Artículos originales

theorēma
Vol 3, N° 4, pp.7-23 (UNMSM, Lima 2016)
ISSN 2312-6450

CIENCIAS MATEMÁTICAS

Espacios de Sobolev periódico y unproblema de Cauchy asociado a un modelo de ondas en un fluido viscoso

Periodic Sobolev Spaces and a Cauchy Problem associated to a model of waves in a viscous fluid

Yolanda Santiago Ayala[1], **Santiago Rojas Romero**[2] **y Teófanes Quispe Méndez**[3]
Universidad Nacional Mayor de San Marcos

RESUMEN

En este artículo hacemos un estudio dando sutiles pruebas de algunos resultados de espacios de Sobolev Periódico H^s, su caracterización, inclusiones, dualidad, inmersiones de Sobolev y la posibilidad de obtener que el producto de dos elementos de dicho espacio aún continúe en el espacio; esto se da efectivamente cuando $s > 1/2$. Demostramos también la existencia y unicidad de solución de un modelo de ondas en un fluido viscoso.

Palabras clave: Ondas en un fluido viscoso, existencia de solución, ecuación KdV-Kuramoto-Sivashinski, Espacios de Sobolev Periódico, Teoría de Fourier.

ABSTRACT

In this article, we study, giving subtle proofs, some results of Periodic Sobolev spaces H^s, their characterizations, inclusions, duality, Sobolev embeddings and the possibility of the fact of the product of two elements belonging to the space, still remains in the space; actually, it occurs when $s > 1/2$. Also, we prove the existence and uniqueness of the solution of a Cauchy problem associated to a model of waves in a viscous fluid.

Keywords: Waves in a viscous fluid, existence of solution, KdV-Kuramoto - Sivashinski equation, Periodic Sobolev spaces, Fourier theory.

Recibido: 31/03/2016 *Aprobado: 29/04/2016*

1 Facultad de Ciencias Matemáticas, UNMSM, <ysantiagoa@unmsm.edu.pe>.
2 Facultad de Ciencias Matemáticas, UNMSM, <srojasr@unmsm.edu.pe>
3 Facultad de Ciencias Matemáticas, UNMSM, <tquispem@unmsm.edu.pe>.

1. Introducción

Iniciamos recordando que la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky (K-S):

$$u_t + uu_x + u_{xx+} + u_{xxxx} = 0$$

data de mediados de 1970. La primera derivación fue hecha por Kuramoto en el estudio de ecuaciones de reacción-difusión modelando la reacción Belonsov-Zabotinski. Dicha ecuación fue también desarrollada por Sivashinsky en dimensiones más altas en láminas temperadas frontales.

Por otro lado, la bien conocida ecuación de KdV

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

así como la K-S fueron estudiadas por muchos autores, podemos citar por ejemplo [2], [3], [5], [6] y [13].

Del acoplamiento de los dos modelos se deduce el modelo para ondas en un fluido viscoso:

$$(P) \qquad u_t + u_{xxx} + \beta(u_{xxxx} + u_{xx}) = 0 \text{ en } H^{s-4}, \text{ con } u(0) = \Phi \in H^s,$$

considerando β una constante positiva, s un número real y denotando por H^s al espacio de Sobolev Periódico.

Para el sustento físico del modelo citamos [14].

Ahora, nos preguntamos, ¿será que el modelo posee solución?, y si existe ¿es única? En efecto, se consigue probar la existencia y unicidad de solución del PVI (P), y además, que la solución dependa continuamente respecto al dato inicial.

Ahora, queremos citar algunas referencias bibliográficas, por su trasendencia e importancia, por ejemplo [1], donde encontramos algunos trabajos relacionados al modelo (P) y [4] donde entre los problemas propuestos aparece el modelo que estudiamos. Así, tenemos estas fuentes adicionales que nos motivaron abordar el problema (P).

Citamos algunos trabajos de existencia vía semigrupos [7], [8], [9], [10], [11] y nos apoyamos de algunos resultados de [12].

Nuestro artículo está organizado como sigue. En la sección 2, enunciamos los métodos y técnicas usadas en este artículo. En la sección 3, enunciamos los resultados preliminares. En la sección 4, hacemos un estudio de los espacios de Sobolev Periódico, su caracterización, inclusiones, dualidad, inmersiones de Sobolev y la posibilidad de realizar que el producto de dos elementos de dicho espacio aún continúe en el espacio, esto se da efectivamente cuando $s > 1/2$.

En la sección 5, probamos la existencia y unicidad de solución de un modelo para ondas en un fluido viscoso. En la sección 6, damos nuestras conclusiones y finalmente en la sección 7 listamos las referencias bibliográficas usadas.

2. Métodos y técnicas utilizadas

Para obtener los resultados de nuestro estudio, primeramente estudiamos fuertemente el marco teórico: Serie de Fourier, análisis armónico y funcional, i.e. principalmente el espacio de Sobolev Periódico.

Y para la existencia de solución del modelo de ondas en un fluido viscoso usamos el marco teórico y cálculo de desigualdades y estimativas.

3. Preliminares

Sea $p \in [1; +\infty)$, el conjunto $l^p = l^p(Z)$ de las sucesiones complejas $\alpha = (\alpha_k)_{k\in Z}$ tal que

$$\sum_{k\in Z} |\alpha_k|^p < \infty$$

Es un espacio vectorial con la suma y la multiplicación por escalar definido por

$$(\alpha_k) + (\beta_k) = (\alpha_k + \beta_k)$$
$$\lambda(\alpha_k) = (\lambda\alpha_k)$$

El espacio l^p con la norma

$$\|\alpha\|_p = \left(\sum_{k\in Z} |\alpha_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

es completo. El espacio $l^\infty = l^\infty(Z)$ de las sucesiones complejas acotadas es también un espacio de Banach con la norma

$$\|\alpha\|_\infty = \sup_{k\in Z} |\alpha_k| .$$

El espacio l^2 es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$(\alpha, \beta) = \sum_{k\in Z} \alpha_k \overline{\beta_k}$$

donde $\alpha, \beta \in l^2$.

Los espacios l^p para $p \in [1, \infty) - \{2\}$, con las normas $\|\cdot\|_p$ ya definidas no son espacios de Hilbert.

Definición 3.1 Un álgebra de Banach es un espacio de Banach X, con un producto $(x, y) \in X \times X \mapsto xy \in X$ tal que $\forall x, y, z \in X$; y $\forall r \in \mathbb{C}$ se satisfacen

a) $(xy)z = x(yz)$,
b) $r(xy) = (rx)y = x(ry)$,
c) $(x + y)z = xz + yz$,
d) $\|xy\|_X \leq \|x\|_X \|y\|_X$.

Ahora enunciaremos un resultado importante conocido y útil de los espacios de Banach.

Teorema 3.1 Sean E y F espacios normados y sea $T: E \to F$ una transformación lineal. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) T es continua en E,
b) T es continua en $0 \in E$,
c) $\exists C > 0$ tal que $\|Tv\|_F \leq C\|v\|_E$, $\forall v \in E$.

El criterio más usado para garantizar convergencia absoluta y uniforme de sucesiones de funciones es el siguiente resultado conocido como el M- test de Weierstrass.

Teorema 3.2 Sea g_n una sucesión de funciones definidas en S. Si existe una sucesión de constantes positivas M_n tal que

$$|g_n(x)| \leq M_n \ , \forall x \in S, \forall n \in \mathbb{N} \ \ y \ \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$$

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ es absoluta y uniformemente convergente.

4. Espacios de Sobolev Periódico

Definición 4.1 Sea $s \in \mathbb{R}$ definimos

$$H_{per}^{s}([-\pi,\pi]) := \left\{ f \in P' \;\; tal \;\; que \;\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s \left|\hat{f}(k)\right|^2 < \infty \right\}$$

Observación 4.1 Sea $s \in \mathbb{R}$, se verifica que $H_{per}^{s} := \;\; H_{per}^{s}([\pi,\pi])$ es un espacio vectorial.

Definición 4.2 Sea $s \in \mathbb{R}$ definimos en H_{per}^{s} la aplicación $\|\cdot\|_s$.

$$\|f\|_s := \left(2\pi \;\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s \left|\hat{f}(k)\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \;\; , f \in H_{per}^{s}$$

Observación 4.2 La aplicación $\|\cdot\|_s$ es una norma en H_{per}^{s}. Así, $(H_{per}^{s}, \|\cdot\|_s)$ es un espacio normado.

Observación 4.3 Para $s \in \mathbb{R}$, se verifican las siguientes equivalencias:

$$f \in H_{per}^{s} \quad \Leftrightarrow \quad \left((1+|k|^2)^{\frac{s}{2}} \;\; \hat{f}(k) \right)_{k \in Z} \in l^2(Z) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\hat{f}(k) \right)_{k=-\infty}^{+\infty} = \hat{f} \in l_s^2$$

donde $l_s^2 = \{\alpha = (\alpha_k)_{k \in Z}$ tal que $\sum_{k \; -\infty}^{+\infty} \;\; (1+|k|^2)^s \, |\alpha_k|^2 < \infty\}$ y $(l_s^2, \|\cdot\|_{l_s^2})$ es un espacio normado, con la norma

$$\|\alpha\|_{l_s^2} = \left(2\pi \;\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s \;\; |\alpha_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

i.e. $\|f\|_s = \left\|\hat{f}\right\|_{l_s^2}$.

Definición 4.3 Para $s \in \mathbb{R}$, definimos en H_{per}^{s} la aplicación $<\cdot,\cdot>_s$

$$< f, g >_s := 2\pi \;\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s \, \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)}$$

Observación 4.4 Para $s \in \mathbb{R}$, se verifica que: $(H_{per}^{s}, <\cdot,\cdot>_s)$ (es un espacio de Hilbert, i.e. es un espacio con producto interno completo.

Observación 4.5 Para $s = 0$ tenemos

$$f \in H_{per}^{0} \Leftrightarrow \hat{f} \in l^2 \Leftrightarrow f \in L_{per}^2([-\pi,\pi])$$

i.e. $\|f\|_0 = \left\|\hat{f}\right\|_{l^2} = \|f\|_{L^2([-\pi,\pi])}$.

Proposición 4.1 Se satisface la siguiente inclusión

$$P \subset H_{per}^{s}, \;\; \forall s \in \mathbb{R}$$

y además dicha inclusión es densa, i.e. $\bar{P}^{\|\cdot\|_{H_{per}^{s}}} = H_{per}^{s}, \;\; \forall s \in \mathbb{R}$.

Prueba.- En efecto primero probaremos que $P \subset H_{per}^{s}$, pues esto implica $\bar{P}^{\|\cdot\|_{H_{per}^{s}}} \subset H_{per}^{s}$.

Recordemos que $P \subset P'$, vía $T_u \equiv u$, donde $< T_u \;\; , \phi >= \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x) u(x) dx, \qquad \forall \phi \in P$.

También en P vale:

$$u = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{u}\,(k) e^{ikx}$$

Así, para $u \in P$ valen las siguientes igualdades:

$$u' = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{u'}(k) e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} ik\hat{u}(k) e^{ikx}$$

$$u'' = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{u''}(k) e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-k^2)\hat{u}\,(k) e^{ikx}$$

y así sucesivamente, se cumple para todas las derivadas de u, i.e.

$$u^{(j)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{u^j}\,(k) e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (ik)^j)\hat{u}(k) e^{ikx} \quad .$$

Si $u \in P$ también vale la identidad de Parseval en P y lo aplicamos a u y u' respectivamente:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u(x)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{u}(k)|^2 < \infty \quad , \tag{4.1}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u'(x)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{u'}(k)\right|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^2|\hat{u}(k)|^2 < \infty \quad . \tag{4.2}$$

Sumando (4.1) y (4.2) obtenemos

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \{|u(x)|^2 + |u'(x)|^2\} \;\; dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)|\hat{u}(k)|^2 < \infty \quad ,$$

i.e. $u \in H^1_{per}$ y $u \in H^1([-\pi,\pi])$.
Obviamente, de (4.1) tenemos que $u \in H^0_{per}$.
Así, por la identidad de Parseval, tenemos para $j = 1,2, \ldots$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|u^j(x)\right|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{u^j}(k)\right|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^{2j}|\hat{u}(k)|^2 < \infty \quad . \tag{4.3}$$

Usando la fórmula del binomio de Newton, esto es: para $s \in Z^+$ se verifica

$$(1+|k|^2)^s = \sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} \; |k|^{2j} \; ,$$

y por (4.3), obtenemos

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s|\hat{u}(k)|^2 < \infty \quad ,$$

i.e. $u \in H^s_{per}$ para $s \in Z^+$.

Para el caso $s \in \mathbb{R}^+$, sabemos que existe $m \in Z^+$ tal que $s \leq m$ y se cumple $(1+|k|^2)^s \leq (1+|k|^2)^m$, luego

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s|\hat{u}(k)|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^m|\hat{u}(k)|^2 < \infty$$

i.e. $u \in H^0_{per}$ para $s \in \mathbb{R}^+$.
Para $s \in \mathbb{R}^-$ tenemos $s = -r$ con $r \in \mathbb{R}^+$ y como $1 \leq (1+|k|^2)$, entonces

$$(1+|k|^2)^s = \frac{1}{(1+|k|^2)^r} \leq 1$$

y usando (4.1) obtenemos

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s |\hat{u}(k)|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{u}(k)|^2 < \infty\,,$$

i.e. $u \in H^s_{per}$ para $s \in \mathbb{R}^-$. Así, hemos probado que $P \subset H^s_{per}$, para $\forall s \in \mathbb{R}$.
Se observa que también se puede usar la versión generalizada del binomio de Newton.

Ahora probaremos que $H^s_{per} \subseteq \bar{P}^{\|\cdot\|_{H^s_{per}}}$. Para esto, sea $g \in H^s_{per}$, definimos α_n tal que

$$\alpha_n(k) = \begin{cases} \hat{g}(k) & , \quad si \quad |k| \leq n \\ 0 & , \quad si \quad |k| > n\,. \end{cases}$$

Afirmamos que $\alpha_n \in S(Z)$. En efecto, para n fijo tenemos que

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^j |\alpha_n(k)| = \sum_{k=-n}^{n} |k|^j |\hat{g}(k)| < \infty\,, \qquad \forall\ j\,.$$

Luego, $g_n := \alpha_n^{\vee} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_n\,(k) e^{ikx}$ con $g_n \in P$ y $\widehat{g_n} = \alpha_n$.
Además, se verifica

$$\begin{aligned} \|g_n - g\|_s^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s |\widehat{g_n}(k) - \hat{g}(k)|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k>n} (1+|k|^2)^s |\hat{g}(k)|^2 \to 0 \end{aligned}$$

cuando $n \to +\infty$, pues $g \in H^s_{per}$. Esto es, $g \in \bar{P}^{\|\cdot\|_s}$.

Proposición 4.2 Sea, $s, r \in \mathbb{R}$ tal que $s \geq r$ entonces $H^s_{per} \subset H^r_{per}$. i.e. H^s_{per} está inmerso continuamente y densamente en H^r_{per} y vale

$$\|f\|_r \leq \|f\|_s, \forall f \in H^s_{per}\,.$$

En particular, tenemos que si $s \geq 0$, entonces

$$H^s_{per} \subset L^2([-\pi,\pi]).$$

Además, vale la identificación «isométricamente isomorfo»

$$(H^s_{per}) \ \equiv H^{-s}_{per}, \forall s \in \mathbb{R}\,,$$

donde la dualidad es implementada por el par

$$< f, g >_* = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)\hat{g}(k), \qquad \forall f \in H^{-s}_{per}, \quad g \in H^s_{per}. \tag{4.4}$$

Prueba.- Como $1 \leq (1+|k|^2)$ entonces $(1+|k|^2)^r \leq (1+|k|^2)^s$ si $r \leq s$. Así, se satisface

$$0 \leq \frac{(1+|k|^2)^r}{(1+|k|^2)^s} \leq 1 \quad si \quad r \leq s. \tag{4.5}$$

Usando (4.5) tenemos

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^r\,|f(k)| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\underbrace{\frac{(1+|k|^2)^r}{(1+|k|^2)^s}}_{\leq 1}(1+|k|^2)^s\left|\hat{f}(k)\right|^2$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^s\left|\hat{f}(k)\right|^2 < \infty \qquad (4.6)$$

siempre que $f \in H^s_{per}$. Multiplicando por 2π a ambos lados de la desigualdad (4.6) obtenemos que $f \in H^r_{per}$ si $f \in H^s_{per}$ (i.e. $H^s_{per} \subset H^r_{per}$) y además

$$\|f\|_r \leq \|f\|_s.$$

Con esto se ha probado la inclusión continua.

A seguir probaremos que la inclusión es densa, i.e. $\overline{H^s_{per}}^{\|\cdot\|_r} = H^r_{per}$. En efecto, basta mostrar $H^r_{per} \subset \overline{H^s_{per}}^{\|\cdot\|_r}$.

Sea $g \in H^r_{per}$ entonces usando la densidad de P en H^r_{per} tenemos que existe $g_n \in P$ tal que $g_n \to g$ en H^r_{per}. Como también $P \subset H^s_{per}$, entonces $g_n \in H^s_{per}$ y $g_n \to g$ en la norma $\|\cdot\|_r$ entonces $g \in \overline{H^s_{per}}^{\|\cdot\|_r}$.

Si $f \in H^{-s}_{per}$ la igualdad (4.4) nos permite definir L_f como: $L_f(g) =< f, g >_*,\ \forall g \in H^s_{per}$. Esta L_f es un funcional lineal continuo en H^s_{per}. Esto es, L_f es lineal con $\|L_f\| \leq \|f\|_{-s}$, i.e. $L_f \in \left(H^s_{per}\right)'$.

Sea $\psi \in (H^s_{per})'$, utilizando el Teorema de Representación de Riesz tenemos que $\exists!\,\phi \in H^s_{per}$ tal que

$$\|\phi\|_s = \|\psi\|, \qquad (4.7)$$

y

$$< \psi, g > \;=\; < g, \phi >_s \quad \forall g \in H^s_{per} \qquad (4.8)$$

$$= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\hat{g}(k)\overline{(1+|k|^2)^s\hat{\phi}(k)}. \qquad (4.9)$$

Sabemos que $\phi \in H^s_{per}$ entonces

$$((1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}\ \hat{\phi}(k))_{k\in Z} \in l^2. \qquad (4.10)$$

Si definimos como: $\hat{f}(k) := \overline{(1+|k|^2)^s\hat{\phi}(k)},\ \forall k \in Z, \qquad (4.11)$

vemos que: $f \in H^{-s}_{per}$ En efecto, de la definición de $\hat{f}(k)$, (4.11) y (4.10) tenemos

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^{-s}\left|\hat{f}(k)\right|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^{-s}\ \left|\ \overline{(1+|k|^2)^s\hat{\phi}(k)}\right|^2$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^s\ \left|\hat{\phi}(k)\right|^2 < \infty. \qquad (4.12)$$

De (4.9) tenemos que existe $f \in H^{-s}_{per}$ tal que

$$< \psi, g > \;=\; 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\hat{g}(k)\hat{f}(k)$$

$$= \;< f, g >_*,\quad \forall g \in H^s_{per}. \qquad (4.13)$$

De (4.12) y (4.7) tenemos que

$$\|f\|_{-s}^2 = \|\phi\|_s^2 = \|\psi\|^2,$$

de donde concluimos que $\|f\|_{-s} = \|\psi\|$. Esto es $(H_{per}^s)'$ es isométricamente isomorfo a H_{per}^{-s}.

Proposición 4.3 (Caracterización de H_{per}^m, con $m \in Z$) Sea $m \in \mathbb{N}$ entonces

$$f \in H_{per}^m \qquad sii \qquad \partial^j f = f^j \in L_{per}^2 \qquad j \in \{0,1, \ldots \ ,m\},$$

$$P' \qquad f^0 = f.$$

donde la derivada es tomada en el sentido de P' y $f^0 = f$.
Además, las normas $\|\cdot\|_m$ y $|||\cdot|||_m$ son equivalentes, i.e. existen constantes positivas A_m y B_m tal que

$A_m\|f\|_m \overset{m}{\leq} |||f|||_m \leq \overset{m}{B_m}\|f\|_m$, $\forall f \in H_{per}^m$, donde

$$|||f|||_m := \left[\sum_{j=0}^{m} \left\|\partial^j f\right\|_{L^2}^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Prueba.- Sea $f \in H_{per}^m$, entonces

$$\left((1+|k|^2)^{\frac{m}{2}} \ \hat{f}(k)\right)_{k\in Z} \in l^2. \qquad (4.14)$$

Por otro lado, observamos que

$$\left|(ik)^j \hat{f}(k)\right| = |ik|^j \left|\hat{f}(k)\right| \leq (1+|k|^2)^{\frac{m}{2}} \left|\hat{f}(k)\right|, para \ \ j = 0,1 \ldots, m. \qquad (4.15)$$

En efecto,

$$|k|^j \leq \left[(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}}\right]^j \leq \left[(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}}\right]^m$$

para $j = 0,1 \ldots, m.$
Luego, de (4.14) y (4.15) tenemos que $\left((ik)^j \hat{f}(k)\right)_{k\in Z} \in l^2$ para $j = 0,1 \ldots, m.$

Como $\left|\widehat{f^j}(k)\right| = \left|(ik)^j \hat{f}(k)\right|$ para $j = 0,1 \ldots, m$, entonces $\left(\widehat{f^j}(k)\right)_{k\in Z} \in l^2$ para $j = 0,1 \ldots, m$ y por lo tanto $f^j \in L^2([-\pi,\pi])$ para $j = 0,1 \ldots, m$ y así la identidad de Parseval y (4.15) nos permite realizar la siguiente estimativa

$$\begin{aligned} |||f|||_m^2 \ &:= \ \sum_{j=0}^{m} \left\|f^j\right\|_{L^2}^2 \\ &= \ 2\pi \sum_{j=0}^{m} \left\|\widehat{f^j}\right\|_{l^2}^2 \\ &= \ 2\pi \sum_{j=0}^{m} \left\|(ik)^j \hat{f}\right\|_{l^2}^2 \\ &= \ 2\pi \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|(ik)^j \hat{f}(k)\right|^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 2\pi \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+|k|^2)^m \left|\hat{f}(k)\right|^2 \\
&= \sum_{j=0}^{m} \|f\|_m^2 \\
&= (m+1)\|f\|_m^2 \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

i.e. $|||f|||_m \leq \sqrt{m+1}\ \|f\|_m$.

Recíprocamente, si $f^j \in L^2([-\pi,\pi])$ para $j = 0,1 \dots, m$, entonces $\widehat{f^j}(k) \in l^2$, i.e.

$$\left((ik)^j \hat{f}(k)\right)_{k\in Z} \in l^2.$$

Ahora, recordemos que $\left|i^j\right| = 1$ y que $(1+|ik|^2)^m = \sum_{j=0}^{m} c_j\,|ik|^{2j}$ con $c_j = \binom{m}{j}$. Así, usando esto y la identidad de Parseval, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\|f\|_m^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+|k|^2)^m \left|\hat{f}(k)\right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{m} c_j |ik|^{2j}\right) \left|\hat{f}(k)\right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{j=0}^{m} c_j \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|(ik)^j \hat{f}(k)\right|^2\right) \\
&= 2\pi \sum_{j=0}^{m} c_j \left\|\widehat{f^j}\right\|_{l^2}^2 \\
&= \sum_{j=0}^{m} c_j \left\|f^j\right\|_{L^2}^2 \\
&\leq \left(\max_{j\in\{o,\cdots,m\}} c_j\right) |||f|||_m^2 < \infty.
\end{aligned}
$$

Es decir, $\|f\|_m \leq \sqrt{\text{máx}_{j\in\{o,\cdots,m\}} c_j}\ \ |||\ f\ |||_m$ o mejor aún

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\text{máx}_{j\in\{o,\cdots,m\}} c_j}}\right) \|f\|_m \leq |||\ f\ |||_m.$$

El siguiente lema es fundamentalmente usado en el estudio de ecuaciones de evolución no lineal.

Teorema 4.1 Si $s > \frac{1}{2}$ entonces se verifican

1. La serie de Fourier de $f \in H_{per}^s$ converge absoluta y uniformemente en $[-\pi,\pi]$, i.e. la serie de Fourier de f

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

converge absolutamente y uniformemente en $[-\pi,\pi]$.

2. Lema de Inmersión de Sobolev: $H^s_{per} \subset C_{per}$ y hace corresponder a $f \in H^s_{per}$ la función $g \in C_{per}$, donde $g(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}$ y satisface

$$\|g\|_\infty \leq \|f\|_{l^1} \leq C\|f\|_s, \quad \forall f \in H^s_{per} \qquad (4.17)$$

Prueba.- Recordemos previamente que si $s > \frac{1}{2}$ entonces

$$\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^{-s}\right]^{\frac{1}{2}} < \infty. \qquad (4.18)$$

Desde que $s > \frac{1}{2}$ usamos (4.18) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz para conseguir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)| &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(1+|k|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{f}(k)}{(1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}} \\
&\leq \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s |\hat{f}(k)|^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^{-s}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_s \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^{-s}\right]^{\frac{1}{2}} < \infty \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

Así, $\left(\hat{f}(k)\right)_{k\in Z} \in l^1$ y además debido al M-test de Weierstrass tenemos que la serie de Fourier de f

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

converge absolutamente y uniformemente en $[-\pi, \pi]$.
Si definimos como

$$g(x) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

tenemos que $g \in C_{per}([-\pi, \pi])$
Afirmamos que $f = g$ en P'. En efecto,

$$\begin{aligned}
< g, \phi > &= \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\phi(x)dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} \phi(x) dx \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} \phi(x) dx \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) \hat{\phi}(-k) \\
&= < f, \phi >, \forall \phi \in P,
\end{aligned}$$

donde hemos usado la Generalización de la Identidad de Parseval. Así, $f = g$ en P'. De (4.19) conseguimos

$$|g(x)| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_s \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^{-s}\right]^{\frac{1}{2}} \quad , \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Tomando supremo obtenemos

$$\|g\|_\infty \leq \|\hat{f}\|_{l^1} \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^{-s}\right]^{\frac{1}{2}}}_{C:=} \|f\|_s . \tag{4.20}$$

La continuidad de la aplicación: $f \in H^s_{per} \mapsto g \in C_{per}$ es consecuencia de (4.20).

Definición 4.4 Sea $f, g \in H^s_{per}$ con $s > \frac{1}{2}$ debido al Lema de inmersión de Sobolev podemos definir el producto de f con g por

$$< f.g, \phi >= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\phi(x)dx, \qquad \phi \in P$$

Vemos que $f.g \in C_{per} \subset P'$ y probaremos que con este producto H^s_{per} es un algebra de Banach siempre que $s > \frac{1}{2}$.

Definición 4.5 (Convolución de sucesiones numéricas) Sean β y α sucesiones, la convolución de β y α es la sucesión $\alpha * \beta$ definido por

$$(\alpha * \beta)_k = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \alpha_j \beta_{k-j} \text{ siempre que tenga sentido.}$$

Proposición 4.4 (Desigualdad de Young) Sea $\alpha \in l^1$ y $\beta \in l^2$ entonces $\alpha * \beta \in l^2$ y

$$\|\alpha * \beta\|_{l^2} \leq \|\alpha\|_{l^1} \|\beta\|_{l^2}.$$

En particular, para todo $\alpha \in l^1$ fijado, la aplicación L definida por

$$\begin{aligned} L: \quad & l^2 \to l^2 \\ & \beta \mapsto \alpha * \beta \end{aligned}$$

Es un operador lineal acotado de l^2 y $\|L\| \leq \|\alpha\|_{l^1}$.

Prueba.- Tomando módulo a $(\alpha * \beta)_k$ y considerando $|\alpha_j| = |\alpha_j|^{\frac{1}{2}} |\alpha_j|^{\frac{1}{2}}$ e inmediatamente aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz se consigue para todo $k \in Z$,

$$\begin{aligned} |(\alpha * \beta)_k| &\leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\alpha_j \beta_{k-j}| \\ &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\alpha_j|^{\frac{1}{2}} (|\alpha_j|^{\frac{1}{2}} |\beta_{k-j}|) \\ &\leq \left[\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\alpha_j|\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\alpha_j| |\beta_{k-j}|^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\alpha\|_{l^1}^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\alpha_j| |\beta_{k-j}|^2\right]^{\frac{1}{2}} . \end{aligned} \tag{4.21}$$

Elevando al cuadrado la desigualdad (4.21), sumando sobre k e intercambiando el orden de la suma obtenemos

$$\begin{aligned}
\|\alpha * \beta\|_{l^2}^2 &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |(\alpha * \beta)_k|^2 \\
&\leq \|\alpha\|_{l^1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\alpha_j| |\beta_{k-j}|^2 \\
&= \|\alpha\|_{l^1} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\alpha_j| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\beta_{k-j}|^2 \\
&= \|\alpha\|_{l^1} \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\alpha_j| \right) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |\beta_m|^2 \\
&= \|\alpha\|_{l^1}^2 \|\beta\|_{l^2}^2
\end{aligned}$$

Lema 4.1 Sean a y $b \in [0, \infty)$ y $s \geq 0$. Entonces existen constantes positivas m_s y M_s dependiendo únicamente de s, tal que

$$m_s(a^s + b^s) \leq (a + b)^s \leq M_s(a^s + b^s). \tag{4.22}$$

Prueba.- Si $a = 0$ no hay nada que probar. Así, consideramos $a > 0$. Ahora, podemos observar que (4.22) es equivalente a

$$m_s\left(1 + \left(\tfrac{b}{a}\right)^s\right) \leq \left(1 + \tfrac{b}{a}\right)^s \leq M_s\left(1 + \left(\tfrac{b}{a}\right)^s\right). \tag{4.23}$$

Así, es suficiente probar que existen m_s y M_s tal que

$$m_s(1 + r^s) \leq (1 + r)^s \leq M_s(1 + r^s), \ \forall r \epsilon [0, \infty). \tag{4.24}$$

Observamos que para todo $r, s \geq 0$, tenemos

$$1 \leq (1 + r)^s \text{ y } r^s \leq (1 + r)^s,$$

y sumando ambas desigualdades se consigue:

$$1 < 1 + r^s \leq 2(1 + r)^s,$$

i.e.

$$\frac{1}{2} \leq \frac{(1+r)^s}{1+r^s}, \quad \forall r, s \geq 0. \tag{4.25}$$

Ahora, para $r > 1$, tenemos

$$(1 + r)^s \leq (r + r)^s = (2r)^s \leq 2^s r^s \leq 2^s(1 + r^s)$$

i.e.

$$\frac{(1+r)^s}{1+r^s} \leq 2^s, \quad \forall r > 1. \tag{4.26}$$

Observamos que la función $F(r) = \frac{(1+r)^s}{1+r^s}$ es continua en el compacto [0,1], luego ella alcanza máximo y mínimo en ese intervalo, i.e. $\exists r_i \in [0,1]$ tal que

$$F(r_1) = mín_{r\in[0,1]} F(r) \text{ y}$$

$$F(r_2) = máx_{r\in[0,1]} F(r) \tag{4.27}$$

y como F nunca se anula en [0,1], entonces $F(r_i) > 0$. Ahora, de (4.26) y (4.27), basta tomar el máximo entre 2^s y $F(r_2)$, es decir

$$\frac{(1+r)^s}{1+r^s} \leq C_s := máx\{2^s, F(r_2)\}, \ \forall r \geq 0. \tag{4.28}$$

De (4.25) y (4.28) se concluye.

Teorema 4.2 Si $s > \frac{1}{2}$ entonces H^s_{per} es un Algebra de Banach. En particular, existe una constante positiva C_s dependiendo únicamente de s tal que

$$\|fg\|_s \leq C_s \|f\|_s \|g\|_s \quad, \forall f \quad, g \in H^s_{per}.$$

Prueba.- Usando el Lema de Inmersión de Sobolev, tenemos

$$\begin{aligned}
\widehat{(fg)}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\hat{f}(j)e^{ijx}\right)g(x)e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\hat{f}(j)\int_{-\pi}^{\pi}g(x)e^{-i(k-j)x}dx \\
&= \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\hat{f}(j)\hat{g}(k-j) \\
&= (\hat{f} * \hat{g})(k) \qquad (4.29)
\end{aligned}$$

Usando el Lema 4.1 tenemos que

$$(1+|k|^2)^{\frac{s}{2}} \leq M_s(1+|k|^s) \leq M_s(1+|k-j|^s+|j|^s), \forall k,j \in Z, \qquad (4.30)$$

donde M_s es una constante positiva. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
&(1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}\left|\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\hat{f}(j)\hat{g}(k-j)\right| \\
&\leq M_s\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty}[1+|k-j|^s+|j|^s]\hat{f}(j)\hat{g}(k-j)\right| \\
&= M_s\left|\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\{\hat{f}(j)\hat{g}(k-j)+\hat{f}(j)|k-j|^s\hat{g}(k-j)+|j|^s\hat{f}(j)\hat{g}(k-j)\}\right| \\
&\leq M_s\{|\hat{f}*\hat{g}(k)|+|\hat{f}*\hat{r}(k)|+|\hat{h}*\hat{g}(k)|\} \qquad (4.31)
\end{aligned}$$

Donde $\hat{r}(m) = m^s\hat{g}(m)$ y $\hat{h}(m) = m^s\hat{f}(m)$. Observamos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|k^s\hat{g}(k)|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|k|^{2s}|\hat{g}(k)|^2 \\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^s|\hat{g}(k)|^2 \\
&= \frac{1}{2\pi}\|g\|_s^2 < \infty.
\end{aligned}$$

Así, $\hat{r} \in l^2$ y

$$\|\hat{r}\|_{l^2}^2 \leq \frac{1}{2\pi}\|g\|_s^2. \qquad (4.32)$$

Análogamente, tenemos que $\hat{h} \in l^2$ y

$$\|\hat{h}\|_{l^2}^2 \leq \frac{1}{2\pi}\|f\|_s^2. \qquad (4.33)$$

Desde que $\left(\hat{f}(m)\right)_{m\in Z}, (\hat{g}(m))_{m\in Z} \in l^1 \cap l^2$ y $\left(\hat{h}(m)\right)_{m\in Z}, (\hat{r}(m))_{m\in Z} \in l^2$, la proposición 4.4 (Desigualdad de Young para la convolución), (4.30) y (4.29) nos conduce a

$$\left((1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}\left|\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\hat{f}(j)\hat{g}(k-j)\right|\right)_{k\in Z} \in l^2.$$

y además

$$\begin{aligned}
\|fg\|_s^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^s\left|\widehat{fg}(k)\right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^s\left|\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\hat{f}(j)\hat{g}(k-j)\right|^2 \\
&\le 2\pi M_s^2\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|\hat{f}*\hat{g}(k)\right|^2+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|\hat{f}*\hat{r}(k)\right|^2+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|\hat{h}*\hat{g}(k)\right|^2\right\} \\
&\le 2\pi M_s^2\left\{\left\|\hat{f}*\hat{g}\right\|_{l^2}^2+\left\|\hat{f}*\hat{r}\right\|_{l^2}^2+\left\|\hat{h}*\hat{g}\right\|_{l^2}^2\right\} \\
&\le 2\pi M_s^2\left\{\left\|\hat{f}\right\|_{l^1}^2\|\hat{g}\|_{l^2}^2+\left\|\hat{f}\right\|_{l^1}^2\|\hat{r}\|_{l^2}^2+\|\hat{g}\|_{l^1}^2\left\|\hat{h}\right\|_{l^2}^2\right\} \\
&\le 2\pi M_s^2\left\{C^2\|f\|_s^2\frac{1}{2\pi}\|g\|_s^2+C^2\|f\|_s^2\frac{1}{2\pi}\|g\|_s^2+C^2\|g\|_s^2\frac{1}{2\pi}\|f\|_s^2\right\} \\
&\le \underbrace{C^2M_s^2}_{C_s^2:=}\|f\|_s^2\|g\|_s^2,
\end{aligned}$$

donde hemos usado explícitamente la desigualdad de Young para la convolución (Proposición 4.4), la identidad de Parseval y las desigualdades (4.17), (4.32) y (4.33).

5. Existencia y unicidad de solución de la ecuación KdV- Kuramoto - Sivashinsky

Teorema 5.1 Sea s fijo, $\beta > 0$ y la ecuación

$$(P)\left|\begin{array}{l} u \in C([0,+\infty), H^s) \\ \partial_t u + \partial_x^3 u + \beta(\partial_x^4 u + \partial_x^2 u) = 0 \in H^{s-4} \\ u(0) = \quad \phi \in H^s \end{array}\right.$$

Entonces (P) posee una única solución $u \in C([0,\infty), H^s)$

Prueba.- La prueba lo hacemos ordenadamente en varios pasos.

1. Primero obtenemos el candidato a solución. Para conseguir ese candidato tomamos la transformada de Fourier a la ecuación

$$\partial_t u = \quad -\partial_x^3 u - \beta(\partial_x^4 u + \partial_x^2 u)$$

y conseguimos

$$\partial_t \hat{u} = \left(ik - \beta(k^2-1)\right)k^2\hat{u},$$

que es una EDO con dato inicial $\hat{u}(0) = \hat{\phi}$.

Resolviendo el PVI conseguimos

$$\hat{u} = e^{\left(ik-\beta(k^2-1)\right)k^2 t}\hat{\phi},$$

de donde obtenemos nuestro candidato a solución:

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{u}(k)\phi_k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{ik^3t}}_{G_k:=} \underbrace{e^{-\beta(k^2-1)k^2t}}_{F_k:=} \hat{\phi}(k)\phi_k \qquad (5.1) \end{aligned}$$

donde $\phi_k(x) = e^{ikx}$. Se observa que cuando $k \in Z$ y $|k| = 1$ o $k = 0$, F_k es 1.
Cuando $k \in Z$ y $0 \neq |k| \neq 1$ tenemos que $(k^2 - 1)k > 0$ y desde que $\beta > 0$ tenemos que $F_k \to 0$ cuando $t \to +\infty$. También $\left|e^{ik^3t}\right| = 1$.

2. En segundo lugar, probaremos que $u(t) \in H^s$:
   Sea $t > 0$, $\phi \in H^s$ y observando que $e^{-\beta(k^2-1)k^2t} < 1$, tenemos

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{H^s}^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left|\hat{\phi}(k)\right|^2 e^{-\beta(k^2-1)k^2t} \\ &\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left|\hat{\phi}(k)\right|^2 = \|\phi\|_{H^s}^2 < \infty . \qquad (5.2) \end{aligned}$$

   Así, $u(t) \in H^s$.

3. Ahora, probaremos que $u(t)$ es continua:

$$\begin{aligned} &\|u(t) - u(t')\|_{H^s}^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left|\hat{\phi}(k)\right|^2 \left| \underbrace{\left(e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)t} - e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)t'}\right)}_{H(t)} \right|^2 . \qquad (5.3) \end{aligned}$$

   Se observa que $\lim_{t\to t'} H(t) = 0$. Ahora, necesitamos de la convergencia uniforme de la serie para el intercambio de límites. Para esto, tomamos el n-ésimo término de la serie y lo mayoramos por una serie convergente, i.e.

$$\begin{aligned} I_{k,t} &:= 2\pi(1+k^2)^s \left|\hat{\phi}(k)\right|^2 |H(t)|^2 \\ &\leq 4\pi(1+k^2)^s \left|\hat{\phi}(k)\right|^2 , \end{aligned}$$

   donde hemos usado la desigualdad triangular (propiedad de la norma) y la desigualdad $e^{-t} \leq 1$ siempre que $t \geq 0$.
   Así,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{k,t} \leq 2\|\phi\|_{H^s}^2 < \infty ,$$

   y usando el Teorema del M-Test de Weierstrass tenemos que la serie converge uniformemente. Luego, está permitido el intercambio de límite y conseguimos que

$$\lim_{t\to t'} \|u(t) - u(t')\|_{H^s} = 0 .$$

4. Probaremos que

$$\left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} + \partial_x^3 u + \beta(\partial_x^4 u + \partial_x^2 u) \right\|_{H^{s-4}}^2 \to 0 \quad \textit{cuando} \quad h \to 0 .$$

En efecto,

$$\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h}+\partial_x^3 u+\beta(\partial_x^4 u+\partial_x^2 u)\right\|_{H^{s-4}}^2$$
$$=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^{s-4}\left|\hat{\phi}(k)\right|^2.$$
$$\left|e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)t}.\underbrace{\left\{\frac{e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)h}-1}{h}+(ik)^3+\beta((ik)^4+(ik)^2)\right\}}_{M(h):=}\right|^2 \tag{5.4}$$

Usando L'Hospital tenemos que $M(h)\to 0$ cuando $h\to 0$. Ahora, necesitamos la convergencia uniforme de la serie para habilitar el intercambio de límites. Para ello procedemos mayorando el k-ésimo término de la serie. Previamente observamos para $h>0$:

$$\frac{e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)h}-1}{h}=\int_0^h\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial s}\left\{e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)s}\right\}ds$$
$$=\int_0^h\frac{1}{h}[ik^3-\beta(k^2-1)k^2]\,e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)s}ds$$

y tomando módulo tenemos

$$\left|\frac{e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)h}-1}{h}\right|\leq\{|k|^3+\beta|k|^4+\beta|k|^2\}. \tag{5.5}$$

Mayoramos $[M(h)]^2$ usando la desigualdad (5.5) y obtenemos

$$[M(h)]^2\leq C_5[1+|k|^2]^4. \tag{5.6}$$

Pasamos a mayorar el k-ésimo término de la serie, donde se usa la estimativa (5.6)

$$(1+k^2)^{s-4}\left|\hat{\phi}(k)\right|^2e^{-2\beta(k^2-1)k^2t}[M(h)]^2\leq(1+k^2)^{s-4}\left|\hat{\phi}(k)\right|^2C_5(1+|k|^2)^4$$
$$=C_5(1+k^2)^s\left|\hat{\phi}(k)\right|^2$$

y sabemos que la serie $\sum_{\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s\left|\hat{\phi}(k)\right|^2=\|\phi\|_{H^s}^2<\infty$ desde que $\phi\in H^s$. Usando el Teorema M-Test de Weierstrass tenemos que la serie (5.4) converge uniformemente y por lo tanto es posible intercambiar límites y obtener lo que se quería mostrar, i.e.

$$\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h}+\partial_x^3 u+\beta(\partial_x^4 u+\partial_x^2 u)\right\|_{H^{s-4}}^2\to 0\quad cuando\quad h\to 0.$$

5. Obtenemos la dependencia continua de los datos iniciales, i.e. sean ϕ y $\tilde{\phi}$ datos próximos en H^s, probamos que sus correspondientes soluciones u y $\tilde{u}$, respectivamente, también están próximos en el espacio solución, esto es,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|u(t)-\tilde{u}(t)\|_{H^s}\leq\left\|\phi-\tilde{\phi}\right\|_{H^s}. \tag{5.7}$$

de aquí tenemos que si $\phi\to\tilde{\phi}$ entonces $u\to\tilde{u}$.

6. Unicidad de la solución. La desigualdad (5.7) nos permitirá mostrar que la solución es única. En efecto, sea $\phi\in H^s$ y supongamos que existan u y $\tilde{u}$ dos soluciones, entonces usando (5.7) tenemos,

$$\|u(t)-\tilde{u}(t)\|_{H^s}\leq\sup_{t\in\mathbb{R}}\|u(t)-\tilde{u}(t)\|_{H^s}\leq\|\phi-\phi\|_{H^s}=0,$$

de donde concluimos que $u=\tilde{u}$.

7. Análogamente a (5.2), sea $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_s^2 &\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left|\hat{\phi}(k)\right|^2 < \infty \\ &= \|\phi\|_s^2 \leq e^{\frac{\beta}{2}t} \|\phi\|_s^2 , \end{aligned}$$

pues $1 \leq e^{\frac{\beta}{2}t}$ para $t \geq 0$. Así, $u(t) \in H^s$ y $\|u(t)\|_s \leq \|\phi\|_s$.

Observación 6 *De la existencia y unicidad de solución, y del ítem 5 del desarrollo de la prueba del Teorema precedente, podemos decir que el problema está bien colocado. Además es posible analizar y probar que* $u(t) \in H^r, \ \forall \ r \in \mathbb{R}$.

6. Conclusiones

Se hizo un profundo estudio, dando sutiles pruebas de resultados de espacios de Sobolev Periódico, e introduciendo pertinentes observaciones. Asimismo, se probó la existencia y unicidad de solución del modelo de ondas en un fluido viscoso.

7. Referencias bibliográficas

[1] Biagioni H. A., Bona J.L., Iorio R. and Scialom M. (1996) On the Korteweg de Vries Kuramoto Sivashinsky equation Vol 1 No 1 page 1-20.

[2] Bona J.L. and Smith R.(1975) The initial value problem for the KdV equation. Philos. Trans. Royal Soc. London, A 278, page 555-604.

[3] Ercolani N.M., McLaughlin D. W. and Roitner H.(1996) Attractors and transients for a perturbed periodic KdV equation: a nonlinear spectral analysis, J. of Nonlinear Science.

[4] Iorio, R. (2002) Fourier Analysis and partial Differential Equations. Cambridge University.

[5] Kato T.(1983) On the Cauchy problem for the (generalized) KdV equations, Studies in Applied Math. Aadvances in Math. Suppl. studies, 8, page 93-128.

[6] Kenig C. Ponce G. and Vega L.(1991) Wellposedness of the initial value problem for the KdV equations, J. Amer. Math. Soc., 4 page 323-347.

[7] Liu Z. and Zheng S. (1999) Semigroups associated with dissipative system. Chapman Hall/CRC

[8] Muñoz Rivera, J.E. (2007) Semigrupos e equações Diferenciais Parciais. Petropolis-LNCC

[9] Pazy A. (1983) Semigroups of linear operator and applications to partial differential equations. Applied Mathematical Sciences. 44 Springer Verlag. Berln.

[10] Santiago, Y. (2003) Sobre la analiticidad del semigrupo C_o asociado a un sistema viscoelástico. Pesquimat Vol VI, No. 2, 27-36.

[11] Santiago, Y. (2012) Global existence and exponential stability for a coupled wave System. Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications, Volume No. 16, Issue No. 12, page: 29-46.

[12] Santiago, Y. (2014) Tópicos de Análisis Funcional. Fundamentos y Aplicaciones. Editorial Académica Española.

[13] Tadmor E. (1986) The wellposedness of the Kuramoto Sivashinsky equation, SIAM J. Math. Anal. 17 page 884-893.

[14] Topper J. and Kawahara T.(1978) Appoximate equations for long nonlinear waves on a viscous fluid, J. Phys. Soc. Japan, 44, page 663-666.