

Estrategia de Control de un Robot Móvil con Tracción Diferencial en Base al Análisis Cinemático

Control strategy of a mobile robot with differential drive based on kinematic analysis

Bruno Vargas Tamani¹

Facultad de Ingeniería Electrónica y Eléctrica, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú

Resumen— Realizamos un análisis del modelo cinemático de un robot con tracción diferencial, con la finalidad de plantear una estrategia de control del robot. Se analiza la manera de realizar la planificación de la trayectoria más conveniente, para conseguir el desplazamiento desde una posición inicial, establecida por sus coordenadas iniciales en su plano de trabajo, así como por una orientación inicial del robot; hacia una posición final deseada, especificada por sus coordenadas en el plano finales, con una dirección final deseada. El análisis cinemático, nos permite conocer como la variación de las velocidades, de ambos motores del robot de tracción diferencial, se pueden utilizar para desarrollar una trayectoria, sin que interfieran simultáneamente el control de la posición cartesiana del robot y el control de su orientación. Los resultados del análisis cinemático fueron simulados para varias trayectorias propuestas.

Abstract— We conducted an analysis of the kinematic model of a robot with differential drive, in order to raise a robot control strategy. How to make planning more convenient path to achieve the shift from an initial position, established by its initials coordinates in your work surface, as well as an initial orientation of the robot is analyzed; toward a desired end position specified by its coordinates in the end plane, with a final desired direction. Kinematic analysis allows us to know how the variation in speed of both engines differential drive robot, can be used to develop a career, without interfering simultaneously controlling the robot Cartesian position and orientation control. The results of the kinematic analysis were simulated trajectories for various proposals.

Palabras clave- tracción diferencial, modelo cinemático, punto de equilibrio, orientación, posición.

Keys words - differential traction, kinematic model, equilibrium point, orientation.

I. INTRODUCCIÓN

Las plataformas más utilizadas para los robots móviles son las de tracción diferencial (*differential steering*), estas utilizan motores independientes para cada una de las ruedas pero situados sobre el mismo eje, además utiliza ruedas locas o puntos de sostenimiento para proporcionar estabilidad [1].

De esta forma, se logra que el robot avance en línea recta fijando ambos motores a la misma velocidad, también se le puede hacer girar en una u otra dirección cuando se aplican velocidades diferentes, y se logra que gire sobre su propio eje cuando las velocidades tienen igual magnitud con sentidos opuestos [2]. La cinemática permite analizar el movimiento sin tener en cuenta las fuerzas que lo producen, ni las que se generan; su análisis nos permite especificar que velocidades pueden ser utilizadas para planificar una trayectoria para el robot, de tal manera que pueda trasladarse desde una posición cartesiana y orientación inicial otra una posición cartesiana y orientación final.

Es necesario para facilitar el análisis cinemático, introducir suposiciones de diseño y de operación como: el robot se mueve sobre una superficie plana, el deslizamiento en la ruedas izquierda y derecha es despreciable, el robot es rígido y no cuenta con partes flexibles, el robot tiene restricciones no holonómicas [2].

II. MODELAMIENTO DE UN ROBOT MÓVIL DE DOS RUEDAS CON TRACCIÓN DIFERENCIAL

Consideremos a un robot móvil de dos ruedas con tracción diferencial, que se representa en la Fig. 1. Las variables del sistema se definen como:

θ_1 : posición angular de la rueda izquierda

θ_2 : posición angular de la rueda derecha

φ : posición angular del cuerpo del robot

v_1 : velocidad lineal de la rueda izquierda

¹ Bruno Vargas Tamani, E-mail: bvargast@unmsm.edu.pe
Recibido: Mayo 2015 / Aceptado: Junio 2015

- v_2 : velocidad lineal de la rueda derecha
- $\dot{\theta}_1$: velocidad angular de la rueda izquierda
- $\dot{\theta}_2$: velocidad angular de la rueda derecha
- v : velocidad lineal del cuerpo del robot
- $\dot{\phi}$: velocidad angular del cuerpo del robot
- b : radio del robot
- r : radio de las ruedas

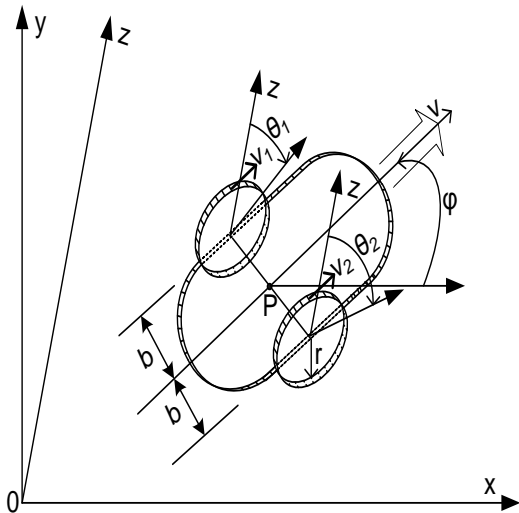


Fig 1. Diagrama del robot móvil de tracción diferencial.

Como en todo cuerpo se cumplen [3]:

$$v_1 = r\dot{\theta}_1 \tag{1}$$

$$v_2 = r\dot{\theta}_2 \tag{2}$$

Al considerar al robot como un cuerpo rígido, la velocidad v del centro de masa, se obtiene como el promedio de las velocidades lineales de sus extremos, que es donde se encuentran las ruedas. De acuerdo a (1) y (2):

$$v = \frac{(v_1 + v_2)}{2} = \frac{r}{2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \tag{3}$$

Vamos a realizar un análisis de las ecuaciones cinemáticas, que relacionan la velocidad de giro de cada una de las ruedas con las variables de posición del robot (x, y, ϕ) .

El robot al moverse en contra de las manecillas del reloj, aumenta el ángulo ϕ .

La rueda izquierda sostiene un arco de radio f , por lo que la distancia que recorre esa rueda s_1 , está dada por ese radio de giro f .

Para la rueda derecha, se tiene un arco de radio $(f+2b)$ y la distancia que recorre esa rueda es s_2 . La Fig. 2, muestra los arcos mencionados y los ángulos de dirección ϕ_1 y ϕ_2 , antes y luego del recorrido de dichos arcos.

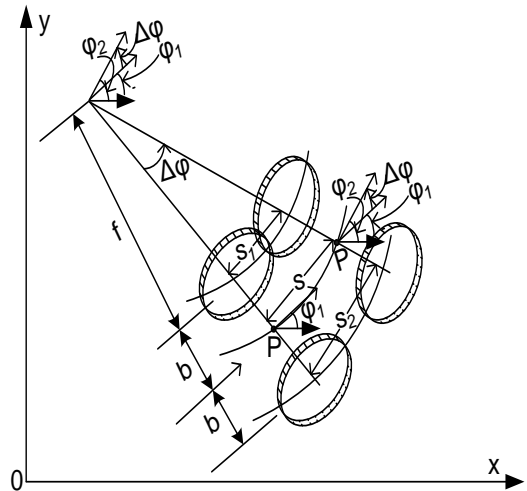


Fig. 2. Arcos generados por las ruedas y ángulos de dirección.

Analicemos como se relacionan los arcos s_1 y s_2 recorridos por las ruedas, con los ángulos θ_1 y θ_2 que se han desplazado cada rueda.

La Fig. 3, muestra para la rueda izquierda, los ángulos desplazados antes y luego del recorrido de dichos arcos.

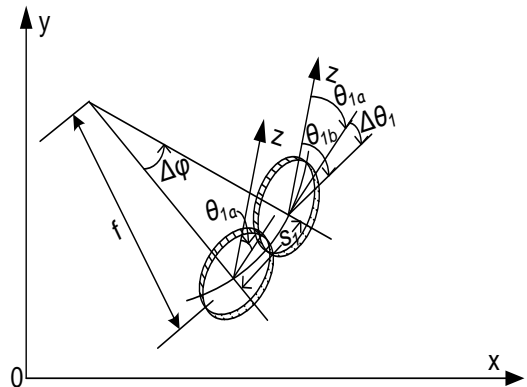


Fig. 3. Ángulos desplazados antes y después por la rueda izquierda.

En el instante t la rueda izquierda se desplazó un ángulo θ_{1a} . En el instante $(t + \Delta t)$ esa rueda se desplazó un ángulo θ_{1b} . La distancia s_1 recorrida es:

$$s_1 = r\Delta\theta_1 = r(\theta_{1b} - \theta_{1a}) \tag{4}$$

De la misma manera se cumple para la rueda derecha:

$$s_2 = r\Delta\theta_2 = r(\theta_{2b} - \theta_{2a}) \tag{5}$$

Las ecuaciones (4) y (5), también se pueden expresar en función del radio de giro de cada una de las ruedas en el plano xy .

$$s_1 = f\Delta\phi \tag{6}$$

De la misma manera se cumple para la rueda derecha:

$$s_2 = (f + 2b)\Delta\varphi \quad (7)$$

Restando (6) de (7) y (4) de (5), obtenemos:

$$s_2 - s_1 = r(\Delta\theta_2 - \Delta\theta_1) = 2b\Delta\varphi \quad (8)$$

De (8) despejamos:

$$\Delta\varphi = \frac{r}{2b}(\Delta\theta_2 - \Delta\theta_1) \quad (9)$$

La velocidad de giro del robot $\dot{\varphi}$, se puede obtener a partir de (9), de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r}{2b} \left(\frac{\Delta\theta_2}{\Delta t} - \frac{\Delta\theta_1}{\Delta t} \right) \\ \dot{\varphi} &= \frac{r}{2b} \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta_2}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta_1}{\Delta t} \right) \\ \dot{\varphi} &= \frac{r}{2b} (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \end{aligned} \quad (10)$$

Respecto a las coordenadas cartesianas del robot en el plano xy , dado que se conoce la velocidad lineal v según (3), descomponemos dicha velocidad en cada uno de los ejes:

$$\dot{x} = v_x = v \cos(\varphi) \quad (11)$$

$$\dot{y} = v_y = v \sin(\varphi) \quad (12)$$

III. ANÁLISIS CINEMÁTICO DEL ROBOT DE TRACCIÓN DIFERENCIAL

A. Análisis de la dirección φ , velocidad lineal v y desplazamiento L del robot

De acuerdo a (10), se obtiene una dirección φ de equilibrio cuando $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1$. Además, se observa que cualquier dirección φ , puede ser una de equilibrio. En la condición de equilibrio la velocidad que adquiere el robot se determina por (3).

La distancia L recorrida por el robot, debe estar descrita de acuerdo a (3) por:

$$\dot{L} = v = \frac{r}{2}(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1) \quad (13)$$

El sistema que describe el comportamiento del robot, se obtiene agrupando (10) y (13):

$$\dot{\varphi} = \frac{r}{2b}(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1) \quad (14)$$

$$\dot{L} = \frac{r}{2}(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1) \quad (15)$$

El punto de equilibrio del sistema anterior, se obtiene cuando $\dot{\theta}_2(0) = \dot{\theta}_1(0) = 0$. Además, se observa que cualquier dirección φ y distancia L , puede ser de equilibrio. Las ecuaciones (14) y (15), muestran que la dirección φ y distancia L , al desear cambiarlas por la acción de las señales están bastante acopladas; con lo cual resulta complicada tratar de variarlas simultáneamente a través de $\dot{\theta}_2$ y $\dot{\theta}_1$.

La Fig. 4, muestra el desplazamiento del robot, cuando en un tramo de tiempo $0 < t < t_1$, se tiene $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1$, con $\dot{\theta}_2 > 0$ y luego de $t > t_1$, se hace $\dot{\theta}_2 > \dot{\theta}_1$.

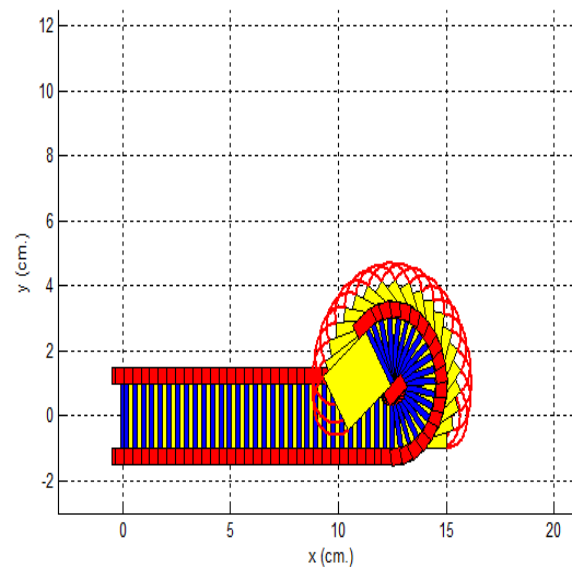


Fig. 4. Desplazamiento del robot, tramo $0 < t < t_1$, $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1$, con $\dot{\theta}_2 > 0$ y luego de $t > t_1$, se hace $\dot{\theta}_2 > \dot{\theta}_1$.

La Fig. 5, muestra el desplazamiento del robot, cuando en un tramo de tiempo $0 < t < t_1$, se tiene $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1$, con $\dot{\theta}_2 > 0$ y luego de $t > t_1$, se hace $\dot{\theta}_1 > \dot{\theta}_2$.

La Fig. 6, muestra el desplazamiento del robot, cuando en un tramo de tiempo $0 < t < t_1$, se tiene $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1$, con $\dot{\theta}_2 < 0$ y luego de $t > t_1$, se hace $\dot{\theta}_2 > \dot{\theta}_1$.

La Fig. 7, muestra el desplazamiento del robot, cuando en un tramo de tiempo $0 < t < t_1$, se tiene $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1$, con $\dot{\theta}_2 < 0$ y luego de $t > t_1$, se hace $\dot{\theta}_1 > \dot{\theta}_2$.

Si consideramos condiciones iniciales nulas $\varphi(0) = \dot{\theta}_2(0) = \dot{\theta}_1(0) = L(0) = 0$, de (14) y (15) se deduce que:

$$\varphi = \frac{r}{2b}(\theta_2 - \theta_1) \quad (16)$$

$$L = \frac{r}{2}(\theta_2 + \theta_1) \quad (17)$$

Con lo cual los cambios de $\dot{\theta}_2$ y $\dot{\theta}_1$, producen cambios instantáneos en la dirección φ y en el desplazamiento L .

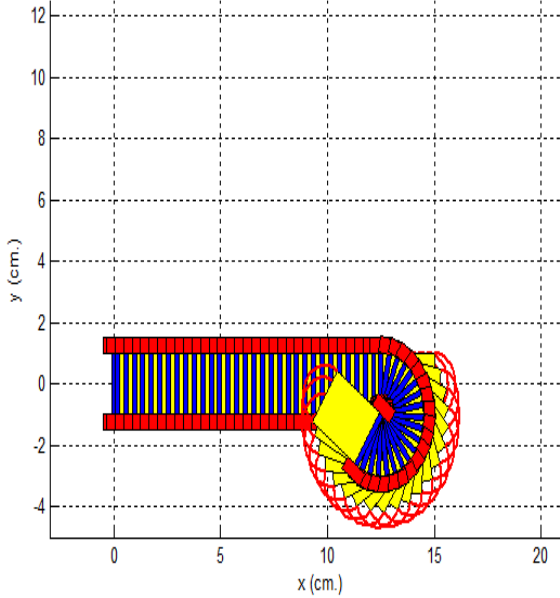


Fig. 5. Desplazamiento del robot, tramo $0 < t < t_1$, se tiene $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1$, con $\dot{\theta}_2 > 0$ y luego de $t > t_1$, se hace $\dot{\theta}_1 > \dot{\theta}_2$.

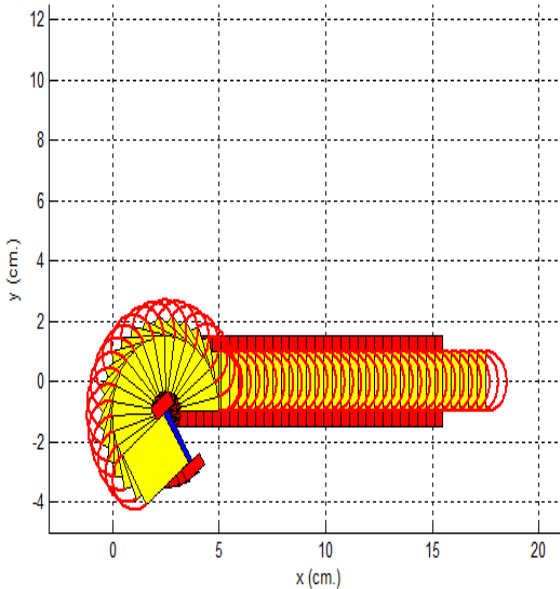


Fig. 6. Desplazamiento del robot, tramo $0 < t < t_1$, $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1$, con $\dot{\theta}_2 < 0$ y luego de $t > t_1$, se hace $\dot{\theta}_2 > \dot{\theta}_1$.

B. Análisis de la dirección φ y desplazamiento L por cambios de $\dot{\theta}_2$ y $\dot{\theta}_1$, por tramos de tiempo.

De acuerdo a (10), se obtiene una dirección φ de equilibrio cuando $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1$. Además, se observa que

cualquier dirección φ , puede ser una de equilibrio. En la condición de equilibrio la velocidad que adquiere el robot se determina por (3).

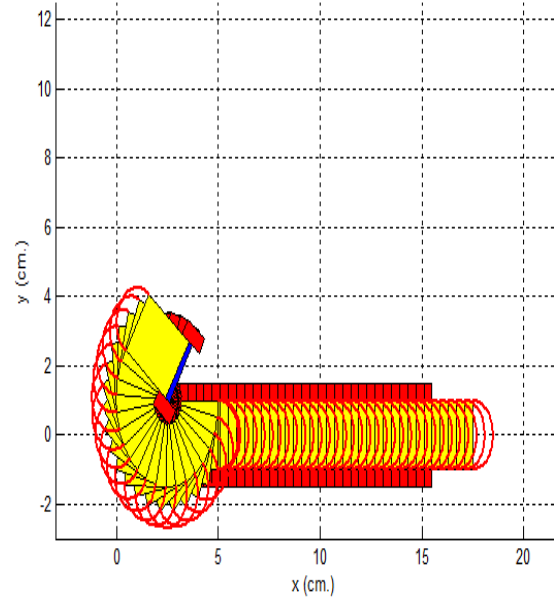


Fig. 7. Desplazamiento del robot, tramo $0 < t < t_1$, se tiene $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1$, con $\dot{\theta}_2 < 0$ y luego de $t > t_1$, se hace $\dot{\theta}_1 > \dot{\theta}_2$.

De acuerdo a (14) y (15), se pueden mantener la dirección φ y desplazamiento L , constantes escogiendo adecuadamente las señales $\dot{\theta}_2$ y $\dot{\theta}_1$.

Si se mantiene $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1$, según (14) la dirección φ no cambia (se mantiene la misma dirección); en ese caso, según (15) variando $\dot{\theta}_2$, se puede variar la distancia L . Así, en esa condición si $\dot{\theta}_2 > 0$, L crecerá a lo largo de una línea recta en la dirección de φ constante (ver Fig. 8).

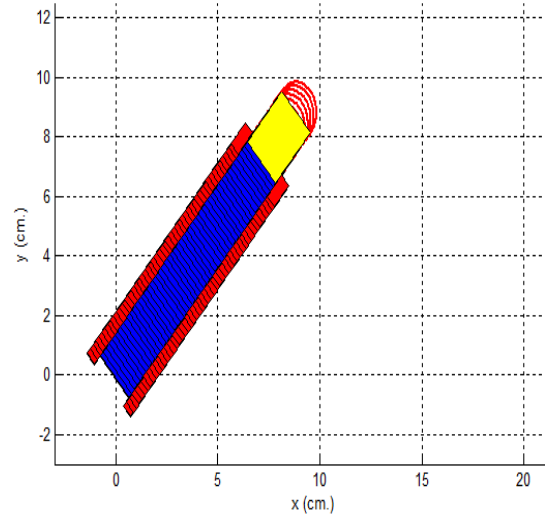


Fig. 8. Desplazamiento del robot, tramo $0 < t < t_1$, se tiene $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1$, con $\dot{\theta}_2 > 0$ y luego de $t > t_1$, se hace $\dot{\theta}_1 > \dot{\theta}_2$.

Si con $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1$ (dirección φ constante), se tiene $\dot{\theta}_2 < 0$, L crecerá a lo largo de una línea recta en la dirección contraria de φ constante (ver Fig. 9).

Según (15), si se mantiene $\dot{\theta}_1 = -\dot{\theta}_2$; la distancia L no cambia (el robot se mantiene en el mismo punto cartesiano (x, y)). Variando $\dot{\theta}_2$ se puede variar la dirección φ . Así, si en esa condición se hace $\dot{\theta}_2 > 0$, el ángulo φ crece en sentido anti horario, girando sobre el mismo punto cartesiano (x, y) (ver Fig. 10).

Si con $\dot{\theta}_1 = -\dot{\theta}_2$ (distancia L o punto cartesiano constante), se hace $\dot{\theta}_2 < 0$, el ángulo φ crece en sentido horario, girando sobre el mismo punto cartesiano (x, y) (ver Fig. 11).

C. Análisis de la dirección φ y de las coordenadas cartesianas x e y

Reiteramos las ecuaciones (10), (11) y (12), reemplazando (3) en (11) y (12):

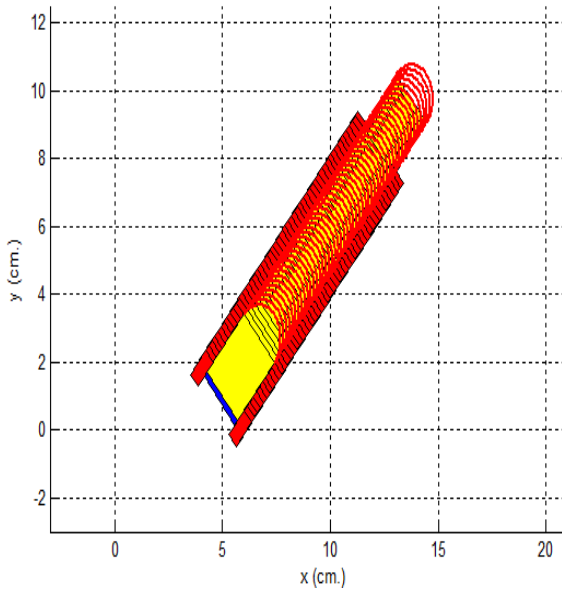


Fig. 9. Desplazamiento del robot, tramo $0 < t < t_1$, se tiene $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1$, con $\dot{\theta}_2 < 0$ y luego de $t > t_1$, se hace $\dot{\theta}_1 > \dot{\theta}_2$.

$$\dot{\varphi} = \frac{r}{2b}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \quad (18)$$

$$\dot{x} = v \cos(\varphi) = \frac{r}{2}(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1) \cos(\varphi) \quad (19)$$

$$\dot{y} = v \cdot \text{sen}(\varphi) = \frac{r}{2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \text{sen}(\varphi) \quad (20)$$

Analizando el punto de equilibrio del sistema, se encuentra esa condición para $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1 = 0$. Además se observa que cualquier dirección φ y coordenadas

cartesianas x e y , pueden formar un punto de equilibrio.

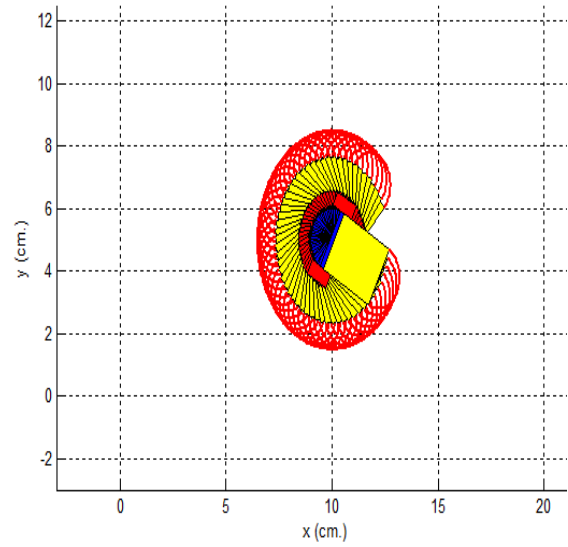


Fig. 10. Desplazamiento del robot, tramo $0 < t < t_1$, se tiene $\dot{\theta}_1 = -\dot{\theta}_2$, con $\dot{\theta}_2 > 0$ y luego de $t > t_1$, se hace $\dot{\theta}_1 > \dot{\theta}_2$.

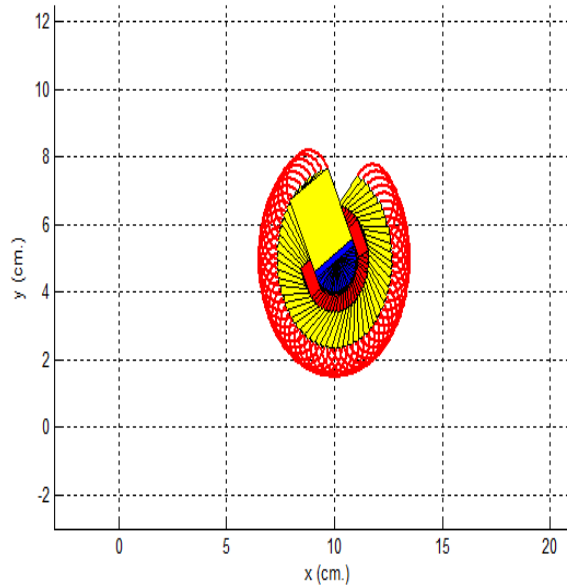


Fig. 11. Desplazamiento del robot, tramo $0 < t < t_1$, se tiene $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1$, con $\dot{\theta}_2 < 0$ y luego de $t > t_1$, se hace $\dot{\theta}_2 > \dot{\theta}_1$.

Si consideramos condiciones iniciales nulas, de (18), (19) y (20) obtenemos:

$$\varphi = \frac{r}{2b}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \quad (21)$$

$$x = \frac{r}{2} \int (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\varphi) dt \quad (22)$$

$$y = \frac{r}{2} \int (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \text{sen}(\varphi) dt \quad (23)$$

Analizaremos, como el móvil se puede trasladar desde un punto de equilibrio inicial a otro punto de equilibrio final, por la acción de las señales $\dot{\theta}_2$ y $\dot{\theta}_1$.

Según (21), la dirección φ sólo depende de $(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)$ y es independiente de x e y . Por lo tanto, podemos direccionar al robot a un valor deseado, combinando $\dot{\theta}_2$ y $\dot{\theta}_1$ adecuadamente y para mantener esa dirección en equilibrio debemos hacer $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1$ (para mantener el equilibrio completo del robot debemos hacer $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1 = 0$). Además según (21), el cambio de φ es instantáneo de acuerdo al cambio de $(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)$. Observar que si mantenemos $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1$ la dirección φ , se mantiene constante (en el equilibrio de φ), aunque las coordenadas cartesianas x e y , podrán seguir variando según (22) y (23), donde se observa que esas coordenadas también serán afectadas por el valor establecido de φ . Hasta aquí, sabemos que si deseamos cambiar de dirección φ , hacemos el cambio adecuado de $(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)$ y luego mantenemos $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1$.

Al analizar (19) y (20), se puede observar que se puede llegar a un punto de equilibrio cartesiano x e y , si hacemos $\dot{\theta}_1 = -\dot{\theta}_2$. Este resultado se puede aprovechar, para variar la dirección φ , independiente de x e y . Así entonces, podemos cambiar sólo de dirección φ , variando $(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)$ con la condición $\dot{\theta}_1 = -\dot{\theta}_2$, manteniendo la posición cartesiana x e y . Luego para mantener esa dirección φ , debemos hacer $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1$.

Ahora nos interesa saber, que puntos cartesianos de equilibrio x e y se pueden obtener al establecer φ manteniendo $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1$. Para pasar de un punto cartesiano a otro, se debe producir una variación de acuerdo a (19) y (20); allí se muestra que x e y están afectadas por la misma señal $(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$ y por la dirección φ , pero al variar $(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$ según (18) también podría variarse φ . Como x e y dependen de $\dot{\theta}_2$ y $\dot{\theta}_1$ de diferente manera, con esas señales no se puede llevar a un valor deseado de x y a otro valor deseado de y arbitrarios. Quiere decir, que si deseamos variar x de cierta forma elegida, se debe variar $(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$ convenientemente, así la coordenada y no podrá variar de cualquier forma deseada, porque será afectada por los cambios de dirección φ al variar x .

Veamos como se relacionan x e y al dividir (20) entre (19), del cual se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = tg(\varphi) \quad (24)$$

IV. ESTRATEGIA PARA PASAR DE UN PUNTO DE EQUILIBRIO A OTRO DE ACCIÓN $\dot{\theta}_2$ Y $\dot{\theta}_1$

De acuerdo a (10), se obtiene una dirección φ de equilibrio cuando $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1$. Además, se observa que cualquier dirección φ , puede ser una de equilibrio. En la condición de equilibrio la velocidad que adquiere el robot se determina por (3).

Sea un punto de equilibrio (x_d, y_d, φ_d) deseado del robot al cual se trata de llegar desde un punto de equilibrio inicial (x_i, y_i, φ_i) , por efecto de las variaciones de las señales $\dot{\theta}_2$ y $\dot{\theta}_1$. Del análisis del modelo cinemático del robot, dado por (18), (19) y (20), observamos que resulta complicado elegir una trayectoria deseada para el robot, en la cual la varíen simultáneamente las coordenadas del robot (x, y, φ) de una manera pre establecida, por efecto de las señales $\dot{\theta}_2$ y $\dot{\theta}_1$, debido al carácter de acoplamiento de las variables que se desean controlar.

Del análisis previo, podemos plantear una estrategia para llegar a un punto de equilibrio deseado, por la acción de las señales $\dot{\theta}_2$ y $\dot{\theta}_1$. Ya que resulta complicado controlar las tres variables simultáneamente, analicemos si se podría cumplir el objetivo controlando variables en etapas. De acuerdo a III.C, podemos variar la dirección φ , manteniendo las coordenadas x e y , si lo hacemos asegurando que $\dot{\theta}_1 = -\dot{\theta}_2$. También en III.C, se observó que podemos variar las coordenadas cartesianas x e y , manteniendo constante la dirección φ , si lo hacemos con la condición $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1$. Aunque en este último caso, las coordenadas x e y , están restringidas a cumplir (24).

Ya que el cambio de dirección φ es instantáneo; la estrategia consistirá en variar primero la posición cartesiana x e y , manteniendo constante la dirección φ . Según (24), esto equivale a que esas coordenadas variarán a lo largo de una línea recta. Esa recta debe iniciarse en las coordenadas iniciales (x_i, y_i) y debe terminar en las coordenadas finales (x_d, y_d) , manteniendo una dirección φ_p que permita pasar por esos puntos y que se puede calcular como :

$$\varphi_p = tg^{-1} \left(\frac{y_d - y_i}{x_d - x_i} \right) \quad (25)$$

Conocida la dirección φ_p , que permite llegar a las coordenadas (x_d, y_d) deseadas; primero por que deberemos cambiar la dirección inicial φ_i a la dirección φ_p , manteniendo las coordenadas iniciales (x_i, y_i) ; para ello debemos variar φ por acción de $\dot{\theta}_2$ y $\dot{\theta}_1$, asegurando la condición $\dot{\theta}_1 = -\dot{\theta}_2$.

Cuando se llegue a la dirección φ_p , podemos desplazar al robot en línea recta (es decir, manteniendo la dirección φ_p), eso se puede conseguir por acción de $\dot{\theta}_2$ y $\dot{\theta}_1$, si lo hacemos con la condición $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1$. En ese caso podemos controlar la distancia L, que debería recorrer el robot para llegar desde (x_i, y_i) a (x_d, y_d) , el valor de esa distancia se puede calcular como:

$$L = \sqrt{(y_d - y_i)^2 + (x_d - x_i)^2} \quad (26)$$

Esa línea recta asegura pasar por las coordenadas (x_d, y_d) deseadas; cuando se llegue a (x_d, y_d) se debe hacer $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1 = 0$, para mantener en equilibrio al robot esa posición cartesiana. El punto de equilibrio del robot en ese momento será robot (x_d, y_d, φ_p) . A continuación para llevar al robot a la dirección deseada φ_d ; nuevamente esto se puede hacer por acción de $\dot{\theta}_2$ y $\dot{\theta}_1$, manteniendo constante las coordenadas (x_d, y_d) ; asegurando la condición $\dot{\theta}_1 = -\dot{\theta}_2$.

Cuando se llegue a la dirección φ_d , el robot se ubicará en el punto deseado (x_d, y_d, φ_d) y para que se mantenga en ese valor de equilibrio, se vuelve a hacer $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1 = 0$.

V. RESULTADOS DE SIMULACIÓN DE LA ESTRATEGIA PROPUESTA PARA PLANIFICACIÓN DE LAS TRAYECTORIAS

Se ha diseñado un programa de simulación de trayectorias animadas, de los cuales se muestran los resultados en las siguientes figuras.

En la Fig. 12, se muestra la animación de la trayectoria planificada para que el robot se desplace desde las coordenadas iniciales $(15, 1, -135^\circ)$ a las coordenadas finales $(7, 5, 45^\circ)$. Se observa como el robot se orienta primero al ángulo adecuado, para direccionarse en línea recta a la posición cartesiana deseada, luego al llegar a la posición cartesiana deseada, se orienta a la posición angular deseada.

En la Fig. 13, se muestra la animación de la trayectoria planificada para que el robot se desplace desde las coordenadas iniciales $(3, 1, -45^\circ)$ a las coordenadas finales $(12, 5, 135^\circ)$. Se observa la trayectoria desarrollada, desde el cambio de dirección inicial, así como la trayectoria lineal desarrollada y como al final el robot se orienta a la posición angular deseada.

En la Fig. 14, se muestra la animación de la trayectoria planificada para que el robot se desplace desde las coordenadas iniciales $(3, 8, 45^\circ)$ a las coordenadas finales $(9, 2.5, -135^\circ)$. Al inicio el robot se orienta adecuadamente, para desarrollar una trayectoria en línea recta a la posición cartesiana

deseada, finalmente se orienta a la posición angular deseada.

En la Fig. 15, se muestra la animación de la trayectoria planificada para que el robot se desplace desde las coordenadas iniciales $(15, 8, 135^\circ)$ a las coordenadas finales $(10, 2, -45^\circ)$. El robot inicia rotando, para tomar la dirección que le permite ir en línea recta hasta la posición cartesiana deseada, cuando llega a esa posición se orienta al valor deseado de posición angular.

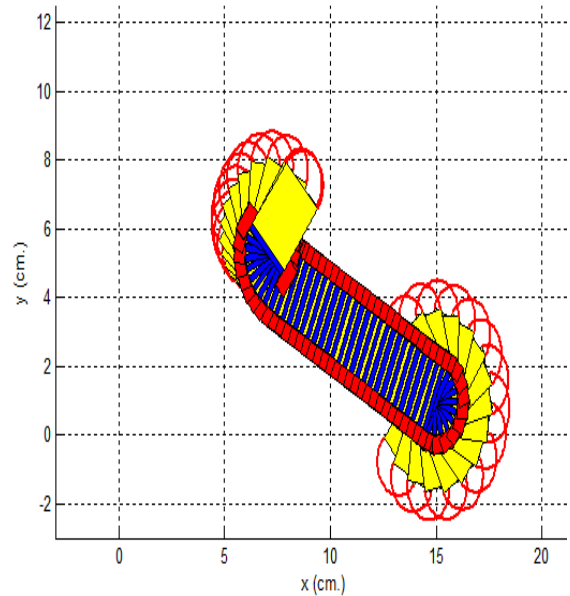


Fig. 12. Animación de la trayectoria planificada para el robot. Coordenadas iniciales $(15, 1, -135^\circ)$, coordenadas finales $(7, 5, 45^\circ)$.

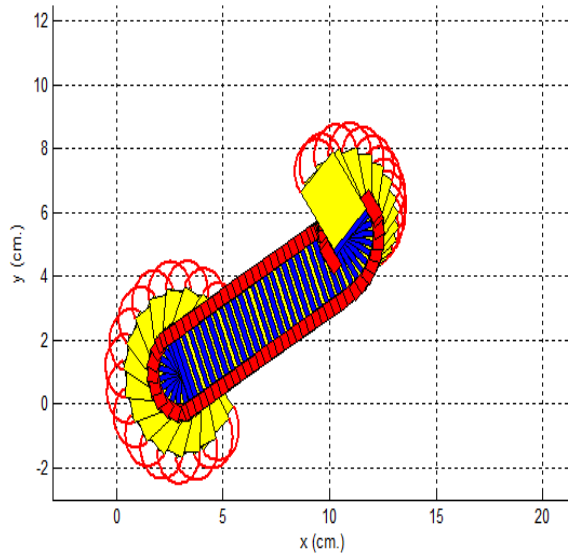


Fig. 13. Animación de la trayectoria planificada para el robot. Coordenadas iniciales $(3, 1, -45^\circ)$, coordenadas finales $(12, 5, 135^\circ)$.

VI. ANÁLISIS DE RESULTADOS

De acuerdo a los resultados de simulación, la estrategia planteada para obtener la trayectoria del robot de tracción diferencial, por la acción de las velocidades angulares que adoptarían los motores de cada rueda, permiten que el robot pueda trasladarse desde una posición cartesiana y dirección inicial, hasta una posición cartesiana y dirección final deseada. Se aprecia que en todos los caso, esa trayectoria se inicia con la ubicación del robot en una dirección adecuada, para que pueda después desarrollar una trayectoria en línea recta para llegar a la posición cartesiana deseada. Una vez que el robot llega a esa posición cartesiana deseada, se orienta a la posición angular deseada, manteniendo las coordenadas cartesianas deseadas.

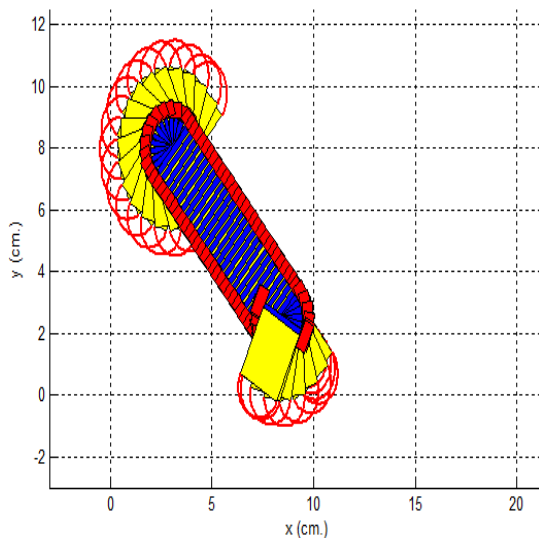


Fig. 14. Animación de la trayectoria planificada para el robot. Coordenadas iniciales (3, 8, 45°), coordenadas finales (9, 2.5, -135°).

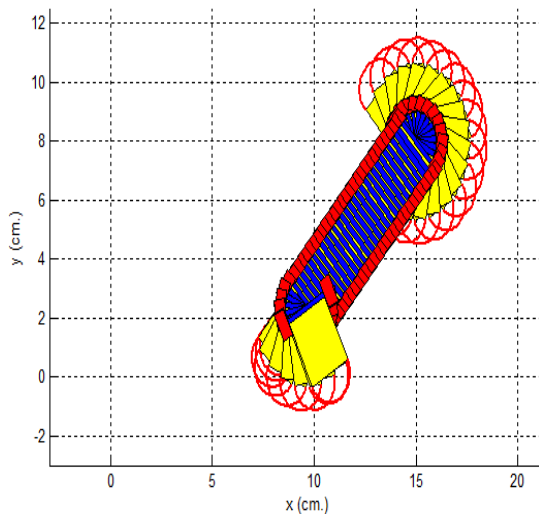


Fig. 15. Animación de la trayectoria planificada para el robot. Coordenadas iniciales (15, 8, 135°), coordenadas finales (10, 2, -45°).

V. CONCLUSIONES

El estudio cinemático, nos permite establecer una estrategia de planificación de trayectorias para que el robot de tracción diferencial, desarrolle el desplazamiento deseado, desde una posición cartesiana y orientación inicial, hacia una posición cartesiana y orientación final deseada. Nos permite establecer las condiciones, para que el control de las variables de posición cartesiana y de posición angular de dirección, se puedan realizar mediante las dos señales de control que consisten en las velocidades angulares de los motores. Esto último, se logra evitando el acople natural que existen entre las variables a ser controladas.

Mediante las pruebas de simulación se comprueba, que dividiendo la trayectoria total, en tres tramos claramente diferenciados: iniciar con orientar adecuadamente al robot (sin cambiar la posición cartesiana inicial), desde su posición angular inicial a la posición angular dada por (25); continuar con el control del desplazamiento en línea recta desde su posición cartesiana inicial, una distancia dada por (26) (sin cambiar la posición angular); terminar luego de llegar a la posición cartesiana deseada, con orientar el robot a de posición angular deseada (sin cambiar la posición cartesiana final).

REFERENCIAS

- [1] Ríos L. H. & Bueno M. "Modelo matemático para un robot móvil", *Scientia et Technica*, Año XIV, No 38, Junio de 2008. Disponible en: <http://www.redalyc.org/pdf/849/84903803.pdf>
Consultado el 5 de febrero del 2015.
- [2] Ramos-Silvestre E. R., Morales-Guerrero R., Silva-Ortigoza R. "Modelado, simulación y construcción de un robot móvil de ruedas tipo diferencial", *Lat. Am. J. Phys. Educ.* Vol. 4, No. 3, Sept. 2010. Disponible en: http://www.lajpe.org/sep10/420_Ramon_Silva.pdf
Consultado el 14 de febrero del 2015.
- [3] Valencia J. & Montoya A. "Modelo cinemático de un robot móvil tipo diferencial y navegación a partir de la estimación odométrica", *Scientia et Technica*, Año XV, No 41, Mayo de 2009. Disponible en: http://www.google.com.pe/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CBoQFjAAahUKEwj-sr3Yp5DIAhWHXR4KHQ1UARY&url=http%3A%2F%2Fdialnet.unirioja.es%2Fdescarga%2Farticulo%2F4729008.pdf&usg=AFQjCNFBUZ4iFmtl8tmvTII7_LcolaNO5g
Consultado el 12 de febrero del 2015.