Obtención de Modelos de Procesos Mediante Métodos de Identificación Recursiva

Bruno Vargas Tamani

Facultad de Ingeniería Electrónica y Eléctrica, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú

RESUMEN: Desarrollamos los métodos de identificación paramétrica que permiten obtener el modelo matemático que más se aproxime al funcionamiento real de un sistema. Se analiza el método recursivo el cual se basa en el principio de los mínimos cuadrados. Para la experiencia se utiliza un sistema de adquisición de datos basado en la tarjeta DAQ de National Instruments PCI 6024E y el osciloscopio Textronix TDS 3012. Los algoritmos del programa se implementan en LabView y Matlab 7.0. Con la ayuda de estos recursos se implementa las técnicas de identificación por mínimos cuadrados y de identificación recursiva. Se muestran los resultados en cada caso.

ABSTRACT: We developed the methods of identification of parameters that allow to obtain the mathematical model that are more near to the real operation of a system. The recursive method is analyzed which is based on the principle of the square minimums. For the experience has been used a system of data acquisition based on card DAQ of National Instruments PCI 6024E and the oscilloscope Textronix TDS 3012. The algorithms of the program are implemented in LabView and Matlab 7.0. With the aid of these resources it has been implemented the technique of identification by minimums square and the recursive technique. The results are showed in each case.

PALABRAS CLAVES: control automático, identificación, minimización, adquisición de datos, parámetros.

I. INTRODUCCIÓN

Mediante la identificación de sistemas se obtienen la estructura y parámetros de un modelo matemático generalmente dinámico, que reproduce con suficiente exactitud para los fines deseados de control automático, las características dinámicas del proceso objeto de estudio. Es necesario para tal identificación, basarse en mediciones de las variables de salida y entrada del proceso en condiciones de funcionamiento [1], [2].

Requerimos por tanto de un experimento, que nos permita medir los datos de entrada y salida más representativos, considerándose como tales aquellos que permiten obtener la dinámica natural del proceso. Necesitamos para realizar un posterior procesamiento de las mediciones, que culminen la identificación; de un sistema de registro digital de esos datos. Por ello, es importantísimo contar con un sistema de adquisición de datos basado en computadoras. Normalmente como es nuestro caso, usamos una tarjeta de adquisición de datos insertada en un slot de la computadora, la cual con ayuda de un software de alto nivel, puede programarse para capturar los datos de interés, para almacenarlos y procesarlos.

Parte del procesamiento, consiste en definir las estructuras de modelos (generalmente lineales), que resultan en el modelo que se acerca mejor al comportamiento real del proceso. Finalmente el resultado de la identificación dará a conocer los parámetros de las estructura del modelo.

Para encontrar los parámetros de la estructura elegida, se requiere optar por un criterio, que represente la medida de que tan bien el modelo elegido se ajusta a los datos experimentales, el criterio más utilizado es el de la minimización de la suma de los cuadrados del error producido comparado los valores obtenidos del modelo elegido y los experimentales.

II. MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS

La Identificación Paramétrica de los Sistemas, consiste en obtener un modelo discreto, cuya estructura o forma esperada está compuesta de parámetros desconocidos. El resultado de esta identificación, reflejará el juego de parámetros que mejor se ajuste, a los datos discretos adquiridos del sistema. Para encontrar esos parámetros, procesando los datos medidos, debemos elegir un criterio que nos asegure una buena aproximación al proceso real. El método de mínimos cuadrados, define una estrategia, bastante utilizada para obtener un buen ajuste de los parámetros a encontrar.

Describiremos este método, que implementaremos en nuestro procedimiento de identificación [1].

Consideremos un sistema de una salida $y(k)$, medida en cada instante k; además suponemos que la salida medida $y(k)$, se puede calcular por medio de $\hat{y}(k)$ dado por el modelo:

$$\hat{y}(k) = \theta_1\varphi_1(k) + \theta_2\varphi_2(k) + \theta_3\varphi_3(k) \qquad (1)$$

La señal calculada $\hat{y}(k)$, presenta un error respecto a la señal medida $y(k)$. Además $\varphi_1(k)$, $\varphi_2(k)$ y $\varphi_3(k)$, son funciones conocidas a partir de medidas experimentales. Los parámetros θ_1, θ_2 y θ_3, son desconocidos.

La ecuación (1) conviene expresarla como:

$$\hat{y}(k) = \begin{bmatrix}\varphi_1(k) & \varphi_2(k) & \varphi_3(k)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\end{bmatrix} = \varphi(k)\theta \qquad (2)$$

donde hemos definido los vectores :

$$\varphi(k) = \begin{bmatrix}\varphi_1(k) & \varphi_2(k) & \varphi_3(k)\end{bmatrix} \qquad (3)$$

$$\theta = \begin{bmatrix}\theta_1 & \theta_2 & \theta_3\end{bmatrix}' \qquad (4)$$

Si se realizan las mediciones experimentales de $y(k)$ y $\varphi(k)$, para $k = 1,2,3,4,........$, es decir medimos:

$$\begin{aligned}&y(1), \varphi_1(1), \varphi_2(1), \varphi_3(1)\\ &y(2), \varphi_1(2), \varphi_2(2), \varphi_3(2)\\ &y(3), \varphi_1(3), \varphi_2(3), \varphi_3(3)\\ &y(4), \varphi_1(4), \varphi_2(4), \varphi_3(4)\end{aligned}$$

Con las mediciones de $\varphi_1(k)$, $\varphi_2(k)$ y $\varphi_3(k)$, hacemos el cálculo de las salidas :

$$\begin{aligned}\hat{y}(1) &= \theta_1\varphi_1(1) + \theta_2\varphi_2(1) + \theta_3\varphi_3(1)\\ \hat{y}(2) &= \theta_1\varphi_1(2) + \theta_2\varphi_2(2) + \theta_3\varphi_3(2)\\ \hat{y}(3) &= \theta_1\varphi_1(3) + \theta_2\varphi_2(3) + \theta_3\varphi_3(3)\\ \hat{y}(4) &= \theta_1\varphi_1(4) + \theta_2\varphi_2(4) + \theta_3\varphi_3(4)\end{aligned} \qquad (4)$$

Se supone que la salida real, está dada por la salida calculada (estimada) más un término de error $e(k)$. Es decir tenemos la igualdad:

$$y(k) = \hat{y}(k) + e(k) \qquad (5)$$

El error en cada instante k, estará dado por:

$$e(k) = y(k) - \hat{y}(k)$$

$$e(k) = y(k) - \theta_1\varphi_1(k) - \theta_2\varphi_2(k) - \theta_3\varphi_3(k) \qquad (6)$$

Si las salidas calculadas en (4), se agrupan en un vector $\hat{Y}$ donde:

$$\hat{Y} = \begin{bmatrix}\hat{y}(1)\\ \hat{y}(2)\\ \hat{y}(3)\\ \hat{y}(4)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\varphi(1)\theta\\ \varphi(2)\theta\\ \varphi(3)\theta\\ \varphi(4)\theta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\varphi(1)\\ \varphi(2)\\ \varphi(3)\\ \varphi(4)\end{bmatrix}\theta = \phi\theta \qquad (7)$$

donde:

$$\phi = \begin{bmatrix}\varphi(1)\\ \varphi(2)\\ \varphi(3)\\ \varphi(4)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \varphi_3(1)\\ \varphi_1(2) & \varphi_2(2) & \varphi_3(2)\\ \varphi_1(3) & \varphi_2(3) & \varphi_3(3)\\ \varphi_1(4) & \varphi_2(4) & \varphi_3(4)\end{bmatrix} \qquad (8)$$

Agrupamos en otro vector las salidas medidas $y(k)$:

$$Y = \begin{bmatrix}y(1)\\ y(2)\\ y(3)\\ y(4)\end{bmatrix} \qquad (9)$$

Ahora formemos un vector de todos los errores de medida:

$$E = \begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ e(3) \\ e(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(1) - \hat{y}(1) \\ y(2) - \hat{y}(2) \\ y(3) - \hat{y}(3) \\ y(4) - \hat{y}(4) \end{bmatrix} = Y - \hat{Y} = Y - \phi\theta \tag{10}$$

El problema de determinar los parámetros θ, se realiza de tal manera que la variable $\hat{y}(k)$, calculadas por (1), a partir de las medidas de $\varphi(k)$, se acerquen lo mejor posible a las variables medidas $y(k)$. El principio de mínimos cuadrados, dice que los parámetros θ, para ese fin se deben elegir de tal manera que la función de costo :

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4} e^2(k) \tag{11}$$

sea el mínimo. De esta manera el error entre el valor medido y el calculado se hará mínimo.

La función de costo se puede escribir como :

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4} e^2(k) = \frac{1}{2}\left[e^2(1) + e^2(2) + e^2(3) + e^2(4)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[e(1) \quad e(2) \quad e(3) \quad e(4)\right]\begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ e(3) \\ e(4) \end{bmatrix} = \frac{1}{2}E'E = \frac{1}{2}\|E\|^2$$

$$= \frac{1}{2}(Y - \hat{Y})'(Y - \hat{Y}) = \frac{1}{2}(Y - \phi\theta)'(Y - \phi\theta) \tag{12}$$

Entonces los parámetros θ, se calculan de tal manera que $\|E\|^2$ se minimice.

La función de costo se expresa ahora como:

$$J = \frac{1}{2}(Y - \hat{Y})'(Y - \hat{Y}) \; J = \frac{1}{2}(Y'Y - Y'\phi\theta - \theta'\phi'Y + \theta'\phi'\phi\theta)$$
(13)

Como la matriz $\phi'\phi$, siempre es definida no negativa, entonces $J(\theta)$ tiene mínimo.

Como $Y'\phi\theta = (\theta'\phi'Y)'$, entonces $Y'\phi\theta + \theta'\phi'Y = (\theta'\phi'Y)' + \theta'\phi'Y = 2\theta'\phi'Y$, por tanto:

$$J = \frac{1}{2}(Y'Y - 2\theta'\phi'Y + \theta'\phi'\phi\theta) \tag{14}$$

Para hallar el mínimo de $J(\theta)$, hallamos el valor de θ que hace $\frac{dJ(\theta)}{d\theta} = 0$. Obtendremos la igualdad:

$$-2\phi'Y + 2\phi'\phi\theta = 0$$

$$\phi'\phi\theta = \phi'Y \tag{15}$$

Entonces el mínimo $J(\theta)$, se obtiene para $\theta = \hat{\theta}$ dado por:

$$\theta = \hat{\theta} = (\phi'\phi)^{-1}\phi'Y \tag{16}$$

siempre y cuando $\phi'\phi$ sea no singular.

III. MÉTODO RECURSIVO

En los sistemas de control se requiere calcular los parámetros del modelo matemático del sistema en línea, para ese fin no podemos calcular esos parámetros con todos los datos hasta el último instante. Necesitamos realizar ese cálculo en el último instante a partir de los cálculos en los instantes previos. Esta manera es la llamada forma recursiva de estimación de parámetros [1].

Si luego de realizar N medidas, podemos estimar los parámetros del modelo a partir de la ecuación (16). Si luego realizamos una medida más en el instante (N+1), entonces volviendo a utilizar la ecuación (16), podemos estimar los parámetros θ en el instante (N+1), es decir:

$$\hat{\theta}(N+1) = \left[\phi'(N+1)\phi(N+1)\right]^{-1}\phi'(N+1)Y(N+1) \tag{17}$$

donde:

$$Y(N) = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ . \\ . \\ . \\ . \\ y(N) \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$Y(N+1)=\begin{bmatrix} Y(N) \\ y(N+1) \end{bmatrix} \quad (19)$$

También tenemos que:

$$\phi(N+1)=\begin{bmatrix} \phi(N) \\ \varphi(N+1) \end{bmatrix} \quad (20)$$

Por tanto :

$$\begin{aligned}\phi'(N+1)\phi(N+1) &= \begin{bmatrix} \phi(N) \\ \varphi(N+1) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \phi(N) \\ \varphi(N+1) \end{bmatrix} \\ &= \left[\phi'(N) \quad \varphi'(N+1)\right]\begin{bmatrix} \phi(N) \\ \varphi(N+1) \end{bmatrix} \\ &= \phi'(N)\phi(N)+\varphi'(N+1)\varphi(N+1)\end{aligned} \quad (21)$$

Reemplazando (21), (20) y (19) en (17) :

$$\begin{aligned}\hat{\theta}(N+1) &= \left[\phi'(N)\phi(N)+\varphi'(N+1)\varphi(N+1)\right]^{-1} \\ &\quad \begin{bmatrix} \phi(N) \\ \varphi(N+1) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} Y(N) \\ y(N+1) \end{bmatrix} \\ &= \left[\phi'(N)\phi(N)+\varphi'(N+1)\varphi(N+1)\right]^{-1} \\ &\quad \left[\phi'(N)Y(N)+\varphi'(N+1)y(N+1)\right] \\ &= \left[\phi'(N)\phi(N)\right]^{-1}\phi(N)Y(N) \\ &\quad -\left[\phi'(N)\phi(N)\right]^{-1}\phi(N)Y(N)+ \\ &\quad \left[\phi'(N)\phi(N)+\varphi'(N+1)\varphi(N+1)\right]^{-1}x \\ &\quad \left[\phi'(N)Y(N)+\varphi'(N+1)y(N+1)\right] \\ &= \left[\phi'(N)\phi(N)\right]^{-1}\phi(N)Y(N)+ \\ &\quad \left\{\begin{matrix}\left[\phi'(N)\phi(N)+\varphi'(N+1)\varphi(N+1)\right]^{-1} \\ -\left[\phi'(N)\phi(N)\right]^{-1}\end{matrix}\right\}x \\ &\quad \phi'(N)Y(N)+\left[\phi'(N)\phi(N)+\varphi'(N+1)\varphi(N+1)\right]^{-1} \\ &\quad x\varphi'(N+1)y(N+1)\end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}&\hat{\theta}(N+1)=\hat{\theta}(N)+ \\ &\left\{\begin{matrix}\left[\phi'(N)\phi(N)+\varphi'(N+1)\varphi(N+1)\right]^{-1} \\ -\left[\phi'(N)\phi(N)\right]^{-1}\end{matrix}\right\}x \\ &\phi'(N)Y(N)+\left[\phi'(N)\phi(N)+\varphi'(N+1)\varphi(N+1)\right]^{-1} \\ &\quad x\varphi'(N+1)y(N+1)\end{aligned} \quad (23)$$

Analicemos la componente que forma parte de (23)

$$\begin{aligned}&\left\{\begin{matrix}\left[\phi'(N)\phi(N)+\varphi'(N+1)\varphi(N+1)\right]^{-1}- \\ \left[\phi'(N)\phi(N)\right]^{-1}\end{matrix}\right\} \\ &\phi'(N)Y(N)=\left[\phi'(N)\phi(N)+\varphi'(N+1)\varphi(N+1)\right]^{-1} \\ &x\begin{bmatrix} I-\left[\phi'(N)\phi(N)+\varphi'(N+1)\varphi(N+1)\right] \\ (\phi'(N)\phi(N))^{-1} \end{bmatrix} \\ &\quad x\phi'(N)Y(N) \\ &=\left[\phi'(N)\phi(N)+\varphi'(N+1)\varphi(N+1)\right]^{-1} \\ &\quad x\left[I-I-\varphi'(N+1)\varphi(N+1)(\phi'(N)\phi(N))^{-1}\right] \\ &\quad x\phi'(N)Y(N) \\ &=-\left[\phi'(N)\phi(N)+\varphi'(N+1)\varphi(N+1)\right]^{-1} \\ &\quad x\varphi'(N+x\left[\phi'(N)\phi(N)\right]^{-1}\ \phi'(N)Y(N) \\ &=-\left[\phi'(N)\phi(N)+\varphi'(N+1)\varphi(N+1)\right]^{-1} \\ &\quad x\varphi'(N+1)\varphi(N+1)\hat{\theta}(N)\end{aligned} \quad (24)$$

Reemplazamos (24) en (23) :

$$\begin{aligned}&\hat{\theta}(N+1)=\hat{\theta}(N) \\ &-\left[\phi'(N)\phi(N)+\varphi'(N+1)\varphi(N+1)\right]^{-1} \\ &\quad x\varphi'(N+1)\varphi(N+1)\hat{\theta}(N) \\ &+\left[\phi'(N)\phi(N)+\varphi'(N+1)\varphi(N+1)\right]^{-1} \\ &\quad x\varphi'(N+1)y(N+1)\end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}&\hat{\theta}(N+1)=\hat{\theta}(N) \\ &-\left[\phi'(N+1)\phi(N+1)\right]^{-1}\varphi'(N+1)\varphi(N+1)\hat{\theta}(N) \\ &\quad +\left[\phi'(N+1)\phi(N+1)\right]^{-1}\varphi'(N+1)y(N+1)\end{aligned} \quad (26)$$

$$\hat{\theta}(N+1)=\hat{\theta}(N)$$
$$+\left[\phi'(N+1)\phi(N+1)\right]^{-1}\varphi'(N+1)$$
$$x\left[y(N+1)-\varphi(N+1)\hat{\theta}(N)\right] \quad (27)$$

Conviene hacer:

$$K(N)=\left[\phi'(N+1)\phi(N+1)\right]^{-1}\varphi'(N+1) \quad (28)$$

Con lo cual (27) tiene la forma:

$$\hat{\theta}(N+1)=\hat{\theta}(N)+K(N)$$
$$x\left[y(N+1)-\varphi(N+1)\hat{\theta}(N)\right] \quad (29)$$

Ahora analicemos (28), definamos inicialmente:

$$P(N)=\left[\phi'(N)\phi(N)\right]^{-1} \quad (30)$$

Por tanto :

$$P(N+1)=\left[\phi'(N+1)\phi(N+1)\right]^{-1} \quad (31)$$

Con (21) en (31) :

$$P(N+1)=\left[\phi'(N)\phi(N)+\varphi'(N+1)\varphi(N+1)\right]^{-1} \quad (32)$$

Utilizando el lema de la inversión de matrices:

$$P(N+1)=\left[\phi'(N)\phi(N)\right]^{-1}-$$
$$\left[\phi'(N)\phi(N)\right]^{-1}\varphi'(N+1)$$
$$x\left[I+\varphi(N+1)(\phi'(N)\phi(N))^{-1}\varphi'(N+1)\right]^{-1}$$
$$x\varphi(N+1)(\phi'(N)\phi(N))^{-1} \quad (33)$$

Reemplazando (30) en (33) :

$$P(N+1)=P(N)-P(N)\varphi'(N+1)$$
$$x\left[I+\varphi(N+1)P(N)\varphi'(N+1)\right]^{-1}\varphi(N+1)P(N) \quad (34)$$

Con (30) y (34) en (28):

$$K(N)=P(N+1)\varphi'(N+1)$$
$$=P(N)\varphi'(N+1)-P(N)\varphi'(N+1)$$
$$x\left[I+\varphi(N+1)P(N)\varphi'(N+1)\right]^{-1}$$
$$x\varphi(N+1)P(N)\varphi'(N+1)$$
$$=P(N)\varphi'(N+1)-P(N)\varphi'(N+1)$$
$$x\left[I+\varphi(N+1)P(N)\varphi'(N+1)\right]^{-1}$$
$$x\left[I+\varphi(N+1)P(N)\varphi'(N+1)-I\right]$$

$$K(N)=P(N)\varphi'(N+1)$$
$$x\left[I+\varphi(N+1)P(N)\varphi'(N+1)\right]^{-1} \quad (35)$$

Al reemplazar (35) en (34) :

$$\begin{aligned}P(N+1)&=P(N)-K(N)\varphi(N+1)P(N)\\&=\left[I-K(N)\varphi(N+1)\right]P(N)\end{aligned} \quad (36)$$

Resumimos ahora las expresiones:

Podemos iniciar un algoritmo recursivo con las N primeras medidas, usando (30) y (16):

$$P(N)=\left[\phi'(N)\phi(N)\right]^{-1} \quad (37)$$

$$\begin{aligned}\hat{\theta}&=\left[\phi'(N)\phi(N)\right]^{-1}\phi'(N)Y(N)\\&=P(N)\phi'(N)Y(N)\end{aligned} \quad (38)$$

En la medida siguiente se conocerá $\varphi(N+1)$ e $y(N+1)$; se puede calcular en el instante siguiente la identificación recursiva utilizando (35) y (29):

$$K(N)=P(N)\varphi'(N+1)$$
$$x\left[I+\varphi(N+1)P(N)\varphi'(N+1)\right]^{-1} \quad (39)$$

$$\hat{\theta}(N+1)=\hat{\theta}(N)+K(N)$$
$$x\left[y(N+1)-\varphi(N+1)\hat{\theta}(N)\right] \quad (40)$$

En las siguientes medidas e identificaciones para calcular $P(N+1)$ usamos (36) :

$$P(N+1)=\left[I-K(N)\varphi(N+1)\right]P(N) \quad (41)$$

Luego se repiten (41), (39) y (40), realizándose así la identificación recursiva.

IV. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA DE ADQUISICIÓN DE DATOS

El sistema de adquisición de datos, que hemos utilizado para desarrollar nuestras pruebas de Identificación de Sistemas, está basado en una tarjeta DAQ de National Instruments PCI 6024E y el osciloscopio Textronix TDS 3012, así como de un computador personal, circuitos electrónicos que simulan procesos, generadores de señal y fuentes de alimentación. El software utilizado, para la implementación de los algoritmos de identificación, así como los algoritmos de control discreto, es el LabVIEW 6.0 de National Instruments y el Matlab 7.0 de Math Works. Esta versión de Matlab, también fue utilizada para la simulación.

La Identificación Paramétrica, se realizó con los datos discretos del proceso, adquiridos por la tarjeta DAQ instalada en una PC; desarrollándose los algoritmos de mínimos cuadrados, explicados en el item anterior. La tarjeta de adquisición de datos PCI 6024E, es el componente fundamental del sistema. Mencionaremos algunas características fundamentales de ella. Ofrece 16 canales analógicos, multiplexor de canales analógicos, amplificador de instrumentación de ganancia programable, ganancias programables (0.5,1.0,10.0,100.0), margen dinámico de entrada de –5volt. a 5volt., conversor análogo digital de aproximaciones sucesivas de 12 bits, 02 salidas analógicas, 02 conversores digital análogo de 12 bits, margen dinámico de salida de –10volt. a 10volt., conector de entrada/salida de 68 pines, 08 entradas digitales, 02 contadores, frecuencia de muestreo de 200Khz., buffer de 512 muestras y transferencia de datos mediante DMA.

Es importante también anotar que el software LabVIEW, usado para el desarrollo de los algoritmos de adquisición de datos, identificación e implementación de los controladores digitales; está basado en una programación gráfica, lo cual quiere decir que las funciones a utilizarse en los programas se acceden a través de librerías, representadas por iconos. Así una aplicación se construye, conectando los iconos de las diferentes funciones que se requieran. Asimismo, la comunicación de datos de entrada por parte del usuario, así como la presentación de resultados de la aplicación ejecutada, se realiza en el panel del control, que equivale a la interface usuario en otros lenguajes de programación. El panel de control, se diseña también, utilizando los diferentes controles e indicadores que ofrece el LabVIEW a través de sus librerías.

V. IDENTIFICACIÓN POR MÍNIMOS CUADRADOS

En el diseño digital de controladores, requerimos un modelo discreto del proceso. Mediante la identificación por mínimos cuadrados y a partir de datos de entrada y salida medidos del proceso a la velocidad de muestreo elegida, se pueden obtener las funciones de transferencia discretas que se ajuste mejor a los datos medidos. Se ha implementado un algoritmo, que permite desarrollar el método de mínimos cuadrados.

La figura 1, muestra los datos de entrada y salida medidos del proceso, para períodos de muestreo de 8msg.

La aplicación del método de los mínimos cuadrados, para encontrar el modelo de primer orden discreto que más se acerca al proceso, resulta en la siguiente función de transferencia:

$$G(z) = \frac{0.2331}{z - 0.7475} \qquad (42)$$

$$\text{Tiempo de muestreo } = 0.008$$

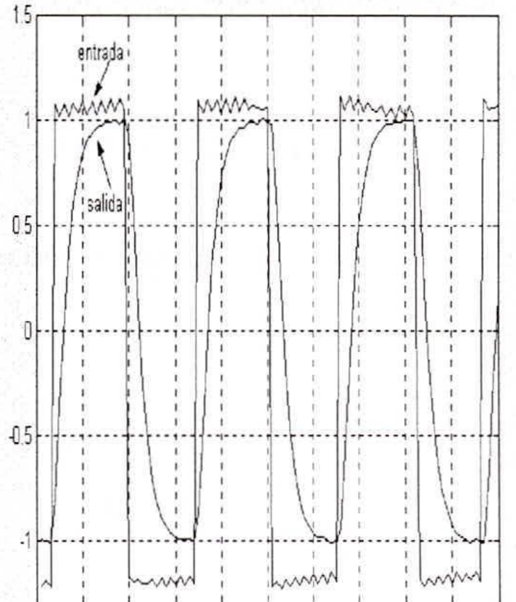


Fig. 1. Datos de entrada y salida para identificación por mínimos cuadrados

Para los mismos datos de entrada, la respuesta medida y la respuesta que se obtendría con el modelo de primer orden discreto, se muestran en la figura 2.

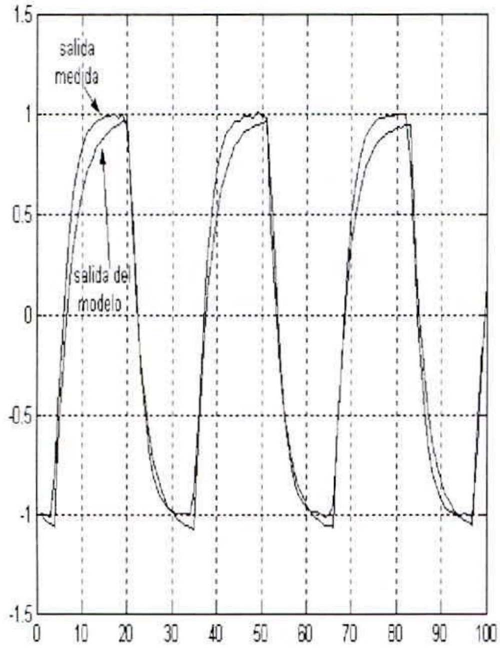


Fig. 2. Respuesta medida y respuesta del modelo discreto de primer orden.

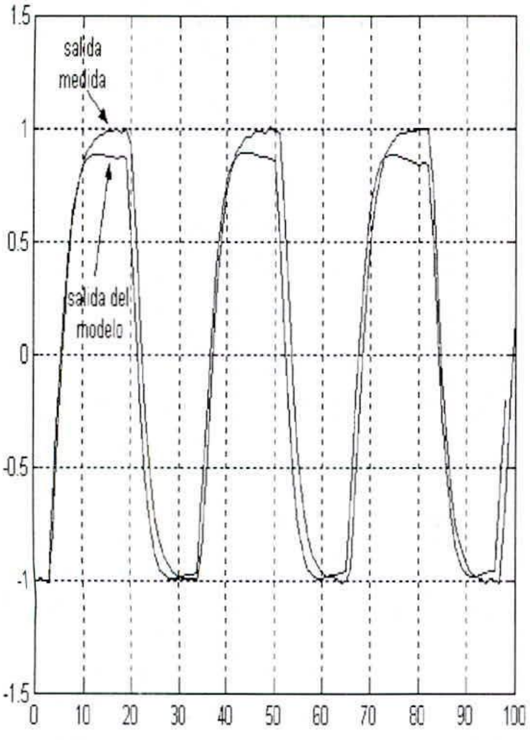


Fig. 3. Respuesta medida y respuesta del modelo discreto de segundo orden.

La identificación paramétrica por el método de mínimos cuadrados, para obtener el modelo de segundo orden discreto, que mejor se aproxima al proceso resulto ser :

$$G(z) = \frac{0.1553z - 0.01399}{z^2 - 1.264z + 0.4385} \tag{43}$$

$$\text{Tiempo de muestreo} = 0.008$$

Para la misma señal de entrada, la respuesta del modelo de segundo orden discreto, se muestra en la figura 3, superpuesta con la respuesta medida del proceso.

VI. IDENTIFICACIÓN RECURSIVA

Cuando se requiera la identificación en línea para actualizar controladores, recurrimos a este tipo de identificación recursiva. Utilizaremos este algoritmo para realizar la identificación del sistema a partir de datos medidos del proceso y que se mostraron en la figura 1. La velocidad de muestreo que se utilizó fue de 8 msg.

Primero vamos a realizar la identificación recursiva del modelo de primer orden, cuya forma general tiene la siguiente estructura:

$$G(z) = \frac{a}{z - b} \tag{44}$$

La identificación recursiva actualizará continuamente los parámetros del modelo a y b. La variación del cálculo recursivo de esos parámetros se muestra en la figura 4 para a y en la figura 5 para b.

Buscamos a continuación el mejor modelo de segundo orden discreto que represente al sistema, este sistema en forma general tiene la siguiente estructura:

$$G(z) = \frac{az + b}{z^2 - cz - d} \tag{45}$$

El cálculo mediante identificación recursiva de los parámetros a, b, c y d se muestran en las figuras 6, 7, 8 y 9, respectivamente.

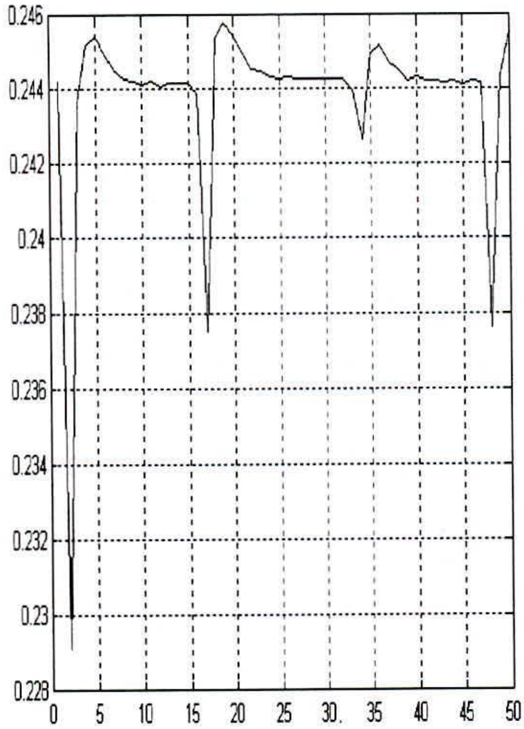


Fig. 4. Variación del cálculo recursivo del parámetro a, del modelo de primer orden.

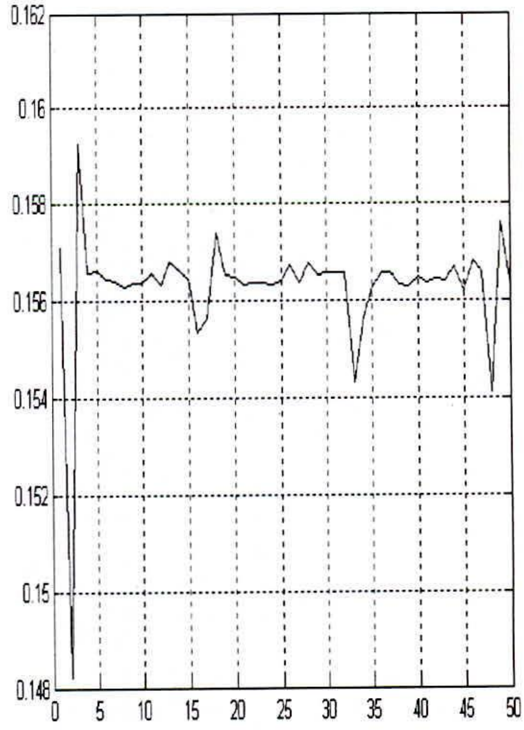


Fig. 6. Variación del cálculo recursivo del parámetro a, del modelo de segundo orden.

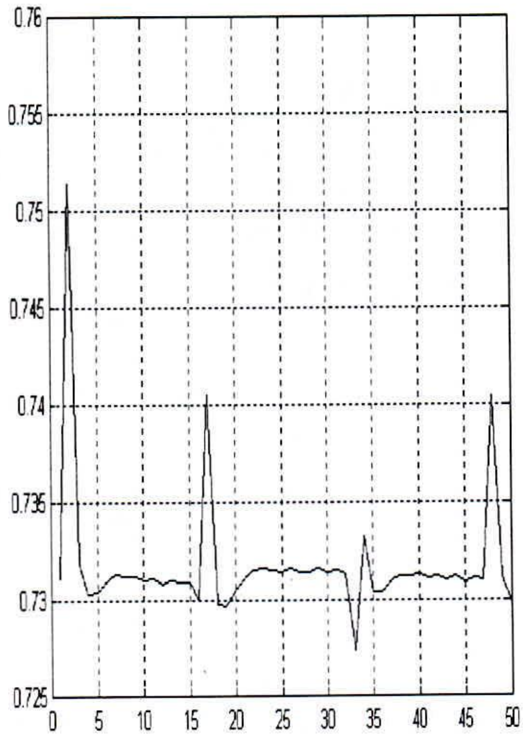


Fig. 5. Variación del cálculo recursivo del parámetro b, del modelo de primer orden.

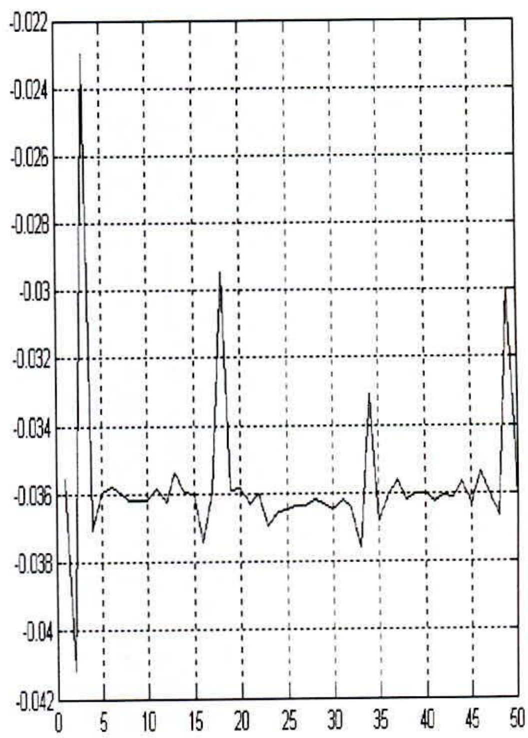


Fig.7. Variación del cálculo recursivo del parámetro b, del modelo de segundo orden.

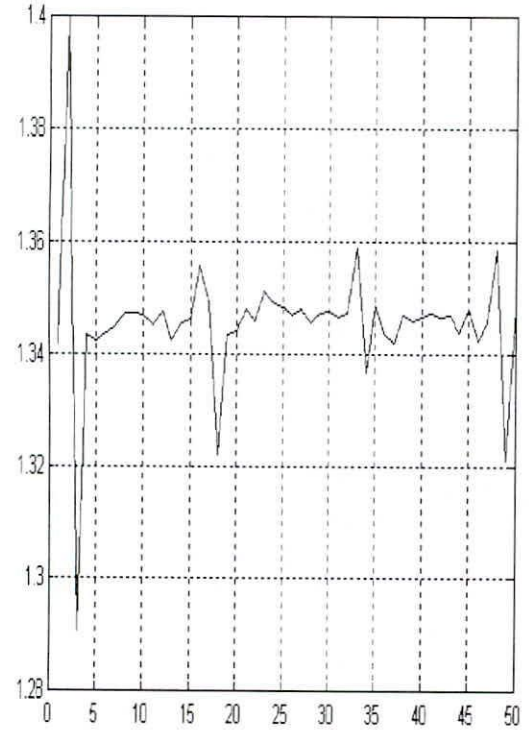
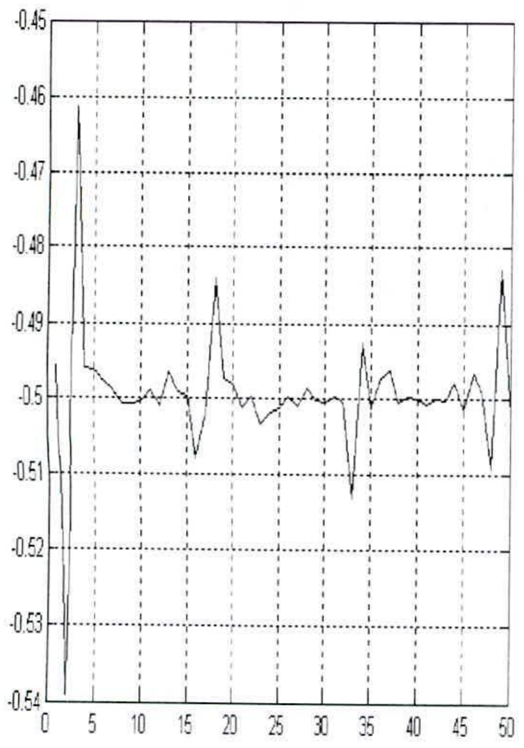


Fig. 8. Variación del cálculo recursivo del parámetro c, del modelo de segundo orden.



Fig, 9. Variación del cálculo recursivo del parámetro d, del modelo de segundo orden.

VII. CONCLUSIONES

La identificación mediante la técnica de mínimos cuadrados, permite obtener diferentes estructuras de modelo para los procesos a experimentar. Se puede elegir como modelo representativo del proceso, aquel que refleje menor error respecto a los datos medidos. En nuestro caso se obtiene el menor error utilizando el modelo obtenido de segundo orden discreto a 8 milisegundos.

La implementación del algoritmo de identificación recursiva comprueba que cuando se requiera la identificación en línea, se puede converger a los parámetros del modelo, según sea el modelo paramétrico elegido. Observe a partir de las figuras 4 y 5, como los parámetros a y b del modelo de la ecuación (44) convergen a los valores a y b de la ecuación (42). Asimismo en las figuras 6, 7, 8 y 9, se puede verificar que los parámetros a, b, c y d del modelo de la ecuación (45), convergen a los valores a, b, c y d de la ecuación (43).

La identificación recursiva permitirá entonces identificar en línea a los procesos y poder utilizar los parámetros actuales del modelo en la actualización del controlador (por ejemplo del tipo predictivo o adaptativo).

El algoritmo de identificación recursiva comprueba que permite converger a los parámetros del modelo a los valores que se obtuvieron por el método de mínimos cuadrados.

Inclusive cuando se presentan grandes cambios en la entrada, se observa en la identificación recursiva que su efecto en la variación de los parámetros, se produce de forma transitoria, pues luego retorna a sus valores de convergencia.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Astrom Karl, Wittenmark Bjorn. Computer-Controlled Systems Theory and Design. Prentice Hall 1997.

[2] Ljung Lennart. System Identification Toolbox, for use with MATLAB. The Math Works, Inc 1991

CEPREDIM

Se terminó de imprimir
en el mes de setiembre de 2007,
en los talleres gráficos del
Centro de Producción Editorial e Imprenta de
la Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Jr. Paruro 119. Lima 1.
Teléfono: 619-7000 anexos: 6011, 6015 / Fax: 6009
E-mail: ventas.cepredim@unmsm.edu.pe
Tiraje: 400 ejemplares