

# Controlador PID Autoajustable Basado en un Margen de Fase Prefijado

Bruno Elio Vargas Tamani

Facultad de Ingeniería Electrónica y Eléctrica, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú

**Resumen**— Los controladores que desarrollan la ley de control PID (proporcional integral derivativo), proveniente desde la teoría clásica de control; siguen siendo ampliamente utilizados en el sector industrial; razón por la cual se sigue esforzándose por sugerir variantes de este método, que permita mejorar el comportamiento de lazo cerrado; más aún cuando los parámetros de la planta no se conocen o varían en el tiempo, se requieren métodos de control adaptativo que permitan actualizar los parámetros del controlador PID en base a la identificación en línea de los parámetros de la planta. Uno de estos métodos es el tratado en el siguiente trabajo, se trata del método de autoajuste de los parámetros del PID basado en el criterio de fijar un margen de fase deseado del sistema de lazo cerrado. Se realiza la justificación teórica de este método; así como una aplicación la cual es simulada para verificar el comportamiento de lazo cerrado.

**Abstract**— The drivers who develop laws to control PID (proportional integral derivative), derived from classical theory controls, is still widely used in industry. Why is continuing its efforts to suggest alternatives to this method, to improve the performance of closed loop. Even more so when the parameters of the plant are not known or vary over time, will require adaptive control methods to help update the parameters of the PID controller based on online identification of the parameters of the plant. One of these methods is the treaty in the next job, this is the method of self tuning of PID parameters based on the criterion for setting a margin phase of the desired closed loop system. We carried out the theoretical justification of this method, as well as an application which is simulated to verify the behavior of closed loop.

**Palabras claves**— control, autoajuste, margen de fase, período de muestreo, ley PID, aproximación discreta, identificación, simulación.

## I.- INTRODUCCIÓN

Se requiere de un controlador adaptativo cuando la dinámica de la planta a ser controlada sufre cambios o es afectada por las perturbaciones, entonces la mejora del desempeño de lazo cerrado requiere de un controlador que pueda modificar su comportamiento en respuesta a los cambios producidos [2].

Un tipo de control adaptativo es el llamado controlador autoajustable. En la figura 1 se muestra un diagrama de bloques de este controlador:

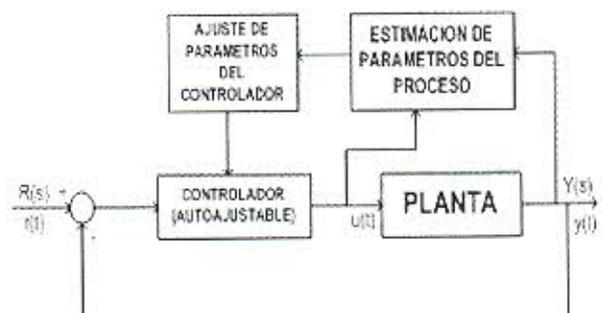


Fig. 1. Diagrama de bloques del controlador autoajustable.

Se distinguen claramente: a) Un etapa de estimación recursiva de parámetros de la planta. b) Un mecanismo de adaptación de parámetros del controlador, que se encarga de actualizar su diseño. c) Un controlador con parámetros ajustables.

El trabajo conjunto de estas tres partes, permiten autoajustar los parámetros automáticamente del controlador.

## II. ALGORITMO PID DISCRETO

La ley de control PID imita al de un ser racional ante la toma de decisiones: tiene en cuenta el estado actual (proporcional), la historia pasada (integral) y un pronóstico del futuro (derivada) del error o desviación del comportamiento deseado [3].

Discretizando un PID continuo o analógico, se obtiene la ley de control PID discreta a partir de la cual

se obtiene la señal de control discreta  $u(k)$  en los instantes de muestreo. Utilizando las aproximaciones (A-7) y (A-9) para las componentes integral y derivativa, la ley PID discreto se muestra en la ecuación (1):

$$u(k) = K_p \left\{ e(k) + \frac{T}{T_I} \sum_{i=1}^k e(i) + \frac{T_D}{T} [e(k) - e(k-1)] \right\} + u(0) \quad (1)$$

Donde  $K_p$  es la ganancia proporcional,  $T_I$  y  $T_D$  son los tiempos integral y derivativo respectivamente,  $u(0)$  es la señal de control inicial y  $T$  es el período de muestreo.

A partir de (1):

$$u(k-1) = K_p \left\{ e(k-1) + \frac{T}{T_I} \sum_{i=1}^{k-1} e(i) + \frac{T_D}{T} [e(k-1) - e(k-2)] \right\} + u(0) \quad (2)$$

De (1) y (2):

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1) = K_p \left\{ e(k) - e(k-1) + \frac{T}{T_I} e(k) + \frac{T_D}{T} [e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)] \right\} \quad (3)$$

Tomando la transformada zeta de (3), definimos:

$$G_{PID}(z^{-1}) = \frac{U(z^{-1})}{E(z^{-1})} = \frac{p_0 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{P(z^{-1})}{1 - z^{-1}} \quad (4)$$

Donde:

$$p_0 = K_p \left( 1 + \frac{T}{T_I} + \frac{T_D}{T} \right) \quad (5)$$

$$p_1 = -K_p \left( 1 + \frac{2T_D}{T} \right) \quad (6)$$

$$p_2 = K_p \frac{T_D}{T} \quad (7)$$

### III. PID AUTOAJUSTABLE BASADO EN UN MARGEN DE FASE

Dada una planta que ha sido identificada como un sistema de segundo orden con retardo, le corresponde un modelo equivalente discreto de segundo orden cuando se le antepone un ZOH (circuito de retención de orden cero):

$$G_p(z^{-1}) = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{b_0 z^{-m}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} \quad (8)$$

Donde el retardo total se ha expresado como  $m$  veces períodos de muestreo. Los coeficientes  $b_0$ ,  $a_1$  y  $a_2$  se obtienen en el proceso de transformación del modelo continuo al modelo discreto.

Si escogemos:

$$P(z^{-1}) = p_0(1 + p'_1 z^{-1} + p'_2 z^{-2}) = p_0(1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}) = p_0 A(z^{-1}) \quad (9)$$

Donde:

$$p'_1 = \frac{p_1}{p_0} = -a_1 \quad (10)$$

$$p'_2 = \frac{p_2}{p_0} = -a_2 \quad (11)$$

Considerando el controlador PID discreto en serie con la planta, entonces la función de transferencia discreta del sistema en lazo abierto, de acuerdo a (4), (8) y (9) será:

$$G_{dir}(z^{-1}) = G_p(z^{-1}) G_{PID}(z^{-1}) = b_0 p_0 \frac{1}{1 - z^{-1}} z^{-m} = K_I \frac{1}{1 - z^{-1}} z^{-m} \quad (12)$$

Se trata de una función de transferencia de un integrador en serie con un elemento de retardo puro y una ganancia:

$$K_I = b_0 p_0 \quad (13)$$

#### A. Análisis del sistema continuo equivalente

Considere el siguiente diagrama de bloques que corresponde al sistema equivalente continuo, el cual luego de discretizar la trayectoria directa permitirá obtener la función de transferencia discreta de lazo abierto (12).

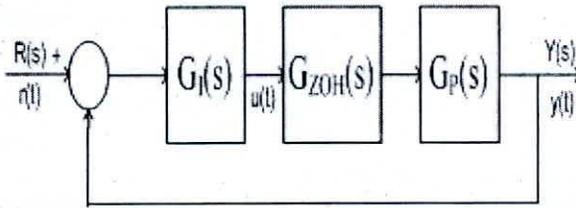


Fig. 2. Diagrama de bloques del sistema continuo equivalente para obtener (12).

La función de transferencia continua de lazo abierto es:

$$G_{idr}(s) = G_{zoh}(s)G_I(s)G_P(s) \tag{14}$$

Aquí se tiene:

$$G_{zoh}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \tag{15}$$

$$G_I(s) = \frac{K_I}{s} \tag{16}$$

$$G_P(s) = e^{-mTs} \tag{17}$$

Analicemos la respuesta en frecuencia de la trayectoria directa en lazo abierto equivalente continuo:

$$G_{idr}(j\omega) = T \frac{K_I}{j\omega} \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} e^{-mTj\omega}$$

$$G_{idr}(j\omega) = -2jT \frac{K_I}{\omega^2} e^{-j\omega T/2} \text{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right) e^{-mTj\omega}$$

Para valores de  $\omega T/2 < \pi$ , se tendrá :

$$|G_{idr}(j\omega)| = 2 \frac{K_I}{\omega^2} \left| \text{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \right| \tag{18}$$

$$\phi_{idr}(\omega) = -\frac{\omega T}{2}(2m+1) - \frac{\pi}{2} \tag{19}$$

De acuerdo al criterio de Nyquist, en la frecuencia de cruce de ganancia  $\omega_{cg}$  se medirá un margen de fase MF, que cumple:

$$\phi_{idr}(\omega_{cg}) = -\pi + MF \tag{20}$$

Donde:

$$|G_{idr}(\omega_{cg})| = 1 \tag{21}$$

Para hacer cumplir (21), de acuerdo a (18) se debe asegurar que:

$$2 \frac{K_I}{\omega_{cg}^2} \left| \text{sen}\left(\frac{\omega_{cg} T}{2}\right) \right| = 1 \tag{22}$$

despejando de (22) :

$$K_I = \frac{\omega_{cg}^2}{2 \left| \text{sen}\left(\frac{\omega_{cg} T}{2}\right) \right|} \tag{23}$$

Para pequeños valores de  $\omega_{cg} T/2 < \pi$ , se sabe  $|\text{sen}(\omega_{cg} T/2)| \approx (\omega_{cg} T/2)$ , entonces:

$$K_I = \frac{\omega_{cg}}{T} \tag{24}$$

De (19) y (20) en que  $\omega = \omega_{cg}$  se tiene que:

$$\frac{\omega_{cg} T}{2}(2m+1) + \frac{\pi}{2} = \pi - MF$$

$$\frac{\omega_{cg} T}{2}(2m+1) = \frac{\pi - MF}{2}$$

$$\omega_{cg} = \frac{\pi - MF}{T(2m+1)} \tag{25}$$

Con (25) en (24) se obtiene:

$$K_I = \frac{\pi - 2MF}{T^2(2m+1)} \tag{26}$$

Elijiendo un adecuado margen de fase, como  $MF=60^\circ = \pi/3$ , resulta que:

$$K_I = \frac{\pi/3}{T^2(2m+1)} \equiv \frac{1}{T^2(2m+1)} \tag{27}$$

De (13) obtenemos:

$$p_0 = \frac{K_I}{b_0} = \frac{1}{b_0 T^2(2m+1)} \tag{28}$$

De (10) y (11):

$$p_1 = -a_1 p_0 \tag{29}$$

$$p_2 = -a_2 p_0 \tag{30}$$

de esta manera, conocidos  $p_0$ ,  $p_1$  y  $p_2$  se calcula el controlador PID según (4).

Los valores de  $b_0$ ,  $a_1$  y  $a_2$  se obtienen en tiempo real mediante el método de mínimos cuadrados recursivos [1].

De acuerdo a (3) :

$$\Delta u(k) = K_p \left\{ 1 + \frac{T}{T_i} + \frac{T_D}{T} \right\} e(k) - K_p \left\{ 1 + 2 \frac{T_D}{T} \right\} e(k-1) + K_p \frac{T_D}{T} e(k-2) \quad (31)$$

y según (5), (6) y (7) :

$$\Delta u(k) = p_0 e(k) + p_1 e(k-1) + p_2 e(k-2) \quad (32)$$

Entonces de acuerdo a (3) :

$$u(k) = u(k-1) + \Delta u(k) \quad (33)$$

Reemplazando (32) en (33) :

$$u(k) = u(k-1) + p_0 e(k) + p_1 e(k-1) + p_2 e(k-2) \quad (34)$$

En forma empírica se puede justificar que en caso se obtengan excesivas amplitudes de la señal de control, estas se pueden aminorar agregando una ganancia adicional  $K_m$  a la ley de control dada por (34) modificándola a:

$$u(k) = u(k-1) + K_m \{ p_0 e(k) + p_1 e(k-1) + p_2 e(k-2) \} \quad (35)$$

Donde la ganancia ajustable  $K_m$  normalmente es menor que uno y su valor preciso se obtiene por prueba y error.

#### IV. EJEMPLO DE APLICACIÓN DEL ALGORITMO PID AUTOAJUSTABLE

Consideraremos un proceso que se describe mediante el siguiente modelo de segundo orden de fase mínima y estable, con un solo retardo (el intrínseco debido a la discretización):

$$y(k) = 0.17u(k-1) + 1.65y(k-1) - 0.0315u(k-2) - 0.665y(k-2) - 0.1235u(k-3) + e(k) \quad (36)$$

Donde  $e(k)$  es una componente aleatoria con media cero y varianza 0.01. Consideremos que los parámetros de este sistema varían con el tiempo, en la forma:

$$P(k) = P(k-1) + \alpha \quad (37)$$

En la que:

$$P^T(0) = [0.17 \ 1.65 \ -0.031 \ -0.665 \ -0.1235] \quad (38)$$

Es el vector de parámetros iniciales y  $\alpha$  es un vector con las componentes:

$$\alpha^T = [\Delta \ \Delta \ -\Delta \ -\Delta \ -\Delta] \quad (39)$$

Donde  $\Delta=0.002$ .

En este caso los valores iniciales de los parámetros del modelo son:  $b_0=0.17$ ,  $a_1=1.65$  y  $a_2=-0.665$ .

Para implementar el algoritmo de control autoajustable, se utiliza en forma recursiva además de la identificación de los parámetros de la planta, los parámetros del controlador PID autoajustable, utilizando (27), (28), (29) y (30), considerando  $m=1$ .

En el anexo A-3, se muestra el diagrama de simulación utilizado.

#### IV. RESULTADOS

Se realizó la simulación del sistema de lazo cerrado y en la figura 3, se muestra la respuesta del sistema controlado por el PID discreto autoajustable, para una entrada tipo escalón unitario.

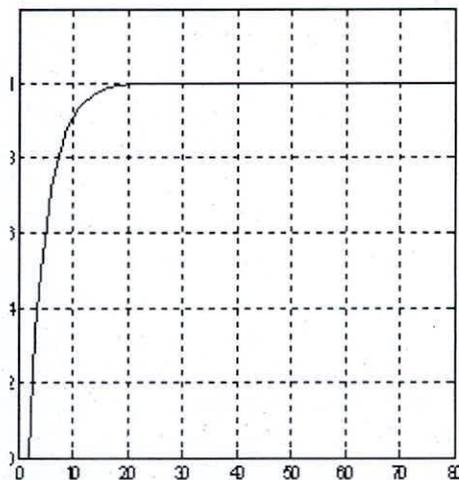


Fig. 3. Respuesta a una entrada escalón unitario en lazo cerrado.

La señal de control generada por el controlador PID autoajustable se muestra en la figura 4.

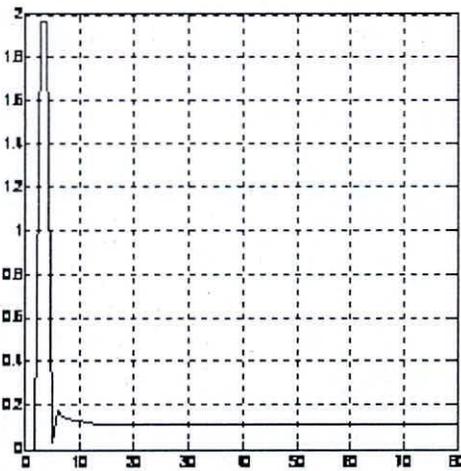


Fig. 4. Señal de control generada por el controlador autoajustable (entrada escalón unitario).

El seguimiento a un cambio de la referencia es puesta a prueba usando como entrada una onda cuadrada, la figura 5 muestra la respuesta de la planta controlada por el PID discreto autoajustable. Se muestra la señal de referencia y la salida obtenida.

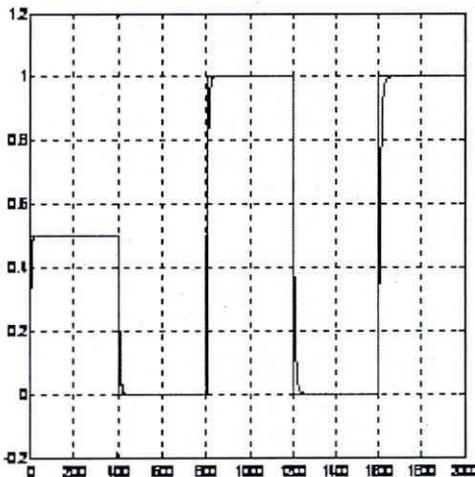


Fig. 5. Respuesta de la planta para una entrada de seguimiento tipo onda cuadrada.

La señal de control generada por el controlador PID autoajustable, cuando se aplica la entrada de seguimiento de onda cuadrada es mostrada en la figura 6.

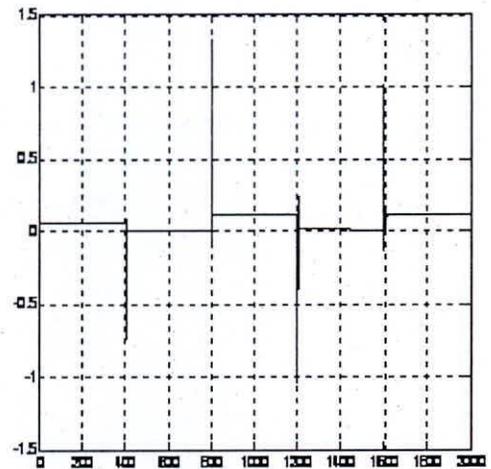


Fig. 6. Señal de control generada por el controlador autoajustable (entrada onda cuadrada de seguimiento).

Se puso a prueba el desempeño del controlador, para el caso en que no se haya considerado en el diseño el verdadero retardo mayor, por ejemplo  $m=4$ . Se muestra la respuesta de la planta para una entrada de referencia de seguimiento tipo onda cuadrada en la figura 7. Se muestra la señal de referencia y la salida obtenida.

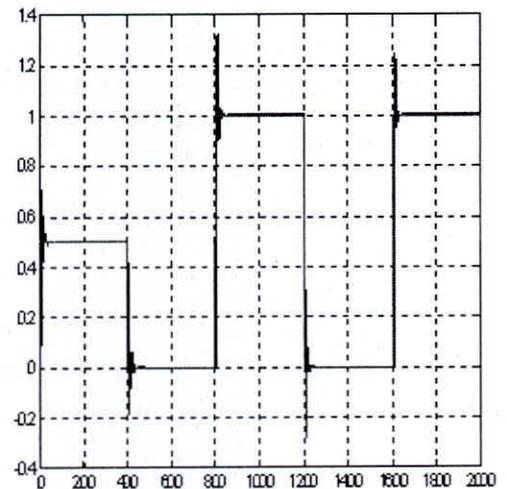


Fig. 7. Respuesta de la planta para una entrada de seguimiento tipo onda cuadrada, caso que la planta presenta mayor retardo.

La figura 8, muestra la señal de control generada por el controlador autoajustable PID, para el caso de entrada de seguimiento tipo onda cuadrada, en el caso que la planta presenta mayor retardo al considerado en el diseño.

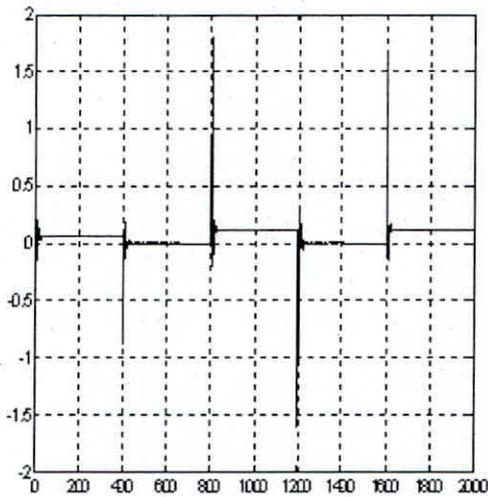


Fig. 8. Señal de control para una entrada de seguimiento tipo onda cuadrada, caso en que la planta presenta mayor retardo.

#### V. CONCLUSIONES

El método de autoajuste del controlador PID basado en un margen de fase fijado con anticipación, resulta en una implementación sencilla de realizar, siempre y cuando se asegure la identificación de los parámetros del proceso a controlarse en línea, de tal manera que la actualización de esos parámetros esté acorde con los cambios que se produce en la planta.

Tiempos de muestreo muy pequeños, producen parámetros del controlador PID demasiado grandes que dificultarían la implementación en sistemas digitales de aplicación comercial. Esto se traduce en una saturación del controlador, que puede traducirse en respuestas demasiado lentas, oscilaciones indeseadas, hasta inestabilidades del sistema de lazo cerrado.

Se asegura estabilidad en lazo cerrado, aún cuando los parámetros del modelo varíen en el transcurso de la operación del sistema; así la componente integral presente en el controlador autoajustable asegura la respuesta estacionaria para las entradas de referencia constantes, que son las normalmente usadas en aplicaciones industriales.

En el caso de que al proceso le corresponda un modelo discreto realmente con mayor retardo al considerado para el diseño, se observa que el controlador PID autoajustable presenta una buena robustez. Esta robustez permite seguir adecuadamente a la referencia aún cuando el excesivo retardo no se haya tomado en cuenta. Aunque la estabilidad relativa disminuye, el sobre impulso en caso de ser inadecuado se puede disminuir agregando una ganancia menor a uno en serie con la ley de control.

#### VI. REFERENCIAS

- [1] Alberto Aguado Behar, Miguel Martínez Irazo. Identificación y Control Adaptativo. Prentice Hall 2003.
- [2] Francisco Rodríguez Rubio, Manuel López Sánchez. Control Adaptativo y Robusto. Universidad de Sevilla 1996.
- [3] Karl J. Astrom, Bjorn Wittenmark. Computer-Controlled Systems Theory and Design. Prentice Hall 1997.

ANEXOS

A-1.- Aproximación discreta rectangular posterior de la componente integral en la ley de control PID

Sea la variación continua de la señal de error e(t) como se muestra a continuación en la figura A-1 :

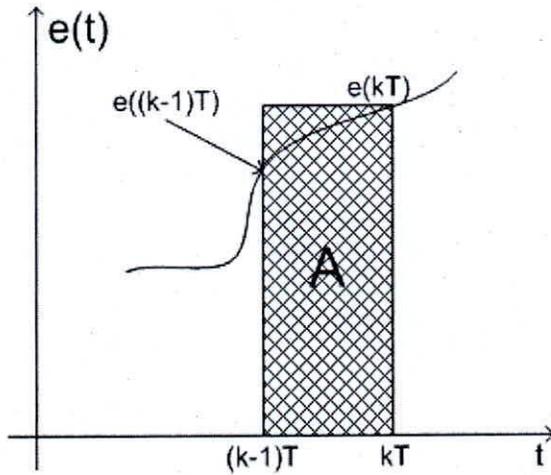


Figura A-1. Variación de e(t) en el instante kT.

Se indican los valores de la señal de error en los instantes de tiempos kT y (k-1)T.

Sea la integral de la señal de error I(t), el valor de esa componente en el instante de tiempo kT será :

$$I(kT) = I(kT - T) + \int_{(kT-T)}^{kT} e(t') dt' \quad (A-1)$$

La componente integral en el último período de muestreo se puede aproximar por el área A como muestra la figura A-1; de esta manera :

$$I(kT) \cong I(kT - T) + Te(kT) \quad (A-2)$$

La ecuación (A-2) se puede abreviar por :

$$I(k) = I(k-1) + Te(k) \quad (A-3)$$

Tomando la transformada zeta a (A-3) :

$$I(z) = T \frac{z}{z-1} E(z) \quad (A-4)$$

Descomponiendo (A-4) se obtiene :

$$I(z) = T(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots) E(z) \quad (A-5)$$

A partir de (5) se puede deducir :

$$I(k) = T\{e(k) + e(k-1) + e(k-2) + e(k-3) + e(k-4) + \dots\} \quad (A-6)$$

$$I(k) = T\{e(k) + e(k-1) + e(k-2) + e(k-3) + e(k-4) + \dots\}$$

$$I(k) = T \sum_{i=1}^k e(k) \quad (A-7)$$

A-2.- Aproximación discreta de la componente derivativa en la ley de control PID

Sea la derivada de la señal de error D(t), el valor de esa componente en el instante de tiempo kT, para un intervalo de muestreo T suficientemente pequeño, será aproximadamente :

$$D(kT) \cong \frac{e(kT) - e(kT - T)}{T} \quad (A-8)$$

La ecuación (A-8) se puede abreviar por :

$$D(k) = \frac{e(k) - e(k-1)}{T} \quad (A-9)$$

A-3.- diagrama de simulación del sistema de lazo cerrado con el controlador PID auto ajustable

Se muestra a continuación en la figura A-2, el diagrama de simulación del sistema de lazo cerrado, controlado con una ley PID autoajutable basado en un margen de fase prefijado. Cada etapa del sistema de lazo cerrado se representa como un bloque. Se implementó este diagrama en Simulink, creando varios subsistemas para cada una de las etapas del sistema. Las siguientes figuras muestran la implementación de cada etapa de lazo cerrado.

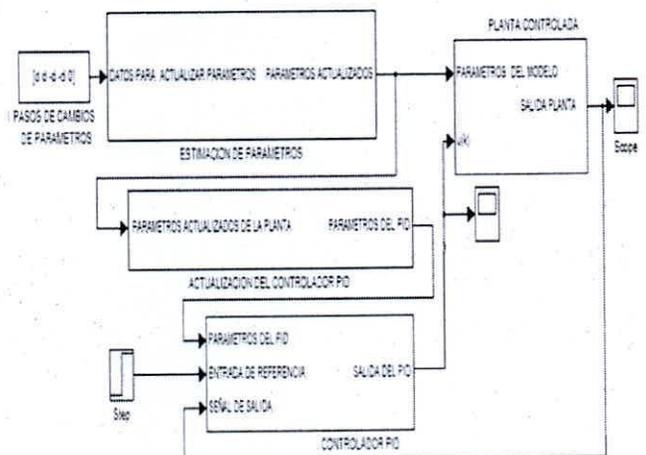


Fig. A-2. Diagrama de simulación del ejemplo analizado.

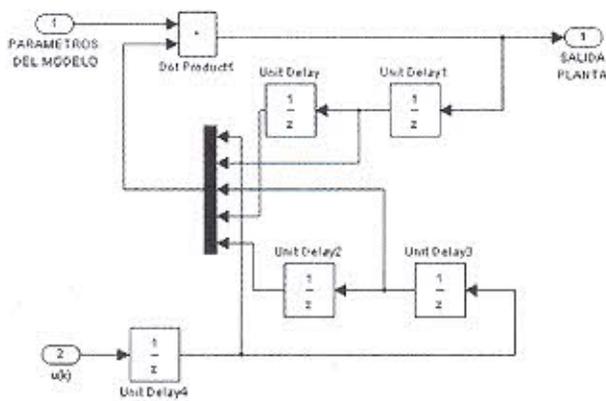


Fig. A-3. Modelo discreto de la planta.

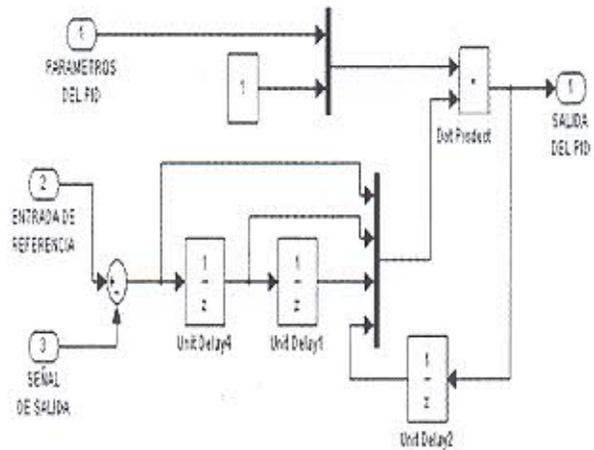


Fig. A-6. Algoritmo de control PID.

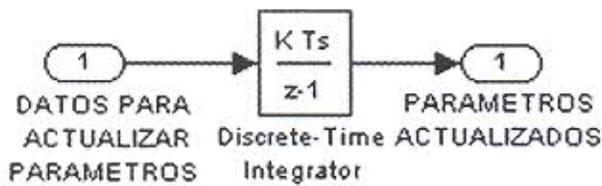


Fig. A-4. Actualización de los parámetros del modelo de la planta.

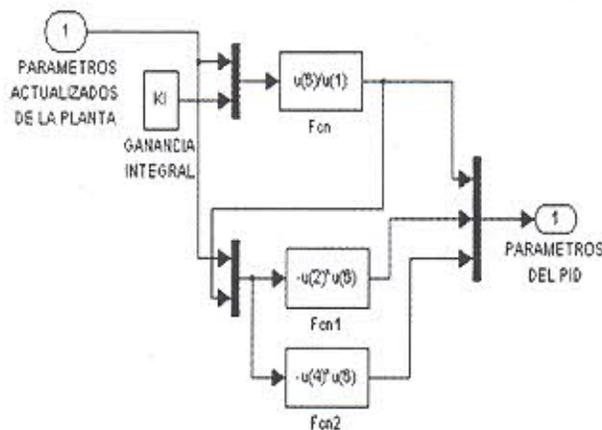


Fig. A-5. Actualización de los parámetros del controlador PID.