



Investigación Educativa  
vol. 12 N.º 21, 171 - 179  
Enero-Junio 2008,  
ISSN 17285852



## LA GEOMETRÍA: DE LAS IDEAS DEL ESPACIO UNIVERSITARIO AL ESPACIO DE LAS IDEAS EN EL AULA

### GEOMETRY: FROM IDEAS OF UNIVERSITY SPACE TO THE SPACE OF IDEAS IN THE CLASSROOM

*Jose Luis Maurtua Aguilar\**

#### RESUMEN

Uno de los cambios más señalados en el currículo de las matemáticas escolares, tanto en la educación primaria y secundaria, es la recuperación de la geometría para conseguir un mejor conocimiento del espacio y como fuente de modelos y situaciones problemáticas para el aprendizaje de las matemáticas; ya que desde la perspectiva de los libros de textos producidos en las últimas décadas, la geometría ha ido desplazándose hacia el final de los libros en educación primaria para desaparecer en la educación secundaria.

**Palabras clave:** Estrategias metodológicas, algoritmo, modelar, constructivo, pensamiento geométrico.

#### ABSTRACT

One of the most significant changes in the curriculum of mathematic for scholars, in elementary school education

---

\* Magíster en la mención de Educación Matemática. Estudios de doctorado en educación. Capacitador Docente en el Programa Nacional de Formación y Capacitación Permanente PRONAFCAP 2007- 2008. E-mail: maurtuajose20@yahoo.Com

as well as in high school education is the recuperation of geometry in order to obtain problematical situations for mathematics learning; according with the point of view of textbooks produced in the past decades, geometry has been placed at the end of the book in elementary education and it will disappear in high school education.

**Keywords:** Methodological strategies, algorithm, to model, constructive, geometrical thought.

## CONTENIDO

El enfoque del área de matemática propuesto en el diseño curricular nacional se inscribe en una óptica contemporánea de resolución de problemas, y señala que aprender a resolver y formular problemas es aspiración de una buena educación matemática.

Sin embargo, los resultados en la evaluación nacional 2004 permiten inferir que la didáctica de nuestro país responde a un enfoque centrado en enseñanza de reglas y algoritmos.

Esta aseveración se basa en la constatación de que las preguntas en las que los estudiantes tuvieron mayor éxito fueron, precisamente, aquellas que solo demandaban un aprendizaje reproductivo, relacionado con la aplicación de algoritmos convencionales a ejercicios de rutina.

Las consecuencias de esta forma de realizar el proceso docente se observa al tener estudiantes poco reflexivos, críticos, analíticos y creativos; que presentan obviamente dificultades para establecer conexiones entre conceptos, resolver problemas novedosos, matematizar y modelar situaciones concretas; amerita entonces potenciar estas capacidades que son necesarias para la inserción de los ciudadanos en nuestra sociedad, que cada vez más se ve influenciada por el desarrollo científico y tecnológico.

En mi proyecto de tesis *“Estrategias Metodológicas para potenciar la capacidad de resolución de problemas de manera creativa en la geometría del espacio para alumnos de quinto grado de secundaria”*, se plantea desarrollar una serie de orientaciones de carácter metodológico para hacer que la enseñanza de este componente matemático sea vivido en la escuela como una grata experiencia basada en un aprendizaje constructor, sensible y lúdico. Ya que, de todas las disciplinas matemáticas, la geometría es la que ofrece mayores posibilidades a la

hora de experimentar, mediante materiales adecuados, sus métodos, sus conceptos, sus propiedades y sus problemas. Es por ello que la enseñanza de la geometría no debe sucumbir a las limitaciones formales, simbólicas y algebraicas de los conocimientos matemáticos. Será precisamente en este primer estadio de sensibilidad donde el tacto, la vista, el dibujo y la manipulación permitirán familiarizar al alumno con todo un mundo de formas, figuras y movimientos sobre el cual asentar posteriormente los modelos abstractos.

Al respecto Adam, P. (1967) ya afirmaba: “Para nuestros alumnos de clases elementales lo concreto empieza por ser el mundo observable, lo que impresiona directamente sus sentidos, y al mismo tiempo el que los invita a actuar”. En concordancia con lo manifestado la geometría, su abordaje a través de estrategias metodológicas activas y el material que se use van a jugar un papel esencial en el mundo de la enseñanza de ésta.

Con la idea de plantear algunas sugerencias sobre esta temática analizaremos el pensamiento matemático y sus actuales implicancias en la enseñanza de la geometría, que nos permitirán vislumbrar las dificultades en el manejo de las nociones geométricas, que deberán ser abordadas por los maestros en actividad y por aquellos que desde nuestro claustro universitario se forman con tendencias metodológicas acordes a las características de nuestros educandos.

Principales características que se ponen de manifiesto:

- Resolver situaciones problemáticas rutinarias de pocas etapas que involucren el uso de figuras geométricas planas elementales, sólidos geométricos y algunas de sus propiedades más elementales.
- Relacionar las propiedades o atributos de una misma o de diferentes figuras o sólidos geométricos entre sí y realizar conexiones entre los diversos contenidos de este campo conceptual. Por ejemplo, no pueden calcular el área de un triángulo equilátero conociendo sólo el perímetro.
- Calcular áreas de figuras geométricas elementales en los casos que se quiere aplicar directamente la fórmula, pues no tienen la noción de área, ni recuerdan la fórmula correspondiente.
- Al interpretar el teorema de Pitágoras, ya que no identifican correctamente los elementos del triángulo rectángulo, sobre todo aquellos que no presentan uno de sus catetos paralelos a la horizontal. La mayor parte

de los estudiantes que usa correctamente este teorema evidencia aplicarlo en forma mecánica para calcular un lado a partir de los otros dos.

Las capacidades vinculadas con estos contenidos se desarrollan con más profundidad en el cuarto grado de secundaria de acuerdo a lo que establece el DCN; sin embargo, cuando llegan al quinto grado un gran número de estudiantes no ha interiorizado las nociones geométricas, ni tampoco ha adquirido habilidades necesarias para enfrentar la última etapa de su escolaridad.

Estas debilidades se deben a que se prioriza la enseñanza de contenidos y de algoritmos para calcular distancias, medir lados o segmentos, áreas y volúmenes, etc.; y la resolución de problemas totalmente descontextualizados a la realidad en que vive el alumno.

Este proceso docente fomenta aprendizajes de procedimientos mecánicos, al pie de la letra, no comprendiendo los conceptos y definiciones, lo que trae como consecuencia el olvido de lo aprendido en corto tiempo. Otra causal que se evidencia es que la enseñanza de la geometría se desarrolla de forma aislada careciéndose la realización de conexiones entre los contenidos del área, entre otras áreas y entre lo que aprendió en el aula y la realidad.

Por otra parte, se da más relevancia a las definiciones formales, notaciones, terminología; dejándose de lado el trabajo, la manipulación de material concreto; siendo este tipo de actividad el que puede conseguir que el estudiante logre visualizar y comprender las definiciones, las propiedades y las principales nociones vinculadas con este componente temático, para después enunciarlo formalmente.

Según el informe pedagógico del rendimiento estudiantil (2004), se señalan los siguientes resultados: De acuerdo al cuestionario de oportunidades de aprendizaje de quinto grado (ODA5SM), el 85% de los estudiantes cuenta con docentes que trabajan en profundidad actividades relacionadas con la identificación y el cálculo de razones trigonométricas en triángulo rectángulo. Asimismo, el 49% de los docentes que promueven con frecuencia la resolución de problemas involucran el cálculo de estas razones y solo el 5% señala no hacerlo. Por otro lado, el 58% de los estudiantes tiene docentes que consideran que ejercicios similares a los propuestos en la EN 2004 son fáciles de resolver por los estudiantes. Sin embargo, el trabajo con ejercicios y problemas que los docentes indican

que desarrollan con sus estudiantes y las expectativas que tienen acerca de su desempeño en este contenido no se ven reflejados en los resultados de esta evaluación.

Una vez más, esta situación da cuenta del tipo de enseñanza y del tipo de conocimientos que el docente transmite a sus estudiantes, una enseñanza basada en la repetición algorítmica y mecanizada de recetas y en la relación de problemas tipo, fuera de contexto y de una realidad cercana para el estudiante; y una enseñanza aislada, compartimentalizada ya que no permite establecer conexiones entre las diversas redes conceptuales.

Además de la contradicción entre lo que los docentes manifiestan y las dificultades de sus estudiantes, podría reflejar una de las estrategias más utilizadas: “Las clases expositivas”, en las que los docentes desarrollan los contenidos y los estudiantes, son solo receptores de los nuevos conocimientos. Como es evidente, en clases como estas, es lógico que los docentes consideren que sí han enfrentado a sus estudiantes con situaciones problémicas; sin embargo, estos no han participado de forma activa en la resolución de problemas, ni han logrado desarrollar capacidades que se lograrían si el estudiante se enfrentara por sí solo a verdaderas situaciones problémicas.

En la experiencia de muchos docentes, estos comentan que, cuando se les presenta a los estudiantes una verdadera situación problémica, a pesar de lo mucho que explicaron, la mayoría de estudiantes no logró comprender nada o casi nada. Esta situación se explica por la existencia de diferentes niveles de desarrollo de pensamiento matemático en el aula. Frente a este problema, trataremos de identificar estos diferentes niveles de razonamiento geométrico en los estudiantes tal como lo refiere el modelo de Van Hiele.

## **MODELO DE VAN HIELE**

Este modelo, desarrollado por Marie Van Hiele y DINA Van Hiele-Geldof, busca identificar y explicar los diferentes niveles de razonamiento, en particular para la geometría; siendo sus ideas centrales las siguientes:

- Se pueden encontrar varios niveles diferentes de desarrollo en el pensamiento matemático de un grupo de estudiantes.
- Un estudiante sólo puede comprender realmente nociones o partes de la matemática que son adecuadas para su nivel de razonamiento.

- Si una relación matemática no puede ser expresada en el nivel actual de razonamiento del estudiante, se tiene que esperar a que este alcance el nivel de pensamiento adecuado para comprender tal concepto o tal noción.
- No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada forma pero sí se le puede ayudar, mediante una enseñanza adecuada de la matemática, a que llegue lo antes posible a razonar de esa forma.

El modelo de Van Hiele presenta una clasificación y descripción de los niveles de razonamiento que es un imperativo tomarlas en cuenta para optimizar la enseñanza de la geometría desde las aulas.

Estos niveles los describimos a continuación:

### **NIVEL 1: Visualización o Reconocimiento**

Este es el nivel más elemental de razonamiento. En esta etapa los estudiantes perciben las figuras geométricas globalmente, como un todo, como unidades, se limitan a describir los objetos por su aspecto, apariencia física o por su posición y no por sus partes o propiedades.

Las clasificaciones o diferenciaciones de figuras que realizan se basan principalmente en semejanzas y diferencias físicas globales entre ellas como, por ejemplo, formas, colores o tamaños. En este nivel no debemos esperar respuestas formales en las descripciones referidas, por ejemplo a los ángulos o al número de vértices o aristas en un poliedro.

### **NIVEL 2: Análisis**

En este nivel empieza el análisis de los conceptos geométricos; es decir, los estudiantes ya conocen los elementos, propiedades y características de los objetos geométricos estudiados; sin embargo, no son capaces de relacionar una propiedad con otra. Por ejemplo, para describir figuras dan respuestas referidas a ángulos rectos, triángulos, etc., es decir una serie de propiedades inconexas.

En este nivel de desempeño, los estudiantes son capaces de describir algunas propiedades básicas a partir de la observación y manipulación y de generalizar estas propiedades a objetos geométricos del mismo tipo.

### **NIVEL 3: Deducción Informal o de Clasificación**

En este nivel de desempeño comienza a desarrollarse la capacidad de razonamiento formal matemático. Los estudiantes ya pueden establecer relaciones entre propiedades y características de los objetos geométricos y pueden deducir algunas propiedades a partir de otras (Implicaciones sencillas).

Además, pueden comprender una demostración del docente o pueden entenderla en un texto, pero no son capaces de realizar una demostración por ellos mismos, pues perciben estos pasos sucesivos en forma aislada, no comprendiendo la estructura de la demostración por lo que no ven la necesidad de relacionar estos diferentes pasos.

En este nivel de razonamiento los estudiantes están en la capacidad de dar definiciones exactas y formales sin necesidad de redundar en las propiedades o características como ocurría en el nivel anterior.

### **NIVEL 4: Deducción Formal**

En este nivel de razonamiento los estudiantes pueden comprender y construir una prueba o una demostración matemática mediante axiomas, teoremas, etc. Además se logra la plena capacidad del razonamiento lógico matemático.

Estos niveles de desempeño no pueden ser atados a algún grado escolar, ya que cada vez que se presenten nuevos conceptos o nuevos contenidos el estudiante tendrá que pasar por cada uno de estos niveles. Algunas veces este paso será muy rápido y otras tomará un poco más de tiempo; sin embargo, a pesar de que el paso por estos niveles es independiente del método empleado, es el docente quien debe brindar oportunidades para que un estudiante pase de un nivel a otro.

### **SUGERENCIAS METODOLÓGICAS**

- El docente debe emplear todas las herramientas necesarias para identificar el nivel de razonamiento de cada uno de los estudiantes con los que trabaja en el aula, para desarrollar secuencias de actividades estructuradas para que los estudiantes progresen de un nivel de razonamiento a otro y de esta manera superar sus deficiencias y dificultades.

- Se debe cambiar el enfoque de enseñanza de la geometría ligado al cálculo de distancias, longitudes, áreas, volúmenes, etc. Por un enfoque que priorice el desarrollo de habilidades y destrezas; es decir, la comprensión de las principales nociones geométricas, visualizando elementos propiedades, construcción de modelos, etc. que permitan a los estudiantes partir de experiencias diversas para complementar, ampliar y reacomodar sus redes conceptuales, de manera que puedan exitosamente hacer frente a situaciones problemáticas novedosas y reales. Por ejemplo organizar la construcción de un omnipoliedro, para conocer a través de esta, las propiedades básicas y generales de los poliedros
- Se debe trabajar situaciones problemáticas significativas y actividades con material concreto o gráfico, realizar pruebas o demostraciones sencillas con papel; así mismo se debe promover la construcción de figuras geométricas a partir del uso de lápiz y papel, compás, transportador, etc.; para que así refuercen la comprensión y el manejo de conceptos y propiedades de los objetos geométricos con el propósito de resolver problemas. En esta parte, por ejemplo, pedir a los alumnos que demuestren cómo medir la amplitud de un ángulo por los extremos de dos postes al caer a un lago profundo e inaccesible.
- Los gráficos de las figuras no se deben presentar solo en posición estándar. Los triángulos son presentados con una base paralela a la horizontal; lo mismo ocurre con el cuadrado, y en los triángulos rectángulos con catetos paralelos a la horizontal. Este hecho introduce una dificultad, pues, de acuerdo con el primer nivel de razonamiento, un estudiante empieza a construir sus conceptos de manera global a partir de la imagen visual de objetos concretos, sin realizar un análisis de las definiciones matemáticas o formales que los describen.
- Se deben trabajar situaciones problemáticas significativas que demanden que los estudiantes realicen conexiones entre los diversos contenidos del área.
- Se deben brindar a los estudiantes oportunidades para relacionar los objetos geométricos con objetos reales de su entorno; es decir, para que puedan modelar situaciones reales haciendo uso de objetos geométricos. Por ejemplo, para calcular el volumen de la esfera -que en situaciones normales resulta dificultoso para el alumno- utilizando los procedimientos siguientes resulta más significativo y duradero el aprendizaje:

- a) Tomamos un cuenco en forma de semiesfera y un envase cilíndrico de radio de la base igual al radio del cuenco y altura del doble del radio.
- b) Vertimos agua en el cuenco con forma de semiesfera hasta llenarlo; una vez lleno se vacía su contenido en el cilindro.
- c) Observamos que el cuenco queda vacío y el cilindro lleno hasta la tercera parte.
- d) Repetir el proceso dos veces más hasta que el cilindro quede llenado en su totalidad.
- e) De este hecho se deduce que el volumen de la semiesfera es un tercio del volumen del cilindro.

Estas deducciones obtenidas a través de materiales concretos permitirán fijar de manera natural las nociones geométricas en los alumnos, que en la mayoría de los casos resultan ser complejas por su nivel de pensamiento geométrico desarrollado hasta ese momento.

Concluyendo con el enfoque geométrico de la matemática, es oportuno invocar a todos los centros superiores de estudios y a sus autoridades sobre el rol que tienen en la formación del futuro docente, formación que debe involucrar una serie de innovaciones referidas al qué y al cómo enseñar las matemáticas desde las ideas del espacio al espacio de las ideas en el aula; ya que son los responsables de conducir las riendas de la educación en nuestro país

## BIBLIOGRAFÍA

Alsina, Claudina y otros (1998). *Materiales para construir la geometría*. España. 14-15

Calvo Xelvo y otros (2002). *La geometría: De las ideas del espacio al espacio de las ideas en el aula*. España. 33

De Guzman, Miguel (1993). *Enseñanza de las ciencias y las matemáticas: Tendencias e innovaciones*. España. 96

Puig Adam, Pere (1958). *El material didáctico actual*. España.

Ramírez, Ignacio (2006). *Los métodos problémicos en la enseñanza*. Perú. 124.

Vila, Antoni y Callejo, Luz (2004). *Matemática para aprender a pensar*. España. 26.