\|Bx\|. \tag{11}$$

Sustituyendo (11) en (8) tenemos

$$\|Bx\| \leq \alpha\{\|(A+t_oB)x\| + \underbrace{t_o}_{\leq 1}\|Bx\|\} + \beta\|x\| \ \leq \alpha\|(A+t_oB)x\| + \alpha\|Bx\| + \beta\|x\|. \tag{12}$$

De donde tenemos

$$(1-\alpha)\|Bx\| \leq \alpha\|(a+t_oB)x\| + \beta\|x\|$$

$$\|Bx\| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\|(A+t_oB)x\| + \frac{\beta}{1-\alpha}\|x\|. \tag{13}$$

Como $R(t_o): X \to D(A)$ y $[I-(A+t_oB)]R(t_o) = I$ entonces

$$R(t_o) - (A+t_oB)R(t_o) = I,$$

de donde

$$(A+t_oB)R(t_o) = R(t_o) - I. \tag{14}$$

Por otro lado,

$$\|R(t_o)x - x\| \leq \underbrace{\|R(t_o)\|}_{\leq 1}\|x\| + \|x\| \ \leq 2\|x\|. \tag{15}$$

Usando (14) en (13) para $R(t_o)x \in D(A)$ y considerando (15) obtenemos

$$\begin{aligned}\|BR(t_o)x\| &\leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\|(A+t_oB)R(t_o)x\| + \frac{\beta}{1-\alpha}\|R(t_o)x\| \\ &= \frac{\alpha}{1-\alpha}\|(R(t_o)-I)x\| + \frac{\beta}{1-\alpha}\|R(t_o)x\| \\ &\leq \frac{2\alpha+\beta}{1-\alpha}, \quad \forall x \in X.\end{aligned} \tag{16}$$

Por lo tanto, $BR(t_o)$ es acotado y $\|BR(t_o)\| \leq \frac{2\alpha+\beta}{1-\alpha}$.
Observemos que

$$I-(A+tB) = I-(A+t_oB) + (t_o - t)B = [I-(t-t_o)BR(t_o)][I-(A+t_oB)]. \tag{17}$$

Como $[I-(A+t_oB)]$ es invertible, la identidad (17) nos permite afirmar que $I-(A+tB)$ es invertible si y solamente si $[I-(t-t_o)BR(t_o)]$ es invertible. Por el Teorema del Inverso, es invertible si $|t-t_o|\,\|BR(t_o)\| < 1$.

Como $|t-t_o|\,\|BR(t_o)\| \leq |t-t_o|\frac{2\alpha+\beta}{1-\alpha}$ y como queremos que sea menor que 1, i.e. $|t-t_o|\frac{2\alpha+\beta}{1-\alpha} < 1$ entonces $|t-t_o| < \frac{1-\alpha}{2\alpha+\beta} \leq \|BR(t_o)\|^{-1}$. Así, escogemos $\delta = \frac{1-\alpha}{4\alpha+2\beta} < 1$, lo que nos permite obtener que $I-(A+tB)$ sea invertible y

$$[I-(A+tB)]^{-1} = [I-(A+t_oB)]^{-1}\underbrace{[I-(t-t_o)BR(t_o)]^{-1}}_{\in L(X)}$$

y la imagen de $I-(A+tB)$ es todo el espacio X, i.e. $I-(A+tB)$ es sobreyectiva si $|t-t_o| < \delta$. Evidentemente el operador $A+tB$ es disipativo, luego hemos conseguido un $\delta > 0$ de modo que

$A+tB$ es m-disipativo si $|t-t_o|<\delta$ y $t\in[0,1]$.

A seguir mostraremos que $A+tB$ es m-disipativo $\forall t\in[0,1]$.

Supongamos que $t>t_o$ y $t=t_o+2\delta'$ con $\delta'<\delta$, entonces $A+(t_o+\delta')B$ es m-disipativo, luego existe $R(t_o+\delta')=[I-(A+(t_o+\delta')B)]^{-1}:X\to D(A)$ y $\|R(t_o+\delta')\|\leq 1$.

Por otro lado, procediendo como en $BR(t_o)$, obtenemos que $BR(t_o+\delta')$ es lineal y acotado con

$$\|BR(t_o+\delta')\|\leq\frac{2\alpha+\beta}{1-\alpha}.$$

Como

$$I-[A+(t_o+2\delta')B]=I-[A+(t_o+\delta')B]-\delta'B=[I-\delta'BR(t_o+\delta')][I-(A+(t_o+\delta')B)]. \tag{18}$$

De (18) observamos que $I-[A+(t_o+2\delta')B]$ es inversible si y solamente si $I-\delta'BR(t_o+\delta')$ es invertible. Como

$$\|\delta'BR(t_o+\delta')\|=\delta'\|BR(t_o+\delta')\|<\delta\frac{2\alpha+\beta}{1-\alpha}=\frac{(1-\alpha)}{2(2\alpha+\beta)}\frac{(2\alpha+\beta)}{(1-\alpha)}=\frac{1}{2}<1,$$

entonces por el Teorema del Inverso se consigue que existe el inverso de $I-\delta'BR(t_o+\delta')$, con dominio del inverso todo el espacio X. Entonces $I-[A+(t_o+2\delta')B]$ es invertible e

$Im(I-[A+\underbrace{(t_o+\delta')}_{=t}B])=X$, i.e. $A+tB$ es m-disipativo.

Análogamente procedemos si $t>t_o$ i.e. existe $n\in N$ tal que $\delta'=\dfrac{t-t_o}{n}<\delta$ luego $t=t_o+n\delta'$.

Entonces $\|R(t_o+(n-1)\delta')\|\leq 1$, $BR(t_o+(n-1)\delta')$ es lineal y acotado.

Como

$$\begin{aligned}I-[A+(t_o+n\delta')B]&=I-[A+(t_o+(n-1)\delta')B]-\delta'B\\&=[I-\delta'BR(t_o+(n-1)\delta')][I-(A+(t_o+(n-1)\delta')B)].\end{aligned} \tag{19}$$

De (19) observamos que $I-[A+(t_o+n\delta')B]$ es inversible si y solamente si $I-\delta'BR(t_o+(n-1)\delta')$ es invertible. Como

$$\|\delta'BR(t_o+(n-1)\delta')\|=\delta'\|BR(t_o+(n-1)\delta')\|<\delta\frac{2\alpha+\beta}{1-\alpha}=\frac{(1-\alpha)}{2(2\alpha+\beta)}\frac{(2\alpha+\beta)}{(1-\alpha)}=\frac{1}{2}<1$$

entonces por el Teorema del Inverso se consigue que existe el inverso de $I-\delta'BR(t_o+(n-1)\delta')$, con dominio del inverso todo el espacio X. Entonces $I-[A+(t_o+n\delta')B]$ es invertible e

$Im(I-[A+\underbrace{(t_o+n\delta')}_{=t}B])=X$, i.e. $A+tB$ es m-disipativo, para $t\in[0,1]$.

Para el caso $t<t_o$, existe $n\in N$ tal que $\delta'=\dfrac{t_o-t}{n}<\delta$ luego $t=t_o-n\delta'$, y la prueba es análoga.

Este teorema lo usaremos como la siguiente versión.

Corolario 2 *Sea A el generador infinitesimal de un semigrupo C_o de contracción. Sea B un operador disipativo con $D(B) \supset D(A)$ y*

$$\|Bx\| \leq \alpha\|Ax\| + \beta\|x\|, \quad \forall x \in D(A),$$

donde $\alpha \in [0,1[$ y $\beta \geq 0$.

Entonces $A+B$ es el generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_o de contracción.

Prueba.- Como A es el generador infinitesimal de un semigrupo entonces $\overline{D(A)} = X$ y por el Teorema de Lumer-Phillips tenemos que A es m-disipativo. Si A es m-disipativo entonces $Re < Ax, x^* > \leq 0, \forall x^* \in F(x)$.

Si B es disipativo entonces existe $y^* \in F(x)$ tal que $Re < Bx, y^* > \leq 0$, luego $Re < tBx, y^* > \leq 0$ para $t \geq 0$.

En particular también tenemos que $Re < Ax, y^* > \leq 0$. Por lo tanto $Re < (A+tB)x, y^* > \leq 0$, luego $A+tB$ es disipativo para todo $t \in [0,1]$. Usando el Teorema previo con $t_o = 0$ obtenemos que $A+tB$ es m-disipativo $\forall t \in [0,1]$ y como $D(A+tB) = D(A)$ es denso en X, entonces debido a Lumer-Phillips $A+tB$ es el generador infinitesimal de un semigrupo C_o de contracción, $\forall t \in [0,1]$. En particular para $t=1$, $A+B$ es el generador infinitesimal de un semigrupo C_o de contracción.

Observación 4 *Si $\alpha = 1$ en la desigualdad 8, el Teorema 12 y Corolario 2 puede no acontecer, pues no es verdad que $A+B$ sea necesariamente cerrado.*

Por otro lado si $A+B$ no es cerrado entonces $A+B$ no puede ser generador infinitesimal de un C_o semigrupo de clase C_o.

Ponemos en evidencia esto, con **el siguiente ejemplo**:

Consideramos el operador autoadjunto: iA en un espacio de Hilbert.

Sabemos que si iA es autoadjunto, entonces A y $-A$ son generadores infinitesimales de un semigrupo C_o de contracciones (i.e. $\overline{D(A)} = X$).

Tomemos

$$B := -A$$

en el Teorema 12, y tenemos la igualdad en (8) con $\alpha = 1$ y $\beta = 0$,

$$\|Bx\| = \|-Ax\| = \|Ax\|, \quad \forall x \in D(A).$$

y

$$\{A + (-A)\}|_{D(A)} = 0 \quad \textit{no es cerrado}$$

pero si

$$\overline{A+B} = 0 \quad \textit{en } X$$

entonces $\overline{A+B}$ es el generador infinitesimal de un semigrupo C_o de contracción.

A seguir sólo enunciaremos dos importantes resultados: teorema 13 y corolario 3, para su prueba citamos [10].

Teorema 13 *Sea A el generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_o de contracción. Sea B un operador disipativo tal que $D(B) \supset D(A)$ y satisface:*

$$\|Bx\| \leq \|Ax\| + \beta\|x\|, \quad \forall x \in D(A) \tag{20}$$

donde $\beta \geq 0$ es una constante.

Si B^*, el adjunto de B, es densamente definido (i.e. $\overline{D(B^*)} = X^*$), entonces la cerradura de $A+B$: $\overline{A+B}$ es el generador de un semigrupo C_o de contracciones.

Sea X un espacio de Banach reflexivo y T un operador **cerrable** y densamente definido en X. Entonces sabemos que T^* es cerrado y $D(T^*)$ es denso en X^*. Por lo tanto, para espacios de Banach **reflexivos** tenemos el siguiente resultado:

Corolario 3 *Sea X un espacio de Banach* ***reflexivo*** *y sea A el generador infinitesimal de un semigrupo C_o de contracción en X. Sea B un operador disipativo tal que $D(B) \supset D(A)$ y satisface:*

$$\|Bx\| \leq \|Ax\| + \beta\|x\|, \quad \forall x \in D(A), \tag{21}$$

donde $\beta \geq 0$ es una constante.

Entonces la cerradura de $A+B$: $\overline{A+B}$ es el generador de un semigrupo C_o de contracciones en X.

Para simplificar el lenguaje introducimos la siguiente notación:

$$A \in G(M, \omega)$$

para decir que:

" A es el generador infinitesimal de un semigrupo, de operadores lineales acotados, de clase C_o: $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ tal que $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $t \geq 0$ ".

Proposición 2 $A - \omega \in G(M, \omega) \iff A \in G(M, \omega)$.

Prueba.- Usamos el Teorema de Hille- Yosida.

Como $\lambda - (A - \omega) = (\lambda + \omega) - A$ entonces

$$\lambda \in \rho(A - \omega) \Leftrightarrow \lambda + \omega \in \rho(A)$$

y

$$R^+ \subset (A - \omega) \Leftrightarrow R^+ + \omega \subset \rho(A)$$

y

$$\left\|R(\lambda, A-\omega)^n\right\| \leq \frac{M}{\lambda^n} \Leftrightarrow \left\|R(\underbrace{\lambda + \omega}_{\theta :=}, A)^n\right\| \leq \frac{M}{\lambda^n}, \quad \lambda > 0.$$

Por lo tanto,

$$\left\|R(\lambda, A-\omega)^n\right\| \leq \frac{M}{\lambda^n} \forall \lambda > 0 \Leftrightarrow \left\|R(\theta, A)^n\right\| \leq \frac{M}{(\theta - \omega)^n}, \quad \theta > \omega. \tag{22}$$

Además de esto, tenemos que el dominio del generador infinitesimal es denso:

$$\overline{D(A-\omega)} = X \Leftrightarrow \overline{D(A)} = X \tag{23}$$

y el generador infinitesimal es cerrado:

$$A-\omega \text{ es cerrado} \Leftrightarrow A \text{ es cerrado} . \tag{24}$$

De (22), (23), (24) y el Teorema de Hille-Yosida sigue nuestro resultado.

A seguir damos una aplicación del corolario 2.

Proposición 3 *Sea* $A\in G(1,0)$ *y* $B\in L(X)$ *entonces* $A+B\in G(1,\|B\|)$.

Prueba.- Como $B\in L(X)$ entonces existe $\|B\|$ y podemos formar el siguiente operador:

$$B-\|B\|I.$$

Veremos que este operador es disipativo. En efecto, sea $x\in D(B)=X$ y

$$x^*\in F(x):=\{y^*\in X^* \text{ tal que } <y^*,x>=\|x\|^2=\|y^*\|^2\}.$$

Usando $<Bx,x^*>\leq\|x^*\|\|Bx\|\leq\|x^*\|\|B\|\|x\|\leq\|B\|\|x\|^2$ tenemos

$$<(B-\|B\|I)x,x^*>=<Bx-\|B\|x,x^*>=<Bx,x^*>-\|B\|<x,x^*> \;=<Bx,x^*>-\|B\|\|x\|^2$$

$$\leq\|B\|\|x\|^2-\|B\|\|x\|^2=0.$$

Hacemos la siguiente estimativa:

$$\|(B-\|B\|I)x\|=\|Bx-\|B\|x\|\leq\|Bx\|+\|B\|\|x\|\leq\|B\|\|x\|+\|B\|\|x\| = 2\|B\|\|x\|$$

$$=0.\|Ax\|+2\|B\|\|x\|, \quad \forall x\in D(A).$$

Usando el corolario 2 tenemos que $A+B-\|B\|I\in G(1,0)$. Luego, por la proposición 2 tenemos que $A+B\in G(1,\|B\|)$.

En la siguiente sección daremos una importante aplicación de la proposición 3. Ahora evocaremos un resultado que permite conseguir generadores de semigrupos de contracción.

Lema 2 *Si* $A\in G(M,0)$ *entonces existe una norma* $|\cdot|$ *en* X *tal que* $|\cdot|$ *y son equivalentes en* X *, i.e.*

$$\|x\|\leq|x|\leq M\|x\|, \quad \forall x\in X,$$

y con esta norma equivalente se tiene $A\in G(1,0)$.

Prueba.- Citamos [18].

Observación 5 *En verdad basta definir* $|x|=\sup_{t>0}\|S(t)x\|$.

6. El problema de Cauchy Abtracto y existencia de solución

Sea el modelo de transporte de electrones a través de un hilo metálico, la ecuación de Shorödinger (P), considerando α una función real medible en R^n y $u_0\in H^2(R^n)$.

Introduciremos los siguientes operadores lineales

$$Au=i\Delta u, \text{ con } D(A)=H^2(R^n) \quad y$$

$$M_\alpha u=\alpha u, \text{ con } D(M_\alpha)=\{u\in L^2(R^n),\ \alpha u\in L^2(R^n)\}.$$

Ahora, en términos de estos dos operadores, el PVI (P) puede ser reescrito como el problema de Cauchy Abstracto:

$$(P_1)\left|\begin{array}{l} u_t = Au - iM_\alpha u \\ u(0) = u_0 \end{array}\right.$$

Podemos enunciar lo siguiente:

Lema 3 *Los operadores* A *y* M_α *satisfacen*

$-iA$ es densamente definido y simétrico.

$-M_\alpha$ es densamente definido y simétrico.

$-iA$ es disipativo.

Prueba.- En efecto, ordenadamente procedemos a probar los enunciados.

1. Desde que $H^2(R^n)$ es denso en $L^2(R^n)$ entonces A es densamente definido y por consiguiente $-iA$ también lo es. Ahora veremos que $-iA$ es simétrico. En efecto,

$$(-iAu, v) = (\Delta u, v) = (u, \Delta v) = (u, -iAv),\ \forall u, v \in D(A).$$

2. Para probar que M_α es densamente definido, primero introduciremos los siguientes conjuntos

$$E_m = \{x \in R^n, |\alpha(x)| \leq m\} \ \ para\ cada\ \ m \in N.$$

Si $u \in L^2(R^n)$ tenemos

$$\int_{R^n} |\alpha u \chi_{E_m}|^2 d\mu \leq m^2 \int_{R^n} |u|^2 \ d\mu < \infty$$

esto es, $\alpha u \chi_{E_m} \in L^2(R^n)$, luego $u\chi_{E_m} \in D(M_\alpha)$, y esto sucede para cada $m \in N$.

Como $u\chi_{E_m} \to u$ en c.t.p de R^n cuando $m \to +\infty$ y usando el Teorema de la Convergencia Dominada tenemos que

$$\lim_{m \to +\infty} \left\| u\chi_{E_m} - u \right\|_{L^2(R^n)} = 0,$$

i.e. $u \in \overline{D(M_\alpha)}$.

Ahora veremos que el operador M_α es simétrico. En efecto, sean u y v elementos de $D(M_\alpha)$, tenemos

$$(M_\alpha u, v) = (\alpha u, v) = (u, \alpha v) = (u, M_\alpha v).$$

3. Sea $u \in D(A)$, entonces

$$(-iAu, u) = (\Delta u, u) = -(\nabla u, \nabla u) = -\|\nabla u\|^2 \leq 0$$

esto es, $-iA$ es disipativo.

Teorema 14 *Sea* α *una función real medible en* R^n *y* $u_0 \in H^2(R^n)$ *entonces el PVI (P) posee una única solución* u *,*

$$u \in C([0, +\infty), H^2(R^n)) \cap C^1([0, +\infty), L^2(R^n)).$$

Prueba.- Abordaremos la existencia de solución del PVI (P) cuando α es uno de los tres casos siguientes.

a) $\alpha(x) = 0$, $\forall x \in R^n$

b) $\alpha \in L^\infty(R^n)$

c) $\alpha \in L^p(R^n)$, con $p > \frac{n}{2}$ y $p \geq 2$ y α satisfaciendo $\alpha(x) \geq 0$ en c. t. p. de R^n.

En efecto, para probar la existencia de solución del P.V.I (P) lo haremos usando el famoso resultado de Stone, i.e. precisamos mostrar que $-iA - M_\alpha$ sea autoadjunto, lo que es equivalente a mostrar que $-iA - M_\alpha$ sea simétrico y que $Im(\lambda_0 I - (-iA - M_\alpha)) = L^2(R^n)$ para algún $\lambda_0 \in \rho(-iA - M_\alpha)$.

Para el caso a) tenemos que $M_\alpha = 0$ y $D(M_\alpha) = L^2(R^n)$ y como $H^2(R^n) \subset L^2(R^n)$ entonces $H^2(R^n) \subset D(M_\alpha)$.

Como $-iA$ es disipativo entonces

$$\|(I - (-iA)u\| \geq \|u\|, \forall u \in D(A), \tag{25}$$

esto implica que $I + iA$ es inyectiva, i.e. existe el inverso :

$$(I + iA)^{-1} : Im(I + iA) \to D(A)$$

y por la desigualdad (25) este inverso es **acotado**.

Ahora veremos que $Im(I + iA) = L^2(R^n)$. Esto es, sea $v \in L^2(R^n)$ entonces probaremos que existe $u \in D(I + iA) = H^2(R^n)$ tal que $(I + iA)u = v$.

En efecto, sea la ecuación $u - \Delta u = v$ con dato $v \in L^2(R^n)$, debido a regularidad elíptica esta ecuación posee solución $u \in H^2(R^n)$. Así , $1 \in \rho(-iA) = \rho(-iA - M_\alpha)$.

Además, usando el Teorema de Lumer-Phillips conseguimos que $-iA$ es el generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_0 de contracción, es decir $-iA \in G(1,0)$.

Obviamente se probó en la primera afirmación de Lema 3 que $-iA = -iA - M_\alpha$ es simétrico.

Para el caso b) , sea $u \in L^2(R^n)$ entonces $M_\alpha u = \alpha u \in L^2(R^n)$. En efecto, tenemos

$$\|M_\alpha u\|_2 = \|\alpha u\|_2 \leq \|\alpha\|_\infty \|u\|_2 < \infty$$

siempre que $u \in L^2(R^n)$. Además, hemos mostrado que M_α es acotada con norma $\|M_\alpha\| \leq \|\alpha\|_\infty$.

Obviamente $D(M_\alpha) = L^2(R^n)$.

Tenemos que $Im(I - (-iA)) = L^2(R^n)$, $-iA$ densamente definido y disipativo, entonces usando el Teorema de Lumer-Phillips, tenemos que $-iA$ es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracción.i.e. $-iA \in G(1,0)$.

Usando un resultado de pertubación, Proposición 3, tenemos que $-iA - M_\alpha \in G(1, \|M_\alpha\|)$ (desde que M_α es acotada), por consiguiente $-iA-M_\alpha-\|M_\alpha\|\cdot I\in G(1,0)$ i.e. es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracción , ahora usando nuevamente el Teorema de Lumer- Phillips tenemos que

$$Im(\lambda I-(-iA-M_\alpha-\|M_\alpha\|\cdot I))=L^2(R^n),\quad \forall\lambda>0 \tag{26}$$

y

$$-iA-M_\alpha-\|M_\alpha\|\cdot I \ \ es\ Operador\ Disipativo\ . \tag{27}$$

De (26) tenemos

$$Im(\lambda^* I-(-iA-M_\alpha))=L^2(R^n)\ con\ \lambda^*=\lambda+\|M_\alpha\|.$$

De (27) tenemos $\forall\beta>0$

$$\|[\beta I-(-iA-M_\alpha-\|M_\alpha\|\cdot I)]x\|\geq\beta\|x\|,\forall x\in D(iA+M_\alpha+\|M_\alpha\|\cdot I)\ . \tag{28}$$

La desigualdad (28) nos dice que el operador $\beta I-(-iA-M_\alpha-\|M_\alpha\|\cdot I)$ es inyectivo $\forall\beta>0$.
En particular para $\beta := \lambda$

$$\exists(\lambda I-(-iA-M_\alpha-\|M_\alpha\|\cdot I))^{-1}:\underbrace{Im(\lambda^* I-(-iA-M_\alpha))}_{=L^2(R^n)}\to D(\lambda^* I-(-iA-M_\alpha)).$$

Y como de (28) tenemos que $(\lambda^* I-(-iA-M_\alpha))^{-1}$ es un operador acotado, entonces $\lambda^*\in\rho(-iA-M_\alpha)$.

De la primera y segunda afirmación del Lema 3 tenemos que $-iA-M_\alpha$ es simétrico.

En el caso c), primero procederemos probando que $H^2(R^n)\subset D(M_\alpha)$.

En efecto, sea $u\in H^2(R^n)$ y definimos $v(x):=u(\frac{x}{\rho}),\rho>0.$
Obtenemos que

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)=\frac{\partial u}{\partial x_i}(\frac{x}{\rho})\cdot\frac{1}{\rho},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(x)=\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(\frac{x}{\rho})\cdot\frac{1}{\rho^2},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}(x)=\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(\frac{x}{\rho})\cdot\frac{1}{\rho^2}$$

para $i,j=1,\ldots n$ y también

$$\|v\|_{L^2(R^n)}=\rho^{\frac{n}{2}}\|u\|_{L^2(IR^n)}\ \ siempre\ que\ n\geq 1,$$

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L^2(IR^n)}=\rho^{\frac{n-2}{2}}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^2(R^n)},\ i=1,\ldots n,\quad siempre\ que\ n\geq 1,$$

$$\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}\right\|_{L^2(R^n)}=\rho^{\frac{n-4}{2}}\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\right\|_{L^2(R^n)},\ i,j=1,\ldots n,\quad siempre\ que\ n\geq 1,$$

$$\|\Delta v\|_{L^2(R^n)}=\rho^{\frac{n-4}{2}}\|\Delta u\|_{L^2(R^n)},$$

obteniendose que $v \in H^2(R^n)$. Luego la función $(1+\|\cdot\|^2)\hat{v}(\cdot) \in L^2(R^n)$.

Tenemos que $(1+\|\cdot\|^2)^{-1} \in L^p(R^n)$ siempre que $p > \frac{n}{2}$. Tomando $s := \frac{2p}{p+2}$, tenemos que s satisface $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2}$.

Ahora expresamos $\hat{v}(x) = (1+\|x\|^2)^{-1} \cdot (1+\|x\|^2)\hat{v}(x)$ y aplicamos la desigualdad de Hölder Generalizada, obteniendo

$$\left(\int_{R^n} \|\hat{v}(x)\|^2 dx\right)^{\frac{1}{s}} \leq C\left(\int_{R^n} (1+\|x\|^2)^{-p} dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \underbrace{\left(\int_{R^n} |(1+\|x\|^2)\hat{v}(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}}_{I:=}.$$

Vemos que $(1+\|x\|^2)\hat{v}(x) = \hat{v}(x) + \|x\|^2 \hat{v}(x) = \widehat{(v - \Delta v)}(x)$ y usando el teorema de Plancherel tenemos

$$I = \left(\int_{R^n} |\widehat{v - \Delta v}(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \|v - \Delta v\|_{L^2} \leq \|v\|_{L^2} + \|\Delta v\|_{L^2}.$$

Introduciendo la notación

$$a_{p,n} := C\left(\int_{R^n} (1+|x|^2)^{-p} dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

tenemos la desigualdad

$$\|\hat{v}\|_{L^s} \leq a_{p,n}(\|v\|_{L^2} + \|\Delta v\|_{L^2}). \tag{29}$$

Sea r tal que $1 = \frac{1}{r} + \frac{1}{s}$. Como $p \geq 2$ obtenemos de $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2}$ que $s \geq 1$. Se ve también que $s = \frac{2p}{p+2} \leq 2$, i.e. $1 \leq s \leq 2$.

Usando el Teorema de Hausdorf-Young aplicado a $\hat{v}$ obtenemos que $\hat{v} \in L^r(R^n)$ y

$$\|\hat{\hat{v}}\|_{L^r(R^n)} \leq (2\pi)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{s})} \|\hat{v}\|_{L^s(R^n)}. \tag{30}$$

Ahora, usando el Teorema de la inversion de Fourier, tenemos que

$$\tilde{v} = \hat{\hat{v}}, \tag{31}$$

donde $\tilde{v}$ es la reflexión de v, i.e. $\tilde{v}(x) = v(-x)$.
Así, de (30) y (31) tenemos

$$\|\tilde{v}\|_{L^r(R^n)} \leq (2\pi)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{s})} \|\hat{v}\|_{L^s(R^n)}.$$

Como $\|v\|_{L^r(R^n)} = \|\tilde{v}\|_{L^r(R^n)}$ y $\frac{1}{2} - \frac{1}{s} = -\frac{1}{p}$, entonces

$$\|v\|_{L^r(R^n)} \leq (2\pi)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{s})} \|\hat{v}\|_{L^s(R^n)} = (2\pi)^{-n\frac{1}{p}} \|\hat{v}\|_{L^s(R^n)}, \tag{32}$$

y usando (29) en el lado derecho de la desigualdad (32), tenemos

$$\|v\|_{L^r(R^n)} \leq a^1_{p,n}(\|\Delta v\|_{L^2(R^n)} + \|v\|_{L^2(R^n)}),$$

donde $a^1_{p,n} = (2\pi)^{-\frac{n}{p}} a_{pn}$ es una constante que depende de n y p.
De la definición de v obtenemos

$$\|u\|_{L^r(R^n)} = \rho^{-\frac{n}{r}} \|v\|_{L^r(R^n)} \leq \rho^{-\frac{n}{r}} a^1_{p,n}\left(\|\Delta v\|_{L^2(R^n)} + \|v\|_{L^2(R^n)}\right) \leq \rho^{-\frac{n}{r}} a^1_{p,n}\left(\rho^{\frac{(n-4)}{2}} \|\Delta u\|_{L^2(R^n)} + \rho^{\frac{n}{2}} \|u\|_{L^2(R^n)}\right). \tag{33}$$

Multiplicando por $\|\alpha\|_{L^p(R^n)}$ a la desigualdad (33) obtenemos

$$\|u\|_{L^r(R^n)} \|\alpha\|_{L^p(R^n)} \leq \rho^{-\frac{n}{r}} a^1_{p,n} \|\alpha\|_{L^p(R^n)} \left(\rho^{\frac{(n-4)}{2}} \|\Delta u\|_{L^2(R^n)} + \rho^{\frac{n}{2}} \|u\|_{L^2(R^n)}\right).$$

i.e.

$$\|u\|_{L^r(R^n)} \cdot \|\alpha\|_{L^p(R^n)} \leq a\|\Delta u\|_{L^2(R^n)} + b\|u\|_{L^2(R^n)}, \tag{34}$$

donde $a := \rho^{-\frac{n}{r}} a^1_{p,n} \|\alpha\|_{L^p(R^n)} \rho^{\frac{(n-4)}{2}}$ y $b := \rho^{-\frac{n}{r}} a^1_{p,n} \|\alpha\|_{L^p(R^n)} \rho^{\frac{n}{2}}$, lo tomamos considerando ρ convenientemente de modo que $0 \leq a < 1$ y obviamente $b \geq 0$.

De $1-\frac{1}{r} = \frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2}$ tenemos que $\frac{1}{2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$, entonces la desigualdad generalizada de Hölder nos dice que

$$\underbrace{u\alpha}_{M_\alpha(u)=} \in L^2(R^n) \ y \ \|u\alpha\|_{L^2(R^n)} \leq \|u\|_{L^r(R^n)} \cdot \|\alpha\|_{L^p(R^n)}. \tag{35}$$

i.e. $u \in D(M_\alpha)$. Por lo tanto, hemos probado que $\underbrace{H^2(R^n)}_{=D(A)} \subset D(M_\alpha)$.

De la desigualdad (35) y (34) tenemos que

$$\|M_\alpha u\|_{L^2(R^n)} \leq \|u\|_{L^r(R^n)} \|\alpha\|_{L^p(R^n)} \leq a\|\Delta u\|_{L^2(R^n)} + b\|u\|_{L^2(R^n)}. \tag{36}$$

Sabemos que el operador $-M_\alpha$ es disipativo, desde que estamos considerando $\alpha(x) \geq 0$ en c.t.p. de R^n. También se probó que $-iA \in G(1,0)$. Entonces usando la proposición 3 de perturbación conseguimos

$$-iA - M_\alpha \in G(1,0).$$

Aplicando el Teorema de Lumer-Phillips tenemos

$$Im(\lambda I - (-iA - M_\alpha)) = L^2(R^n), \quad \forall \lambda > 0 \tag{37}$$

y

$$-iA - M_\alpha \ \textit{es Operador Disipativo} . \tag{38}$$

De (38) tenemos $\forall \beta > 0$

$$\|[\beta I - (-iA - M_\alpha)]x\| \geq \beta \|x\|, \ \forall x \in D(iA + M_\alpha). \tag{39}$$

La desigualdad (39) nos dice que el operador $\beta I - (-iA - M_\alpha)$ es inyectivo $\forall \beta > 0$.
En particular para $\beta = \lambda$ tenemos

$$\exists (\lambda I - (-iA - M_\alpha))^{-1} : \underbrace{Im(\lambda I - (-iA - M_\alpha))}_{=L^2(R^n)} \to D(\lambda I - (-iA - M_\alpha)).$$

Y como de (39) tenemos que $(\lambda I - (-iA - M_\alpha))^{-1}$ es un operador acotado, entonces $(\lambda I - (-iA - M_\alpha))^{-1}$.

Observación 6 *Análogamente, usando teoría de evolución no lineal, podemos obtener respuesta positiva cuando en el sistema (P), se considere el término no lineal* $c^2 |u|^2 u$ *con* $c \neq 0$ *en lugar de* αu*, es decir, se consigue existencia y unicidad de solución como en el Teorema 7.14.*

7. Conclusiones

Se hizo un profundo estudio, dando sutiles pruebas de resultados de operadores m- disipativos y perturbación de semigrupos, e introduciendo pertinentes observaciones. Así, también se probó la existencia y unicidad de solución del modelo de transporte de electrones, ecuación (P).

8. Referencias bibliográficas

[1] Agmon, S. (1975) *Spectral properties of Schrodinger operators and scattering theory*, Ann. Scuola Sup. Pisa, Cl. Sci. 2: 151-218.

[2] Arkadi, P. Levaniuk (2006) *Métodos Matemáticos de la Física. Método de Fourier*.

[3] Iorio, R. (2002) *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*. Cambridge University.

[4] Jensen, A. and Kitada, H. (1988) *Fundamental solutions and eigenfunction expansions for Schrodinger operators. II. Eigenfunction expansions*., Math. Z. 199: 1-13.

[5] Kato T. (1987) *On nonlinear Schrodinger equations*, Ann. Inst. Henri Poincare, Physique Theorique 46: 113-129.

[6] Liu, Z. and Zheng, S. (1999) *Semigroups associated with dissipative system*, Chapman Hall /CRC.

[7] Merzbacher, E. (1970) *Quantum Mechanics*, 2nd ed., Wiley.

[8] Moore (1989) *W. Schrödinger - Life and Thought*, Cambridge University Press.

[9] Muñoz Rivera, J.E. (2007) *Semigrupos e Ecuações Diferenciais Parciais*. Petropolis - LNCC.

[10] Pazy, A. (1983) *Semigroups of linear operator and applications to partial differential equations*. Applied Mathematical Sciences. 44 Springer Verlag, Berlin.

[11] Santiago, Y. (2003) *Sobre la analiticidad del semigrupo* C_0 *asociado a un sistema viscoelástico*. PESQUIMAT Vol VI, No. 2: 27-36.

[12] Santiago, Y. (2004) *Estabilidad exponencial del Semigrupo* C_0 *asociado a un sistema Termoelástico*. PESQUIMAT Vol VII , No. 1: 30-42.
[13] Santiago, Y. (2007) *About decay of solution of the wave equation with dissipation*. PROYECCIONES. Vol 26 No. 1: 37-71.
[14] Santiago, Y. (2010) *On the perturbed dissipative operators*. IX WPDE. Rio de Janeiro, Brasil, Resumen.
[15] Santiago, Y. (2011) *Dissipative Operators and some applications to PDE's*. Coloquio N. e Internacional de Matemática-Conimat.Antofagasta, Chile, Resumen.
[16] Santiago, Y. (2012) *Global existence and exponential stability for a coupled wave system* - Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications , Volume No. 16, Issue no: 1-2: 29-46 .
[17] Santiago, Y.(2013) *Principios fundamentales del análisis funcional*. XXXI Coloquio de la SMP. Ica-Resumen.
[18] Santiago, Y. (2014) *Tópicos de Análisis Funcional. Fundamentos y aplicaciones*. Ed. Académica Española.
[19] Schrödinger, E.(1926) *An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules*, Phys. Rev. 28: 10-49.
[20] Shankar, R. (1980) *Principles of Quantum Mechanics*, Plenum Press.
[21] Simon, B. (1982) *Schrodinger semigroups*, Bull Amer. Math. Soc. (New Ser.) 7: 447-526.
[22] Tucsnak, M. and Weiss, G. (2009) *Observation and control for operators semigroups*, Birkhäuser Verlag.