

Propuesta de Diseño de Controlador PID para Una Amplia Gama de Plantas Sobreamortiguadas con Retardo

Proposal for PID controller design for a wide range of plants delayed overdamped

Bruno Vargas Tamani

Facultad de Ingeniería Electrónica y Eléctrica, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú

Resumen— Este artículo presenta el análisis de una propuesta de diseño de un controlador Proporcional Integral Derivativo (PID) que se puede utilizar para el control en lazo cerrado en una estructura en cascada y realimentación unitaria de plantas que puedan modelarse como de segundo orden sobreamortiguada con retardo. Se plantea un diseño PID ideal en base a un modelo representativo de planta, luego se propone la obtención de un controlador realizable. Se pone a prueba el PID realizable para el control de diversas plantas sobreamortiguadas con diferentes constantes de tiempo de menor a mayor valor y relaciones variadas de tiempo de retardo a constantes de tiempo mayor.

Abstract— This paper presents an analysis of a proposed design of a Proportional Integral Derivative (PID) controller which can be used for closed loop control in a cascading structure and unity feedback of plants that can be modeled as second order overdamped with delay. This raises a great PID design based on a representative model of the plant, and then it is proposed to obtain a workable controller. It tests the realizable PID control overdamped of the different plants with different time constants from lowest to highest value and varied relationships of delay time to constant of time.

Palabras Claves— controlador PID, diseño de PID, polos dominantes, lugar geométrico de las raíces, porcentaje de sobreimpulso, tiempo de establecimiento.

Key Words— PID controller, PID design, dominant poles, root locus, percentage of overshoot, settling time.

I. INTRODUCCIÓN

El controlador Proporcional Integral Derivativo conocido más simplemente como controlador PID, es el controlador más utilizado en la industria para el control de un amplio rango de procesos [1]. Desde su invención en 1910 por Elmer Sperry y las propuestas de los métodos de sintonía directa de Ziegler y Nichols en 1942, la popularidad del controlador PID creció tremendamente. Más del 90% de los controladores industriales son implementados en base a algoritmos PID por su simplicidad, sencillo entendimiento de su funcionamiento y facilidad de uso [2]. El procedimiento de sintonía es tedioso y requiere mucho tiempo, el desempeño del sistema de lazo cerrado principalmente depende de la experiencia y del conocimiento del proceso que el ingeniero encargado del proceso tiene. Se reconoce en la práctica que muchos lazos cerrados de control industrial están pobremente sintonizados. Las técnicas de sintonización automática, por lo tanto llama la atención cada vez más a los investigadores y a los ingenieros en ejercicio [3].

Los procesos que presentan un tiempo muerto significativo frente a la constante de tiempo dominante son difíciles de controlar con un bucle de realimentación simple tipo PID [4]. Se considera un tiempo de retardo significativo cuando el proceso satisface $m/\tau_1 > 0.5$, donde m denota el tiempo puro de retraso y τ_1 es la constante de tiempo dominante del sistema [5].

Bruno Vargas Tamani, e-mail: bvargast@unmsm.edu.pe
Recibido: Junio 2011 / Aceptado: Diciembre 2011

II. SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN SOBRE AMORTIGUADOS Y SUBAMORTIGUADOS REPRESENTATIVOS PARA UN AMPLIO RANGÓ DE VALORES DE RELACIÓN DE AMORTIGUAMIENTO

A. Sistema de Segundo Orden Sobreamortiguado Representativo para un Amplio Rango de Valores de Relación de Amortiguamiento

Una planta con entrada $u(t)$ y salida $y(t)$ (con transformadas de Laplace $U(s)$ y $Y(s)$ respectivamente) que representa a un sistema de segundo orden tiene la siguiente función de transferencia [6]:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_G \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1)$$

Los parámetros que caracterizan a un sistema de segundo orden son: su ganancia K_G , su relación de amortiguamiento ξ y la frecuencia natural no amortiguada ω_n . El término $\xi\omega_n = \sigma$ es llamado atenuación.

De acuerdo al valor de la relación de amortiguamiento se clasifican los sistemas de según orden, para $\xi > 1$ el sistema se denomina de segundo orden sobreamortiguado. Este sistema está caracterizado por dos constantes de tiempo τ_1 y τ_2 , (asumimos la condición $\tau_1 > \tau_2$).

La ecuación (1) para un sistema sobreamortiguado se puede representar como:

$$G(s) = \frac{K_G}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (2)$$

Definimos ρ como la relación entre las constantes de tiempo τ_1 y τ_2 :

$$\rho = \frac{\tau_2}{\tau_1} \quad (3)$$

Con (3) en (2) el sistema sobreamortiguado se representa por:

$$G(s) = \frac{K_G}{(\tau_1 s + 1)(\rho\tau_1 s + 1)} \quad (4)$$

Para una entrada escalón de amplitud unitaria la respuesta del sistema sobreamortiguado de ganancia $K_G = 1$, está dada por [7]:

$$y(t) = 1 + \frac{\rho}{1-\rho} e^{-t/\rho\tau_1} - \frac{1}{1-\rho} e^{-t/\tau_1} \quad (5)$$

La relación de amplitudes de los componentes transitorios que corresponden a la constante de tiempo más rápida τ_2 respecto a la constante de tiempo más larga τ_1 , es igual a ρ .

La Fig. 1, muestra un juego de respuestas al escalón unitario de sistemas sobreamortiguados con ganancia unitaria, para diferentes valores de ρ , considerando una constante de tiempo normalizada de $\tau_1 = 1$.

Cuando ρ es muy pequeño, de acuerdo a (5) la constante de tiempo τ_2 produce una respuesta transitoria más decreciente rápidamente que el transitorio producido por la constante de tiempo τ_1 . Con esto se puede desprestigiar la constante de tiempo τ_2 y el sistema se comportará como uno equivalente de primer orden.

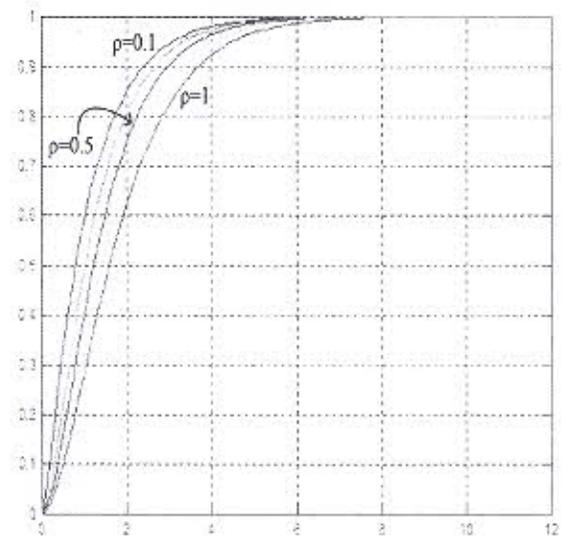


Fig.1. Respuestas al escalón unitario de sistemas sobreamortiguados para diferentes valores de ρ .

Cuando ρ es 1, se trata de un sistema críticamente amortiguado.

Un sistema representativo de los sistemas sobreamortiguados para un rango $0 < \rho < 1$, puede ser el que corresponde a la respuesta central de la Fig. 1 (respuesta intermedia entre la respuesta equivalente de primer orden y la respuesta de un sistema críticamente amortiguado), para el cual valor de ρ es igual a 0.5. Así si $\rho = 0.5$, reemplazando en (4) e igualando con (1), se obtiene el valor de la relación de amortiguamiento del sistema sobreamortiguado representativo:

$$\xi = 1.0607 \quad (6)$$

B. Sistemas de Segundo Orden Subamortiguados

Para $0 < \xi < 1$, los sistemas de segundo orden se denominan subamortiguados. Este sistema está caracterizado por dos polos complejos conjugados con parte real negativa. Para una entrada escalón de amplitud unitaria, la respuesta del sistema subamortiguado de ganancia unitaria, está dada por [7]:

$$y(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left(\cos \omega_d t - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen} \omega_d t \right) \quad (7)$$

Se obtiene una respuesta transitoria que presenta una oscilación senoidal amortiguada de frecuencia ω_d dada por:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \quad (8)$$

cuya amplitud se atenúa al transcurrir el tiempo de forma exponencial con atenuación $\xi\omega_n$.

La Fig.2, muestra un juego de respuestas al escalón unitario de los sistemas subamortiguados con ganancia unitaria, para diferentes valores de ξ .

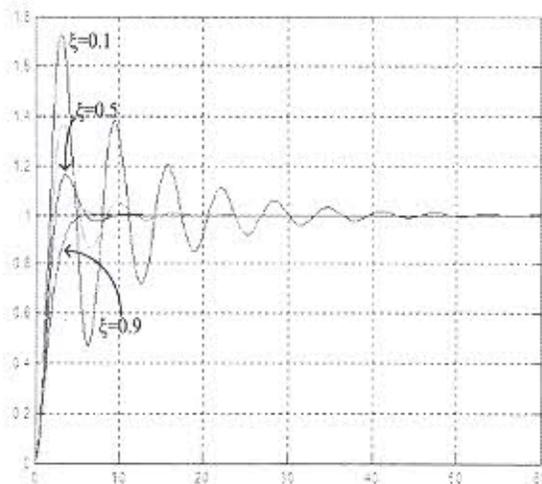


Fig.2. Respuestas al escalón unitario de sistemas subamortiguados para diferentes valores de amortiguamiento.

Para un considerable rango de amortiguamientos ($0 < \xi < 0.707$), las características de la respuesta transitoria para una entrada escalón unitario (de acuerdo a la Fig. 2) son especificadas solamente por dos valores: el valor del sobreimpulso máximo M_p y el tiempo de establecimiento t_s [6].

El valor del sobreimpulso máximo porcentual M_p , es la relación entre la diferencia del valor de pico máximo y el valor de estado estacionario de la respuesta (valor final), respecto a este último valor (normalmente se expresa en porcentaje).

El tiempo de establecimiento t_s , es el tiempo que la respuesta requiere para alcanzar y mantenerse en un rango alrededor de su valor final con una magnitud especificada por el porcentaje absoluto del valor final (habitualmente entre 1% y 5%).

C. Optimización de Sistemas de Segundo Orden

Un índice de desempeño, es un número que indica la "bondad" del comportamiento sistema. Se considera que un control es óptimo, si los valores de los parámetros se eligen de modo que el índice de desempeño elegido sea mínimo o máximo, según sea el caso. Los valores óptimos de los parámetros dependen directamente del índice de desempeño seleccionado.

Un índice de desempeño debe brindar selectividad, es decir, un ajuste óptimo de los parámetros que se distingue claramente de los ajustes no óptimos de los parámetros. Además, un índice de desempeño debe presentar un único valor numérico positivo o cero, este último se obtiene si y solamente si la medida de la desviación es idénticamente cero. Para que un índice de desempeño sea útil, debe ser una función de los parámetros del sistema y debe presentar un máximo o un mínimo. Para que tenga utilidad práctica, debe ser fácilmente calculable, en forma analítica o mediante computadora.

Se proponen diversos índices de error de desempeño, los cuales son integrales de alguna función o una función de la desviación de salida del sistema respecto a la entrada [6].

1. Criterio Integral de Error Cuadrático (CIEC)

De acuerdo con el criterio integral de error cuadrático (CIEC), la calidad de comportamiento se evalúa por medio de la siguiente integral:

$$\int_0^{\infty} e^2(t) dt \quad (9)$$

donde $e(t)$ es la señal de error entre la entrada $r(t)$ y la salida $y(t)$ en lazo cerrado.

El sistema óptimo será el que minimice esta integral. Este índice se puede calcular de manera sencilla, ya sea en forma analítica o experimental, por ejemplo cuando se utiliza entradas escalón.

Una característica de este índice de desempeño es que da mayor importancia a los errores grandes, y menor a los pequeños. Un sistema diseñado con este criterio tiende a mostrar una disminución en un error inicial elevado, por lo tanto la respuesta es rápida y oscilatoria. Es de significación práctica, ya que la minimización de este índice de desempeño resulta en una minimización del consumo de potencia para algunos sistemas.

II. Método de la Transformada de Laplace para Calcular los Índices de Desempeño CIEC de un Sistema de Segundo Orden

Se puede comprobar que el diagrama de bloques que muestra la Fig.3, corresponde a un sistema de control que tiene una función de transferencia como el de un sistema de segundo orden dado por (1), con frecuencia natural no amortiguada ω_n unitaria.

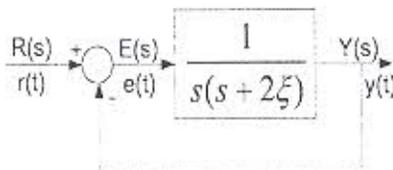


Fig.3. Sistema de control equivalente de segundo orden.

Se supone que en $t=0$ se aplica una entrada escalón unitario $r(t)$. El sistema se inicia en reposo. El problema consiste en determinar el valor óptimo del amortiguamiento ξ en el rango $0 < \xi < 1$, (es decir de un sistema subamortiguado) tal que el índice de desempeño:

$$J = \int_0^{\infty} e^2(t) dt \quad (10)$$

sea el mínimo, donde $e(t)$ es la señal de error entre la entrada $r(t)$ y la salida $y(t)$.

Según [6], se deduce que:

$$J = \int_0^{\infty} e^2(t) dt = \xi + \frac{1}{4\xi} \quad (11)$$

El valor óptimo del amortiguamiento ξ , se puede obtener diferenciando J respecto a ξ , igualando $dJ/d\xi$ a cero, y resolviendo para ξ . De esta manera obtenemos:

$$\frac{dJ}{d\xi} = 1 - \frac{1}{4\xi^2} = 0 \quad (12)$$

El valor óptimo del amortiguamiento que se obtiene a partir de (12) es:

$$\xi_{OPTIMO} = 0.5 \quad (13)$$

y para ese valor de amortiguamiento de acuerdo a (11) se obtiene un valor mínimo de J igual a :

$$\min J = 1 \quad (14)$$

D. Modelo de la Planta Representativa Sobreamortiguado con Retardo

Sea una planta representativa de segundo orden sobreamortiguada representativa con retardo m , con entrada $u(t)$ y salida $y(t)$ (con transformadas de Laplace $U(s)$ y $Y(s)$ respectivamente), la cual presenta un amortiguamiento $\xi=1.0607$ (según (6)). Esta planta está caracterizada por dos constantes de tiempo τ_1 y τ_2 (donde $\tau_1 > \tau_2$) y un retardo m . La ganancia de la planta es K_G .

Sigue siendo válida la relación (2) y a partir de (4) considerando el retardo, esta planta estará representada por la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_G}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} e^{-ms} \quad (15)$$

Consideramos como representativo un valor de retardo m de valor igual a la constante de tiempo más lenta de la planta, es decir de esa consideración resulta:

$$m = \tau_1 \quad (16)$$

III. DISEÑO DEL CONTROLADOR PID PARA LA PLANTA SOBREAMORTIGUADA CON RETARDO

A. Análisis del Sistema de Lazo Cerrado para el Control de la Planta Representativa

La Fig.4, representa el sistema de lazo cerrado para el control de la planta representativa $G(s)$. La planta $G(s)$ será controlada mediante un controlador con función de transferencia $G_C(s)$ en cascada con la planta, mediante un sistema de lazo cerrado con realimentación unitaria.

Para una planta de segundo orden sobreamortiguada, se cumple que los dos polos s_1 y s_2 de esa planta, se relaciona con las constantes de tiempo τ_1 y τ_2 , por:

$$s_1 = -\frac{1}{\tau_1} \tag{17}$$

$$s_2 = -\frac{1}{\tau_2} \tag{18}$$

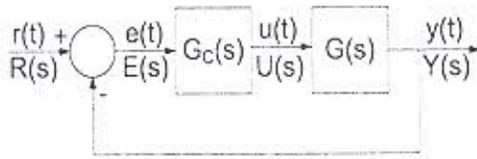


Fig.4. Diagrama de bloques del sistema de lazo cerrado para controlar la salida de la planta $y(t)$.

Con el valor representativo $\alpha=0.5y$ de acuerdo a (3), se cumple que:

$$s_2 = 2s_1 \tag{19}$$

El modelo de la planta representativa de segundo orden sobreamortiguada con retardo m , considerando (17) y (18) en (15) se obtiene:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_G / \tau_1 \tau_2}{(s + 1/\tau_1)(s + 1/\tau_2)} e^{-ms}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_G s_1 s_2}{(s - s_1)(s - s_2)} e^{-ms} \tag{20}$$

Para realizar el análisis del efecto del lazo en los polos de lazo cerrado deseados mediante el lugar geométrico de las raíces, la planta dada por (20), debe tener la estructura de polos y ceros; razón por la cual se utilizó la aproximación de primer orden de Padé para el retardo m , la cual está dado por :

$$e^{-ms} = \frac{1 - \frac{m}{2}s}{1 + \frac{m}{2}s} = -\frac{s - \frac{2}{m}}{s + \frac{2}{m}} \tag{21}$$

Reemplazando (21) en (20), obtenemos la planta aproximada que usaremos por el análisis de la función de transferencia del lazo:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \cong \frac{-K_G s_1 s_2}{(s - s_1)(s - s_2)} \frac{s - \frac{2}{m}}{s + \frac{2}{m}} \tag{22}$$

Considerando (16) se cumplirá:

$$\frac{2}{m} = \frac{2}{\tau_1} = -2s_1 \tag{23}$$

Utilizando (23) en (22) obtenemos:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \cong \frac{-K_G s_1 s_2}{(s - s_1)(s - s_2)} \frac{s + 2s_1}{s - 2s_1} \tag{24}$$

B. Diseño de Controlador PID para el Control de la Planta Representativa de Segundo Orden Sobreamortiguada con Retardo.

I. Componente Integral en el Controlador Inicial.

Refiriéndose a la Fig. 4, para asegurar la condición estacionaria se debe contar con una componente integral en el controlador $G_c(s)$. Esa componente integral asegura la anulación del error en estado estacionario para sistemas estables de lazo cerrado, para entradas de referencia y de perturbación constantes.

De esa manera, el controlador inicial propuesto es del tipo integral y está representado por:

$$G_c(s) = \frac{K}{s} \tag{25}$$

donde K es la ganancia del controlador.

Para tener en consideración el efecto del sistema de lazo cerrado inicial usando control integral, en los polos de lazo cerrado; haremos uso de la función lugar geométrico de las raíces por efecto de K , la cual considerando (24) y (25) estará dada por:

$$G_{LGR}(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{-K_G s_1 s_2}{s} \frac{s + 2s_1}{(s - s_1)(s - s_2) s - 2s_1} \tag{26}$$

La distribución de polos y ceros dada por (26) en el plano complejo se representa en la Fig. 5.

II. Elección de los Polos de Lazo Cerrado Dominantes.

Consideramos que los polos de lazo cerrado dominantes deben corresponder a un par de polos complejos conjugados, es decir de acuerdo a un sistema de segundo orden subamortiguado. De acuerdo a lo planteado en II.C.2 escogemos como amortiguamiento de ese sistema dominante $\xi_{LC}=0.5$ (como se sugiere en (13)). Entonces los polos de lazo cerrado dominantes complejos conjugados s_{LC1} y s_{LC2} están dados por:

$$s_{LC1} = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \quad (27)$$

$$s_{LC2} = -\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

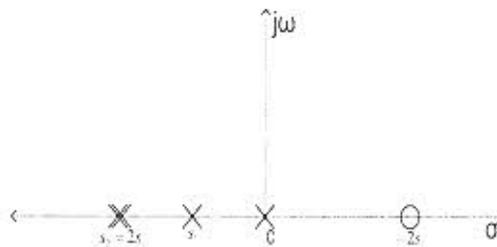


Fig. 5. Distribución de polos y ceros de la función lugar geométrico de las raíces $G_{LGR}(s)$ dada por (26).

Estos polos deben ubicarse sobre la línea que sale del origen con un ángulo α entre el eje real negativo y dicha línea, cumple que:

$$\cos \alpha = \xi_{LC} = 0.5 \quad (28)$$

con lo cual la línea que sale del origen con un ángulo α entre el eje real negativo y dicha línea, debe tener un valor de:

$$\alpha = \cos^{-1}(0.5) = 60^\circ \quad (29)$$

El valor específico del polo dominante s_{LC1} , se elige para que corresponda a un tiempo de establecimiento aceptable para la planta. Elegimos la condición para s_{LC1} :

$$\text{Re}\{s_{LC1}\} = s_1 \quad (30)$$

La Fig. 6, muestra la ubicación del polo dominante s_{LC1} elegido (con su conjugado s_{LC2} formando el par de polos dominantes):

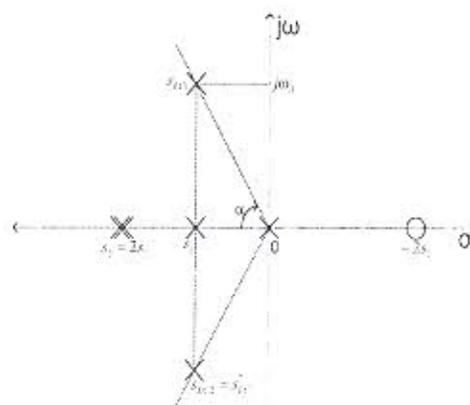


Fig. 6. Ubicación de los polos dominantes deseados de lazo cerrado ($\xi_{LC}=0.5$ y parte real igual a s_1).

Según observamos en la Fig. 6, se cumplen las siguientes relaciones:

$$-\xi_{LC}\omega_{nLC} = s_1 \quad (31)$$

$$\omega_d = -s_1 \text{tg} \alpha \quad (32)$$

De acuerdo a (29) en (32) se obtiene:

$$\omega_d = -\sqrt{3}s_1 \quad (33)$$

III. Ceros adicionales del controlador PID para asegurar los polos dominantes en lazo cerrado

Establecido el polo dominante s_{LC1} deseado, evaluamos la fase efectiva en ese polo deseado de la función lugar geométrico al ser evaluada en $s=s_{LC1}$, es decir se debe evaluar los ángulos mostrados en la Fig. 7, para luego conocer la fase total ϕ_T del lazo analizado.

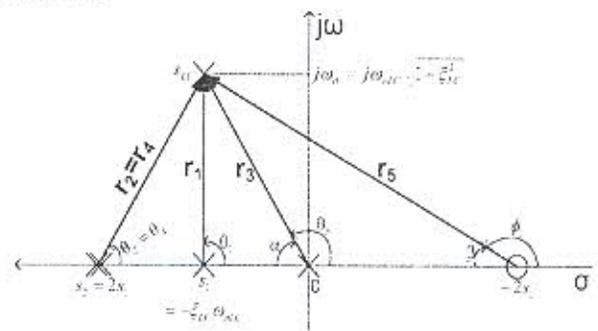


Fig. 7. Vectores y ángulos trazados desde los polos y ceros de $G_{LGR}(s)$ al polo deseado s_{LC1} .

De la Fig. 7 se aprecia directamente que:

$$\theta_1 = 90^\circ \quad (34)$$

El valor de θ_3 , se halla de (29) y de la Fig. 7 como:

$$\theta_3 = 180^\circ - \alpha = 120^\circ \quad (35)$$

También por la semejanza de triángulos, se observa en la Fig. 7 que:

$$\theta_2 = \theta_4 = 60^\circ \quad (36)$$

También se cumple que:

$$\beta = \text{tg}^{-1}(\omega_d / (-3s_1)) \quad (37)$$

De (33) en (37) obtenemos:

$$\beta = 30^\circ \tag{40}$$

Para el valor de β dado por (40) se cumple:

$$\varphi_1 = 180^\circ - \beta = 150^\circ \tag{41}$$

La fase que se obtiene en el lazo inicial $L(s)$ de acuerdo a la Fig. 7 y según (26) está determinado por los ángulos de los vectores que se inician desde los polos y ceros de $G_{LGR}(s)$ y terminan en el polo deseado s_{LC1} ; sean esos vectores r_1, r_2, r_3, r_4 y r_5 , y los ángulos que establecen al polo deseado $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$, y ϕ_1 respectivamente.

Evaluando la fase ϕ_T obtenida por la función lugar geométrico de las raíces dada por (26) en el polo deseado s_{LC1} , considerado en la Fig. 7, se tiene:

$$\phi_T = -180^\circ + \phi_1 - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \tag{42}$$

Encontramos que el valor de la fase total ϕ_T utilizando (34), (35), (36) y (41) es:

$$\phi_T = 0^\circ \tag{43}$$

Según el resultado mostrado por (43), la condición de fase igual a 180° no se cumple (como lo exige la condición de fase del lugar geométrico de las raíces). Se agregan dos ceros iguales de valor a para cumplir esa condición (ya que un sólo cero es insuficiente), entonces el ángulo faltante ϕ se halla a partir de la condición de fase que resulta en:

$$\phi_T + \phi = 180^\circ \tag{44}$$

Con el resultado (43) en (44), resulta:

$$\phi = 180^\circ \tag{45}$$

El ángulo ϕ es positivo y se obtendrá mediante la adición de dos ceros iguales ubicados en a . Estos dos ceros que se adicionarán aportarán los ángulos iguales ϕ_2 y ϕ_3 en el polo deseado s_{LC1} , como se muestra la Fig. 8.

Por tanto se establece la condición:

$$\phi_2 = \phi_3 \tag{46}$$

De esta manera para cumplir (45) considerando (46) se debe cumplir:

$$\phi = \phi_2 + \phi_3 = 2\phi_2 \tag{47}$$

Con lo cual a partir de (45) en (47) se obtiene:

$$\phi_2 = \phi_3 = 90^\circ \tag{48}$$

Los dos ceros iguales adecuados ubicados en a de acuerdo a la Fig. 8, deben tener el valor de:

$$a = s_1 \tag{49}$$

Este último resultado asegura que en lazo cerrado el lugar geométrico de las raíces contendrá al polo deseado s_{LC1} (y a su complejo conjugado s_{LC2}). De acuerdo a (49) el controlador propuesto, tendrá la siguiente función de transferencia:

$$G_C(s) = K \frac{(s-a)^2}{s} = K \frac{(s-s_1)^2}{s} \tag{50}$$

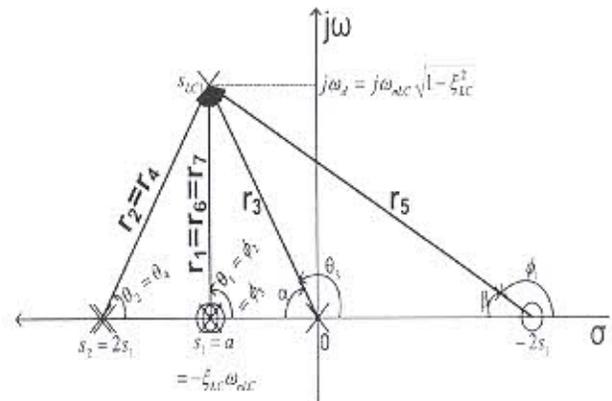


Fig. 8. Vectores y ángulos trazados desde los polos y ceros de $GLGR(s)$ considerando el controlador propuesto.

La Fig. 9, muestra el lugar geométrico de las raíces que se obtiene considerando la función lugar geométrico de las raíces que incluye el controlador propuesto por (50) y la planta dada por (24).

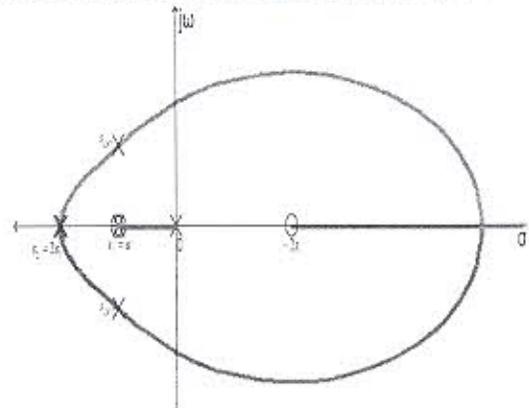


Fig. 9. Lugar geométrico de las raíces para el lazo formado con el controlador propuesto. El gráfico incluye a los polos dominantes s_{LC1} y s_{LC2} .

IV. Cálculo de la Ganancia del Controlador PID Propuesto

Además de asegurar que el lugar geométrico de las raíces contendrá al polo deseado s_{LC1} , debemos

lograr que el polo s_{LC1} (y su conjugado s_{LC2}) sea el polo de lazo cerrado. Debemos calcular la ganancia K necesaria para ese fin. La ganancia K se determina a partir de la condición del módulo del lugar geométrico de las raíces (módulo del lazo en el polo deseado igual a 1).

Para los ángulos establecidos que se muestran en la Fig. 8, que considera los vectores desde los ceros y polos del controlador y de la planta con la aproximación del retardo m hacia el polo deseado en $s=s_{LC1}$, obtenemos los siguientes módulos:

$$|r_2| = \frac{\omega_d}{\text{sen}\theta_2} \quad (51)$$

según (33) y (36) en (51) se obtiene:

$$|r_2| = -2s_1 \quad (52)$$

Como se observa en la Fig. 8, también se cumple:

$$|r_3| = |r_4| = |r_2| \quad (53)$$

También se cumple en la Fig. 8:

$$|r_1| = \omega_d \quad (54)$$

y de (33) en (54) se obtiene:

$$|r_1| = -\sqrt{3}s_1 \quad (55)$$

Los módulos de r_6 y r_7 , son idénticos al módulo de r_1 como se aprecia en la Fig. 8. Por tanto:

$$|r_6| = |r_7| = |r_1| \quad (56)$$

Finalmente observamos que:

$$|r_5| = \frac{\omega_d}{\text{sen}\beta} \quad (57)$$

y según (33) y (40) en (57) obtenemos:

$$|r_5| = -2\sqrt{3}s_1 \quad (58)$$

La aplicación de la condición de magnitud dada para determinar la ganancia de control K , considerando (50) y (24) resulta en:

$$K = \frac{1}{\frac{K_o |s_1| |s_2| |r_3| |r_6| |r_7|}{|r_1| |r_2| |r_3| |r_4|}} \quad (59)$$

Los resultados dados por (52), (53), (55), (56) y (58) reemplazados en la relación anterior da como resultado:

$$K = \frac{0.6667}{K_o |s_1|} \quad (60)$$

Por lo tanto el controlador propuesto diseñado a partir de (60) reemplazado en (50) le corresponde la siguiente función de transferencia:

$$G_C(s) = \frac{0.6667 (s - s_1)^2}{K_o |s_1| s} \quad (61)$$

C. Obtención del Controlador PID Realizable a Partir del PID Ideal Diseñado

El controlador propuesto por (61) presenta una estructura de función de transferencia no realizable.

Para obtener un controlador PID que se pueda implementar, debemos modificar la representación del controlador diseñado y lograr su realizabilidad. Se propone agregar un polo adicional s_{ad} alejado a la izquierda de la zona de incidencia del polo dominante, de tal manera que el controlador realizable tenga la siguiente función de transferencia:

$$G_{Creal}(s) = G_C(s)G_{Cad}(s) \quad (62)$$

donde $G_C(s)$ representa al controlador diseñado y $G_{Cad}(s)$ representa la función de transferencia de la componente adicional que permitirá que el conjunto representado por (62) sea realizable. La componente $G_{Cad}(s)$ que se adicionará debe presentar un polo adicional, por tanto se sugiere la siguiente función:

$$G_{Cad}(s) = \frac{-s_{ad}}{(s - s_{ad})} \quad (63)$$

El polo adicionado en s_{ad} debe ser ubicado alejado de la zona dominante de lazo cerrado, ese polo será un número n de veces la parte real del polo dominante, así:

$$s_{ad} = n \text{Re}(s_{LC1}) \quad (64)$$

La Fig. 10, muestra la ubicación posible del polo adicional s_{ad} .

El ángulo adicional en retardo θ_{ad} agregado en el lazo por polo adicional s_{ad} al evaluarse en s_{LC1} , se puede calcular considerando (64) y la Fig. 10 como:

$$\theta_{ad} = \text{tg}^{-1}(\omega_d / (-\text{Re}(s_{LC1}))(n-1)) \quad (65)$$

De acuerdo a la Fig. 10, se cumple que:

$$\text{tg}\alpha = \frac{\omega_d}{-\text{Re}(s_{LC1})} \quad (66)$$

Por tanto con (66) en (65) se obtiene:

$$\theta_{ad} = \text{tg}^{-1} \left(\frac{\text{tg} \alpha}{n-1} \right) \quad (67)$$

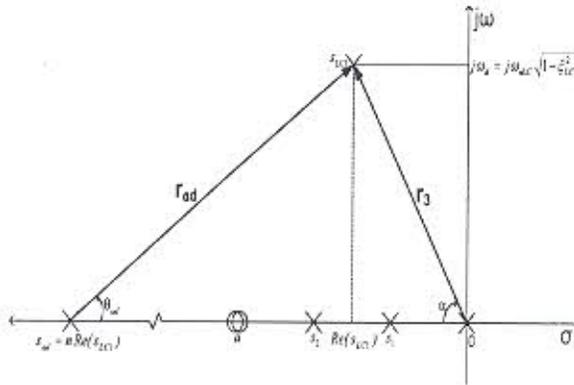


Fig. 10. Ubicación del polo adicional s_{ad} para lograr realizabilidad del controlador propuesto.

De acuerdo a (29) en (67) obtenemos:

$$\theta_{ad} = \text{tg}^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{n-1} \right) \quad (68)$$

Según (68) para lograr implementar el PID propuesto, se debe agregar una ganancia adicional de control. Esa ganancia adicional agregada al lazo dado por:

$$L(s) = G(s)G_{Creal}(s) \quad (69)$$

al evaluarse en el polo deseado s_{LC1} , depende de la magnitud de r_{ad} . De acuerdo a la Fig. 10:

$$|r_{ad}| = \frac{-\text{Re}(s_{LC1})(n-1)}{\cos \theta_{ad}} \quad (70)$$

Por tanto, podemos calcular la ganancia adicional K_{ad} que se agrega en el polo adicional deseado s_{ad} , tomando el módulo de (63) al ser evaluado en $s=s_{LC1}$. Reemplazando (64) y (70) en (63) y tomando el módulo obtenemos:

$$K_{ad} = \frac{n}{n-1} \cos \theta_{ad} \quad (71)$$

Por ejemplo, si elegimos $n=10$ se obtiene aplicando (68) un ángulo de retraso adicional de $\theta_{ad}=10.89^\circ$ y aplicando (71) una ganancia adicional $K_{ad}=1.0911$.

Si se cree conveniente modificar la ganancia de control K dada por (60) teniendo en cuenta (71), se obtendría la ganancia atenuada K_{at} dada por:

$$K_{at} = \frac{K}{K_{ad}} \quad (72)$$

De esta manera el controlador a implementar haciendo uso de (72) en (62), tendría la siguiente función de transferencia:

$$G_{Creal}(s) = K_{at} G_C(s) G_{Cad}(s) \quad (73)$$

La forma de calcular la función de transferencia realizable dada por (73) asegura que la ganancia del controlador evaluada en el polo deseado $s=s_{LC1}$, mantiene el valor de la ganancia de control K obtenida en el diseño.

IV. RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN DE LA RESPUESTA DE LAZO CERRADO PARA UNA GAMA AMPLIA DE PLANTAS SOBRE AMORTIGUADAS CON RETARDO

El controlador Proporcional Integral Derivativo (PID) ideal propuesto en (61) y modificado a uno realizable por (73) con $n = 10$, se puso a prueba en el control de plantas sobreamortiguadas con retardo para diferentes relaciones de constantes de tiempo menor τ_2 y mayor τ_1 (ρ) y relaciones variadas de tiempos de retardo m a constante de tiempo mayor τ_1 . Se utilizó el esquema de lazo cerrado de la Fig. 4. Se aplicaron señales de entrada de lazo cerrado tipo escalón unitario y se registraron en la salida los valores del porcentaje de sobreimpulso M_p y el valor del tiempo de establecimiento t_s .

Se discretizaron los valores de la relación ρ y el valor de la relación del tiempo de retardo m respecto a la constante de tiempo mayor τ_1 .

Los resultados de la simulación se presentan en las tablas correspondientes mostradas en los anexos.

La Fig. 11, muestra la superficie de variación del porcentaje de sobreimpulso M_p en función de la relación $\rho = \tau_2/\tau_1$ y de la relación m/τ_1 .

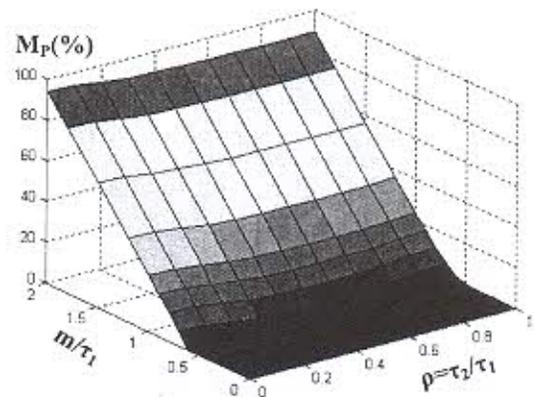


Fig. 11. Superficie de variación del porcentaje de sobreimpulso M_p en función de la relación $\rho = \tau_2/\tau_1$ y de la relación m/τ_1 .

La Fig. 12, muestra la superficie de variación del tiempo de establecimiento t_s en función de la relación $\rho = \tau_2/\tau_1$ y de la relación m/τ_1 .

V. ANÁLISIS DE RESULTADOS

De acuerdo a la Tabla I (Ver Anexo) y a la Fig. 11, los valores de porcentaje de sobreimpulso son aceptables en un gran rango control de plantas sobreamortiguadas con retardo para diferentes relaciones de constantes de tiempo menor τ_2 a mayor τ_1 (ρ) y variadas relaciones de tiempos de retardo m a constante de tiempo mayor τ_1 . Se manejan sobreimpulsos aceptables para $0 < \rho < 1$ y $0 < m/\tau_1 < 1$.

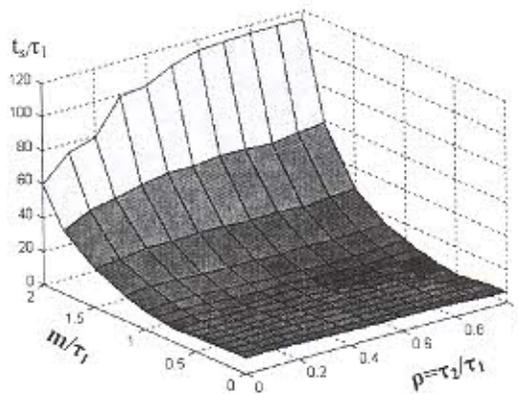


Fig. 12. Superficie de variación del tiempo de establecimiento t_s en función de la relación $\rho = \tau_2/\tau_1$ y de la relación m/τ_1 .

Considerando que para la planta representativa utilizada para el diseño del PID propuesto se obtiene un tiempo de establecimiento aproximadamente 6.5 veces τ_1 (Fig. A-1.); de acuerdo a la Tabla II y a la Fig. 12, si consideramos hasta un 30% de exceso en el tiempo de establecimiento de lazo cerrado respecto al esperado en lazo abierto entonces podemos considerar aceptables los tiempos de establecimiento obtenidos con el controlador propuesto para el control de plantas sobreamortiguadas con retardo para diferentes relaciones de constantes de tiempo menor τ_2 a mayor τ_1 (ρ) y variadas relaciones tiempos de retardo m a constante de tiempo mayor τ_1 . Se manejan tiempos de establecimientos aceptables para $0.4 < \rho < 1.0$ y $0.1 < m/\tau_1 < 0.9$.

VI. CONCLUSIONES

El método de diseño propuesto ofrece un controlador Proporcional Integral Derivativo (PID) que puede funcionar para el control de lazo cerrado

en un margen aceptable de valores de porcentaje de sobreimpulso M_p y tiempos de establecimientos t_s aceptables de plantas que pueden representarse por modelos de segundo orden sobreamortiguados con retardo en los rangos de $0.4 < \rho < 1.0$ y $0.1 < m/\tau_1 < 0.9$.

Para rangos fuera de los anteriores $0 < \rho < 0.4$, $0 < m/\tau_1 < 0.1$ y $0.9 < m/\tau_1 < 1.0$, los sobreimpulsos siguen siendo aceptables pero los tiempos de establecimiento podrían llegar hasta 60% más que el esperado de la planta representativa.

La sintonía del controlador propuesto requiere conocer con anticipación la constante de tiempo mayor τ_1 y la ganancia de la planta a ser controlada, en un sistema que requiere control estos valores pueden obtenerse mediante técnicas de identificación que utilicen pruebas de lazo abierto, conocidos esos valores el ajuste del controlador propuesto según (61) y (73) es bastante simple.

En el caso que se requieran tiempos de establecimiento menores en los rangos de relaciones de constantes de tiempo menor τ_2 a mayor τ_1 (ρ) y variadas relaciones tiempos de retardo m a constante de tiempo mayor τ_1 , en los cuales el controlador propuesto se podría considerar no conveniente; se puede utilizar la metodología planteada para obtener otro controlador PID aceptables para esos casos.

REFERENCIAS

- [1] Poulin E., Pomerleau A., Desbiens A., Hodouin D. "Development and Evaluation of an Auto-tuning and Adaptive PID Controller", *Automatica*, Vol. 32, No. 1, pp 71-82, 1996.
- [2] Heong A. K., Chong G., Yun L. "PID Control System Analysis, Design and Technology", *IEEE Transactions on control Systems Technology*, Vol. 13, No. 4, July 2005.
- [3] Hang C.C., Astrom K. J., Wang Q. G. "Relay feedback auto-tuning of process controllers - a tutorial review", *Journal of Process Control*, Vol. 12, pp 143-162, 2002.
- [4] Marga F. "Control de Procesos con grandes Tiempos Muertos". Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática. Universidad del País Vasco. 2005. <http://www.disa.bi.ehu.es/spanish/asignaturas/17212/PRACTICA%201V.pdf>.
- [5] Tang W., Shi S., Wang M. "Autotuning PID control for long time-delay processes". 15th Triennial World Congress. Barcelona, Spain. 2002 IFAC. <http://www.nt.ntnu.no/users/skoge/prost/proceedings/ifac2002/data/content/00251/251.pdf>.

- [6] Ogata K. "Ingeniería de Control Moderna", Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A. México 1993.
- [7] Vargas T. B. "Diseño e implementación de tarjeta electrónica de simulación de procesos". Revista Electrónica UNMSM, Vol. 22, 2008.

ANEXOS

TABLA I

RESUMEN DE RESULTADOS DEL VALOR DEL SOBREPULSO DE LA RESPUESTA AL ESCALÓN DE LAZO CERRADO PARA VARIACIÓN DE $\rho=\tau_2/\tau_1$; Y VARIACIÓN DE LA RELACIÓN DEL RETARDO m A LA CONSTANTE DE TIEMPO MAYOR τ_1 (m/τ_1).

		$\rho=\tau_2/\tau_1$										
		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
m/τ_1	0.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0.2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0.3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0.4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.12
	0.6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.14	2.23
	0.7	7.17	6.78	4.56	2.56	1.49	1.19	1.41	2.15	3.31	4.76	6.35
	0.8	13.88	13.51	11.51	9.63	8.54	8.17	8.24	8.64	9.38	10.38	11.55
	0.9	20.54	20.20	18.35	16.59	15.51	15.11	15.11	15.34	15.81	16.49	17.34
	1.0	27.22	26.88	25.13	23.47	22.42	22.0	21.96	22.12	22.42	22.88	23.48
	1.2	40.55	40.22	38.57	37.07	36.1	35.67	35.59	35.68	35.85	36.06	36.34
	1.5	60.55	60.22	58.61	57.25	56.38	55.99	55.9	55.94	56.03	56.13	56.22
1.8	80.55	80.22	78.62	77.32	76.51	76.16	76.08	76.11	76.16	76.2	76.22	
2.0	93.89	93.55	91.96	90.67	89.90	89.57	89.5	89.52	89.56	89.57	89.56	

TABLA II

RESUMEN DE RESULTADOS DEL VALOR DEL TIEMPO DE ESTABLECIMIENTO DE LA RESPUESTA AL ESCALÓN DE LAZO CERRADO PARA VARIACIÓN DE $\rho=\tau_2/\tau_1$ Y VARIACIÓN DE LA RELACIÓN DEL RETARDO m A LA CONSTANTE DE TIEMPO MAYOR τ_1 (m/τ_1).

		$\alpha=\tau_2/\tau_1$										
		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
m/τ_1	0.0	10.014	9.7792	9.5207	9.2618	8.9827	8.6844	8.3585	8.0017	7.59	7.1078	6.5254
	0.1	9.7755	9.5332	9.285	9.021	8.734	8.426	8.085	7.7166	7.2791	6.7586	6.121
	0.2	9.543	9.301	9.04	8.7712	8.4758	8.1604	7.812	7.4207	6.9633	6.3957	5.6637
	0.3	9.305	9.058	8.792	8.5135	8.22	7.8892	7.5312	7.1204	6.6342	5.9991	5.1385
	0.4	9.062	8.802	8.5432	8.2523	7.9458	7.6096	7.2372	6.8078	6.2935	5.5727	4.4672
	0.5	8.764	8.519	8.241	7.9795	7.689	7.318	6.9519	6.4763	5.9475	5.1314	3.5315
	0.6	8.458	8.0866	7.5757	7.812	7.2477	7.0554	6.7092	5.994	5.7456	2.918	4.7789
	0.7	8.017	8.8554	7.93	8.117	7.0698	7.2383	5.5817	5.7956	5.9311	4.3407	5.1819
	0.8	8.9245	9.8163	8.69	7.0587	7.553	7.8053	5.6669	6.0285	6.3742	6.7247	7.1294
	0.9	9.9524	10.93	9.5873	8.752	8.2214	8.6475	7.4534	7.8697	6.8742	7.3813	7.9637
	1.0	11.081	12.1705	11.7753	11.262	10.4036	9.5436	9.994	8.855	9.4131	9.9591	10.5065
	1.2	14.849	16.217	15.9266	15.3037	14.4438	15.0802	14.0826	14.653	13.4448	14.179	14.9205
	1.5	22.9435	24.8868	26.63	26.199	27.4515	26.6992	25.588	26.7154	25.2812	26.3985	27.4965
1.8	38.062	45.5383	48.7444	51.6395	54.326	54.1259	56.3143	55.7394	54.7002	56.728	58.609	
2.0	59.482	74.6282	79.4	99.178	101.2062	109.264	113.8272	114.7935	115.338	115.5021	115.3215	

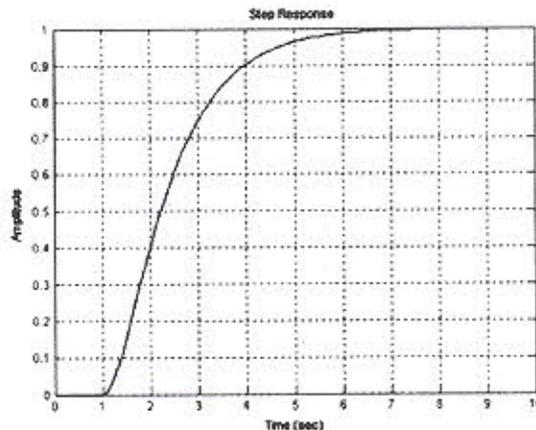


Fig. A-1. Respuesta al escalón de la planta representativa utilizada para el diseño del controlador considerando $\tau_1=1$ sg.