

# Determinación del Flujo Óptico Usando Parametrización de Líneas Delimitadas

Miguel Seminario Patiño

*Total-vic@yahoo.com*

**RESUMEN:** El artículo, describe el estado de arte de la determinación del Flujo Óptico utilizando parametrización de líneas delimitadas. El estudio es valido para aplicaciones en: medicina, movimiento de robots, topografía, comunicaciones, teledifusión, meteorología, animación tráfico vehicular, reconstrucción de objetos.

## I. INTRODUCCIÓN

Las imágenes que varían con el tiempo contienen intrínsecamente información útil en función de la aplicación del sistema [2][3][8][14][32]. La estimación del movimiento en una secuencia de cuadros de imágenes, puede ser abordada ya sea con el método basado en el uso de Posición de Imágenes, registradas de diferentes perspectivas, o con el método basado en el Flujo Óptico (FO) [32].

Se define el FO como el movimiento aparente del estándar de brillo observado cuando la cámara está en movimiento relativo a los objetos que están siendo observados [4][14][15][23]. El FO es también denominado flujo de imagen [10].

La estimación del FO puede ser determinada a partir de una secuencia de cuadros de imagen captados del mundo 3D. En otras palabras, específicamente el FO es el campo de velocidad (CV), o Campo del Movimiento (CM)[9] en 2D sobre la superficie de la retina (velocidades ópticas), velocidades que son la proyección de las velocidades en 3D de los puntos y/o objetos que se mueven en el espacio [4][14].

El análisis de escenas en movimiento ha sido usada en Visión Computacional (ViCom) ya sea como una propuesta inicial para determinar estructuras en movimiento de objetos en el espacio, o para segmentar escenas de objetos en movimiento partiendo del principio de movimiento de los contornos [27], o para predecir comportamientos futuros de capas/superficies del ambiente [21].

El FO es modelado geoméricamente y su ecuacionamiento es restringido. Las ecuaciones relacionan la

gradiente del brillo y el flujo de velocidad. Para obtener tales relaciones es preciso información adicional [4][14][15][16]. Unas de las formas de tener tal información es haciendo consideraciones referentes a las formas de los objetos que están siendo retratados en la superficie o Plano de Imagen (PI) [23]. Así el problema es derivar un esquema interactivo para estimar el FO.

Las aplicaciones son extensas cubriendo campos como: medicina, movimiento de robots, topografía, comunicaciones, teledifusión, meteorología, animación tráfico vehicular, reconstrucción de objetos, [8][14][25][26][32].

## II. CONSIDERACIONES INICIALES

En general, en los eventos del mundo 3D existen el observador y el objeto. En la relación entre ellos surgen tres casos: el observador esta estático y el objeto en movimiento, el observador está en movimiento y el objeto estático, el observador y el objeto están ambos en movimiento. Los movimientos son relativos uno con respecto al otro.

El objeto pertenece a una escena de un evento 3D del mundo real. El observador es un sistema en el cual se retrata en una superficie el PI, las escenas del mundo 3D. Existe una correspondencia unívoca entre los cambios de un evento de una escena y los cambios de la escena proyectada en PI [1][4][12][13][14][15][16][22][23][24]. Obsérvese que el observador puede ser una cámara la cual retrata imágenes de evento en su superficie de imagen. Los cambios en las imágenes pueden ser usadas para recuperar los movimientos relativos así como las formas de los objetos.

### A. Campo de velocidad

Campo de Velocidad (CV), que en algunas referencias también es llamado Campo de Movimiento [14], es

definido como la proyección en perspectiva de la velocidad de un objeto del mundo 3D sobre el PI [14], [32], ver figura 1.

De la figura 1, se tiene un punto  $\mathbf{P}$  en el espacio 3D, definido por el vector:

$$\mathbf{P}=(X,Y,Z)^T \quad (1)$$

Donde T indica la transpuesta del vector.

Un punto  $\mathbf{p}$  en el PI, imagen del punto  $\mathbf{P}$ , colocado a una distancia focal  $Z=$ , es definido por el vector :

$$\mathbf{p} = (x,y,l)^T \quad (2)$$

Este punto es ecuacionado tomando como referencia el Sistema de Coordenadas o'.

Se tiene la siguiente relación entre los vectores

$$\mathbf{p} = \frac{1}{Z} \mathbf{P} \quad (3)$$

La proyección en perspectiva del movimiento 3D sobre el PI puede ser obtenida derivando la ecuación (3):

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{1}{Z} (\dot{\mathbf{P}} - \mathbf{P} \frac{\dot{Z}}{Z}) \quad (4)$$

Donde  $\dot{\cdot}$  indica la derivada y  $\hat{Z}$  el vector unitario del eje Z.

En general, el movimiento 3D de un punto  $\mathbf{P}$  puede ser modelado incluyendo la componente translacional y rotacional, así:

donde:

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{W} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{P} \quad (5)$$

$$\mathbf{W} = (W_x, W_y, W_z)^T \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)^T \quad (7)$$

Los elementos de los vectores definidos por las ecuaciones (6) y (7) son las componentes instantáneas de la traslación y rotación, respectivamente. Sustituyendo las ecuaciones (3) y (5) en la ecuación (4), se tiene dos ecuaciones escalares correspondientes al CV, así:

$$p_1 = \frac{l}{Z} W_x - \frac{x}{Z} W_z + l \Omega_y - y \Omega_z - \frac{x}{l} (y \Omega_x - x \Omega_y) \quad (8)$$

$$p_2 = \frac{l}{Z} W_y - \frac{x}{Z} W_z + x \Omega_y - l \Omega_z - \frac{x}{l} (y \Omega_x - x \Omega_y) \quad (9)$$

## B. Estimación del Flujo Óptico

Supongamos que se tenga una imagen cualquiera y consideremos en ella una pequeña superficie con brillo

uniforme. Es probable que el FO sea cero en esa pequeña área, de hecho en ese diferencial de área se puede atribuir un modelo vectorial y registrar sus cambios de la imagen observada [9] [15].

Sea  $E(x,y,t)$  la irradiancia de un punto  $(x,y)$  en el tiempo  $t$  en un segmento de imagen. Si  $u(x,y)$  y  $v(x,y)$  son las componentes  $x$  e  $y$  del vector del FO en ese punto, entonces se espera que  $E$  sea igual en el tiempo  $t + \delta t$  en el punto  $(x+\delta x, y+\delta y)$  [9][10][14][15]; así:

$$\delta_x = u \delta t \quad (10)$$

$$\delta_y = v \delta t \quad (11)$$

Por lo que:

$$E(x + u \delta t, y + v \delta t + \delta t) = E(x, y, t) \quad (12)$$

Donde  $\delta t$  es un pequeño intervalo de tiempo.

Se debe observar que esta restricción no es suficiente para determinar tanto  $u$  como  $v$ . También, se puede asumir que CV es continuo en casi todo lugar.

Si el brillo varía suavemente en relación a  $x, y, t$  entonces la ecuación (2) puede ser expandida. Aplicando la serie de Taylor, se tiene:

$$E(x, y, t) + \delta x \frac{\partial E}{\partial x} + \delta y \frac{\partial E}{\partial y} + \delta t \frac{\partial E}{\partial t} + \epsilon = E(x, y, t) \quad (13)$$

Donde  $\epsilon$  contiene los términos de más alta orden en  $\delta x, \delta y, y \delta t$ . Dividiendo la ecuación (13) entre  $\delta t$ , se tiene:

$$\frac{\delta x}{\delta t} \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\delta y}{t} \frac{\partial E}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial t} + \mu(\epsilon) = 0 \quad (14)$$

En el límite, cuando  $\delta t \rightarrow 0$ , se tiene:

$$\frac{\partial E}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial E}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \quad (15)$$

La ecuación (15) es realmente la expresión de la ecuación donde el brillo de la imagen es considerado estacionario con relación a  $t$ , esto es:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad (16)$$

que es la derivada total de  $E$  con relación a  $t$ .

$$\frac{dx}{dt} = u \quad (17)$$

$$\frac{dy}{dt} = v \quad (18)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = E_x \quad (19)$$

$$\frac{\partial E}{\partial y} = E_y \quad (20)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = E_t \quad (21)$$

Sustituyendo las ecuaciones del (17) al (21) en (15), se obtiene:

$$E_x u + E_y v + E_t = 0 \quad (22)$$

Donde  $u$  y  $v$  representan las componentes del vector de velocidad local  $V$  a lo largo de  $x$  e  $y$ , respectivamente. La ecuación (22) es conocida como "Ecuación Restringida del Flujo Óptico" (Optical Flow Constraint Equation – OFCE), visto que se expresa sobre la restricción de las componentes de  $u$  y  $v$  del FO. Las soluciones de esta ecuación son referenciadas como FO y representa solamente una aproximación del CV,  $p$  [9].

La figura 2 ilustra la restricción del flujo de velocidad local determinado por la ecuación (22). Los valores de  $(u,v)$  que satisfacen la OFCE caen en la línea recta del espacio de velocidad (EV). Todo lo que se hace es identificar la Línea Restringida (LR). De la ecuación (22) se tiene que:

$$E_x u + E_y v = -E_t \quad (23)$$

Esta ecuación puede ser rescrita como:

$$(E_x, E_y)(u, v) = -E_t \quad (24)$$

La componente del movimiento en la dirección de la gradiente del brillo  $(E_x, E_y)^T$  es dada por la ecuación:

$$\frac{E_t}{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}}$$

La componente del FO sobre los ángulos rectos a esta dirección no puede ser determinada, o sea al largo de los contornos que poseen el mismo brillo. Esto es una desventaja, conocida como "problema de abertura" (problema presente en la visión humana). Este problema está relacionado a la imposibilidad de recuperar la información unívocamente en la dirección del movimiento si el objeto es observado a través de una abertura que es más pequeña que el tamaño del objeto. Ver figura 3.

De la figura 3, se puede observar que si se tienen modelos y objetos de una escena determinada, los elementos de referencia no son suficientes para ver la componente transversal del movimiento. Es posible

percibir y estimar la componente de velocidad aparente. Así:

$$V_{\perp} = \frac{E_t}{\|\nabla E\|} \frac{\nabla E}{\|\nabla E\|} \quad (25)$$

Donde es asumido que  $dE/dt = 0$  y  $\|\nabla E\| \neq 0$ .

Visto que el FO es considerado como la ecuación de una línea (LR) en el EV [15][23]; esto implica que la ecuación (22) no es suficiente para proveer una única solución en la estimación del FO. Se observa, también, que donde es posible definir por lo menos 2 LR diferentes, el problema de abertura no aparece. Ver figura 4.

No se puede dejar de mencionar que en el proceso de estimar el FO surgen discontinuidades en la velocidad local, debido a las discontinuidades o intermitencias del brillo. Estos problemas son causados principalmente por el ruido y/o oclusiones entre los objetos en movimiento o tal vez por las formas de los modelos o por las altas velocidades.

### III. ESTIMACIÓN DEL FLUJO ÓPTICO UTILIZANDO PARAMETRIZACIÓN DE LÍNEAS DELIMITADAS

#### A. Consideraciones Previas

En general, las contribuciones que usan la ecuación (22), (OFCE), son basados en métodos de gradiente  $(\nabla E)$  [32]. De cualquier forma, la ecuación (22) puede ser escrita con el objetivo de tener una ecuación de línea recta en el EV. De la ecuación (22) se tiene:

$$v = -\frac{E_x}{E_y} u - \frac{E_t}{E_y} \quad (26)$$

De la ecuación (26) se puede identificar que  $\frac{E_x}{E_y}$  es

la inclinación y  $\frac{E_t}{E_y}$  es la intersección. Haciendo:

$$-\frac{E_x}{E_y} = m \quad (27)$$

$$-\frac{E_t}{E_y} = c \quad (28)$$

De las ecuaciones (27) y (28) en la ecuación (26), se tiene:

$$v = mu + c \quad (29)$$

De la ecuación (29) se observa que cualquier punto a lo largo de la LR es solución para la estimación de la FO [6].

#### A. Contribuciones Anteriores: Breve Reseña

En [19] y [30] son analizadas las contribuciones de operación de los eventos cuando el FO y CV son iguales. Esto sucede en casos particulares, por ejemplo, iluminación isotrópica, sistema óptico calibrado, objetos con superficies lambertianas, modelos rígidos, y movimiento en el plano paralelo al PI.

En la literatura existen diferentes formas de abordar la estimación del FO. En términos generales, se puede afirmar, que cada propuesta tiene sus ventajas y desventajas. Dentro de esa óptica existen problemas a resolver, como limitaciones de los sistemas computacionales incluyendo la limitación de memoria, velocidad de computación, combinados con algoritmos computacionales eficientes y robustos. Del punto de vista del procesamiento de imágenes, se tiene el ruido, la oclusión, la segmentación, bordes cortantes, entre otros.

Según BEN-TZVI et al. [6], la estimación del FO puede ser clasificada como: i) Propuestas Basadas en la Regularización (PBR), ii) Propuestas Basadas en la Multi-Restricción (PBMR), y iii) Propuestas Basadas en los Multipuntos (PBMP).

Las contribuciones consideradas como PBR son estudiados en [15][18][24], de forma eficiente considerando la estimación del CV como un concepto no bien planeado. Mientras que en el PBMR es estimado el FO proponiendo un conjunto de ecuaciones para un punto determinado [17][31].

En la propuesta PBMP [6], se trabaja con ecuaciones restringidas aplicadas a los píxeles próximos. Como es de esperarse, se considera un mismo CV con el objetivo de encontrar un sistema de ecuaciones. Este conjunto de ecuaciones, definido para cada píxel de la vecindad, es resuelto con la Técnica de los Mínimos Cuadrados (TMQ). Como la TMQ es una técnica de medias (método numérico), equivale a que los resultados sean susceptibles al ruido y oclusión, dos de los problemas más importantes en el tratamiento de imágenes. En el caso de la oclusión los bordes oclusos de dos objetos en movimiento contribuyen con sus velocidades surgiendo una situación conflictante, resultando un FO no satisfactorio. En el caso del ruido se tienen la misma ponderación con los objetos en consideración.

#### B. Propuesta

BEN-TZVI et al. [6] proponen un método que puede ser clasificado dentro de las contribuciones

PBMP, por ejemplo se estima el FO usando el OFCE en la vecindad de cada píxel. La solución propuesta es basada en la transformada de Hough Combinacional (Combinatorial Hough Transform-CHT) y usa un Acumulador-contador (Ac) para cada segmento. Con esta alternativa se evita la desventaja de calcular los puntos a lo largo de la LR. También se discute que el método evita errores y el ruido.

#### 1) Sobre la Transformada de Hough

La Transformada De Hough (Hough Transform-Ht) [11] Es Una Herramienta Matemática Que Es Aplicada Una Imagen Gradiente. Esta Técnica Es Usada Para Detectar Líneas Rectas Y/O Curvas. Las Ecuaciones Que Describen As Líneas Deben Ser Planteadas De Forma Parámetroizada. La Meta Es Mapear El Pi En El Plano Paramétrico (Pp).

Una Recta Está Constituida De Puntos / Píxeles Y Es Escrita De Forma Parámetroizada Como Sigue:

$$v = mx + c \quad (30)$$

Donde m es el coeficiente angular (inclinación) y c es la intersección. El problema en la ecuación (30) es que en el PP tanto m como c pueden variar en el intervalo de  $(-\infty, \infty)$  lo que ocasiona un problema computacional: Por eso, para evitar ese contratiempo, escribimos la ecuación de la recta usando coordenadas polares, por lo que:

$$\rho = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (31)$$

Se debe observar que se restringe el parámetro  $\theta$  al intervalo  $(0, \pi/2)$ , por lo que se obtiene resultados únicos. Por tanto, una línea del PI corresponde a un punto en el PP.

El algoritmo HT es realizado cuantizando el PP ( $\theta, \rho$ ), de forma apropiada con la intención de tener un Ac, el mismo que es inicializado en cero. Cuantizar es tener incrementos de  $\theta$  y  $\rho$ , denominados como  $\Delta\theta$  y  $\Delta\rho$ , respectivamente. También, se debe tener la resolución lineal de la imagen.

Del algoritmo en funcionamiento, para cada píxel  $(x, y)$  de la imagen gradiente, cuyo valor sea mayor que un determinado umbral (píxel de Borda) se incrementa la célula respectiva en el Ac. Nótese que se debe satisfacer la ecuación (31). Se observa también, que  $\theta$  es variado en incrementos de  $\Delta\theta$  para luego calcular  $\rho$  y hacer:

$$Ac(\theta, \rho) \leftarrow Ac(\theta, \rho) + 1 \quad (32)$$

Al final del conteo se obtiene un Ac completo. Cada una de las células contiene los valores respectivos del conteo. Luego, se inspecciona el Ac con el objetivo de identificar las células que tienen los más altos valores que corresponden a los puntos colineales de la imagen. El valor de la célula representa el número de puntos o píxeles de aquella recta de la imagen. Como ejemplo, consideremos que se tiene nueve valores más altos en el Ac, entonces se tiene nueve líneas rectas de la imagen gradiente, líneas que forman una figura.

En la literatura también se encuentra a lo que se denomina transformada de Hough Generalizada (Generalized Hough Transform-GIIT). Esta extensión permite detectar curvas de cualquier formato, obviamente las ecuaciones deben estar escritas de forma parametrizada.

Por otro lado, el algoritmo de la CHT opera sobre la línea más probable en lugar de usar todas las líneas posibles mediante un píxel de Borda [7]. Así, se evita incrementar el Ac en todo el rango de  $\theta$  y para cada píxel de contorno. El Ac sólo es incrementado en los valores de  $\theta$  que correspondan a las líneas que pasan a través del píxel de contorno.

La idea fundamental de la CHT es usar los puntos característicos de la imagen. Este método evita calcular los  $\rho_j$  en todo el rango de los  $\theta_j$ . Obsérvese que cada dos píxeles de la imagen indican una posible colinealidad. Los parámetros ( $\theta$  y  $\rho$ ), del segmento de línea pueden ser derivados de la ecuación (31).

Así, si ( $\theta$  y  $\rho$ ) son los parámetros que describen la línea formada por los puntos ( $x_1, y_1$ ) y ( $x_2, y_2$ ) se tiene:

$$\rho = x_1 \cos \theta_0 + y_1 \sin \theta_0 \quad (33)$$

$$\rho = x_2 \cos \theta_0 + y_2 \sin \theta_0 \quad (34)$$

Sustrayendo de la ecuación (33) la ecuación (34), se tiene:

$$0 = (x_1 - x_2) \cos \theta_0 + (y_1 - y_2) \sin \theta_0 \quad (35)$$

Desarrollando:

$$\frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0} = - \frac{(x_1 - x_2)}{(y_1 - y_2)} \quad (36)$$

Por tanto:

$$\theta_0 = \arctan\left(-\frac{\Delta x}{\Delta y}\right) \quad (37)$$

donde:

$$\Delta x = x_1 - x_2 \quad (38)$$

$$\Delta y = y_1 - y_2 \quad (39)$$

Observar que  $\theta_0$  puede ser usado para calcular  $\rho_0$  sustituyéndola en la ecuación (31).

Como ejemplo, en el caso de tres puntos colineales, estos son mapeados por tres co-senoides en el PP, las curvas resultantes se interceptan en un punto, o sea, tres combinaciones de dos puntos de intersección tienen los mismos valores en el PP. Entonces, para determinar si  $k$  puntos son colineales, todas las posibles combinaciones del segmento de línea, constituido de dos puntos, necesitan ser calculados con:

$$C_k^2 = \frac{k!}{2!(k-2)!} \quad (40)$$

Se observa que para uno de estos cálculos, cada par de puntos contribuyen un conteo en el Ac de la intersección [7].

## 2) El Computo del Conteo

En [12] se describe un método que cuantifica la velocidad y dirección de diferentes objetos considerando una secuencia de imágenes digitales. La propuesta describe un método de agrupamiento para calcular la velocidad. Se implementó un Ac para toda la imagen. Según [6] eso es una deficiencia, la cual es superada segmentando la imagen y utilizando un Ac para cada segmento. Si los valores de los segmentos son pequeños se puede asumir que se tiene un valor común de velocidad ( $u, v$ ). Utilizando esta consideración las LR de cada segmento se interceptan en un punto común, el cual tiene coordenadas de velocidad en ese segmento. Ver figura 5.

La forma de identificar el punto que lleva la velocidad local es determinando el valor máximo del conteo. Para obtener ese punto se considera en el PP cada LR representado como un punto ( $m, c$ ) definidos por las ecuaciones (27) y (28).

BEN-TZVI et al. [6] argumenta que el requisito de un punto común de intersección de la LR de un segmento de imagen en el EV es equivalente al requisito de colinealidad de sus puntos correspondientes en el PP (ver figura 6). Así, el punto de intersección de varias LR en el EV es mapeado como una línea en el PP, línea que demarca o fija todas las líneas rectas que pasan por ella.

Supongamos que se tiene un conjunto de segmentos de línea en el PP y se desea estimar el FO de cada uno de esos segmentos. Según BEN-TZVI et al. [6] el procedimiento a seguir consiste en encontrar "la mejor línea" que forma la imagen y que corresponda las LR. En el método que usa la TMQ la mejor línea es

considerada como la línea que atribuye la distancia mínima de esos puntos, pero en la propuesta de [6] la mejor línea es aquella que consigue el máximo conteo a partir de esos puntos. La mejor línea es denominada Línea Característica (LC) del segmento.

La ejecución del algoritmo es realizado usando CHT [7]. Cada par de puntos en el PP denotados, en este caso, como  $(m_1, c_1)$  y  $(m_2, c_2)$  pertenecen a la LR, incrementan la cuenta en el histograma (II) Ac-1D en el parámetro angular  $\theta$  de la línea que los concatena, así:

$$\theta = \arctan\left(-\frac{m_2 - m_1}{c_2 - c_1}\right) \quad (41)$$

De todos modos, BEN-TZVI et al. [6] estima el FO considerando los  $n \times n$  píxeles en la vecindad de los puntos bajo consideración, de tal modo que cada segmento de imagen produce  $n^2$  LR o  $n^2$  puntos en el PP, esos puntos contribuirán en  $C_{n^2}^2$  cuentas en el H. Se argumenta que el valor de  $\theta$  en el punto de máxima cuenta en el H, denotado  $\theta_{max}$  es la inclinación de la LC en el PP, alrededor del cual los puntos de la LR son agrupados. Se afirma también, que  $\theta_{max}$ , genera un segundo H correspondiente al otro parámetro  $\rho$  de la línea. De tal modo los  $(m_i, c_i)$  puntos de la LR, contribuyen en la cuenta del segmento en el H- $\rho$  en:

$$\rho_i = m_i \cos \theta_{max} + c_i \sin \theta_{max} \quad (42)$$

De la ecuación se puede observar que  $\rho$  consigue las máximas contribuciones. Se observa que  $\rho_{max}$  es el otro parámetro de la LC. BEN-TZVI et al. [6] describe que  $(\theta_{max}, \rho_{max})$  es la representación normal de la mejor LC en la cual se agrupan los puntos de la LR. De modo que, la velocidad que mejor representa este segmento es directamente derivable a partir de los parámetros de la línea:

$$u = \cot \theta_{max} \quad (43)$$

$$v = \frac{\rho_{max}}{\sin \theta_{max}} \quad (44)$$

En el PP, el punto de intersección en el eje donde la LC lo cruza representa la horizontal de la LR, inclinación cero, correspondiente al punto de intersección en el EV. La ordenada de esta línea en el EV es  $v$ , como aquel del punto de intersección, es por eso que es igual a la intersección de la LC en el PP, como lo expresado en las ecuaciones (43) y (44).

BEN-TZVI et al. [6] infieren que el método propuesto para la estimación del FO es mas claro y tiene ventajas, comparado con la TMQ. En la figura 6 están ilustrados el método propuesto y el método

usando la TMQ. Se observa como los puntos con ruido se desvían del LC.

Antes de terminar esta sección, consideremos que se tiene una imagen segmentada cualquiera. Si un segmento de esa imagen contiene un borde entre dos objetos que poseen velocidades diferentes, el efecto resultante será que cada uno de ellos contribuirá con una LC más pequeña en el PP, eso comparado con el caso en el cual se tiene un segmento como un elemento de velocidad. El caso de dos objetos produce dos picos en la cuenta, o valores máximos en el Ac, el procedimiento es escoger el valor mayor y considerarlo como el más representativo del segmento.

#### IV. RESULTADOS EXPERIMENTALES

El algoritmo propuesto en [6] fue implementado en un sistema secuencial. La estimación del FO es calculada considerando una LR para cada píxel de imagen. Re escribiendo la ecuación (26)

$$v = -\frac{E_x}{E_y}u - \frac{E_t}{E_y} \quad (45)$$

donde

$$E_x = \frac{E(x+1, y, t) - E(x-1, y, t)}{2} \quad (46)$$

$$E_y = \frac{E(x, y+1, t) - E(x, y-1, t)}{2} \quad (47)$$

$$E_t = \frac{E(x, y, t+1) - E(x, y, t-1)}{2} \quad (48)$$

$E_x$ ,  $E_y$  y  $E_t$  representan las derivadas parciales en relación a  $x$ ,  $y$ ,  $t$ , respectivamente. BEN-TZVI et al. [6] explican que para desarrollar las derivadas parciales es necesario tener tres imágenes consecutivas. Los resultados fueron conseguidos con segmentos de imágenes 5X5, con dos píxeles sobrepuestos, tal que la estimación de velocidad es hecha con un grado de tamaño 3X3. Se describe también, que para cada segmento de imagen 5X5 existen hasta 300 combinaciones posibles en torno de la LR parametrizada. El número total de combinaciones surge de la ecuación (41), donde en este caso  $k = 5^2$ , por lo que:

$$C_{5^2}^2 = \frac{25!}{2!(25-2)!} = 300 \quad (49)$$

De esta forma la ecuación (41) es ejecutada para cada una de esas combinaciones y la cuenta es realizada

en conformidad a la  $H-\theta$  del segmento considerado. Cuando la cuenta termina se busca el valor máximo de  $\theta$ ,  $\theta_{max}$ , el cual debe ser mayor que un Límite ( $l$ ) real. Observar que se utiliza ( $l$ ) con la intención de eliminar el ruido. Aplicando la ecuación (42) se construye un  $H-\rho$  con los valores de inclinación y de la intersección de la LR del segmento, considerando  $\theta_{max}$ . Por tanto, el valor de  $\rho$  en el máximo de  $H$ , junto con  $\theta_{max}$  son utilizados para calcular la velocidad para el segmento analizado aplicando las ecuaciones (43) y (44).

El algoritmo propuesto por BEN-TZVI et al. [6] fue implementado tanto para trabajar con imágenes sintéticas como con imágenes reales. Los casos ensayados abarcan imágenes con eventos de Traslación-Rotación, y Expansión. Los resultados son presentados en las figuras 7, 8, ..., 11.

## V. SOBRE LA IMPLEMENTACIÓN EN PARALELO

El principal problema a resolver en el análisis de escenas en movimiento es la estimación de las componentes 3D de la velocidad de los objetos observados. La evaluación de CV en un grado regular de la imagen es útil para resolver algunos de los problemas relacionados con la navegación de robots, reconstrucción 3D de los objetos y/o simplemente la estimación 3D del movimiento.

Con el avance de la tecnología existe la necesidad de ejecutar el análisis del movimiento en tiempo real. Una aplicación directa de ese desarrollo es en navegación de robos. La implementación en paralelo es una manera de abordar el tema. Existen pocos ejemplos en la literatura, pero es obvio que muchos de las propuestas computacionales de las contribuciones científicas para estimar el movimiento son altamente paralizables.

Existen tres grandes desafíos en la estimación del movimiento. Ellos son el acoplamiento, el filtraje espacio-tiempo, y el abordaje basado en el gradiente. Los tres tópicos son adecuados para una implementación en paralelo.

En [20] se discute una implementación en paralelo. El montaje es realizado de forma que un sistema es concatenado a una maquina-2. los resultados son muy interesantes, pues se proveen estimaciones casi en tiempo real. En [6] como en [20] son registrados tiempos del orden de decimos de segundos.

## VI. CONCLUSIONES Y ANÁLISIS CRÍTICO

### A. Conclusiones

- 1) Fueron presentadas consideraciones iniciales como el campo de velocidad y el flujo óptico con la intención de entender mejor la propuesta de BEN-TZVI et al. [6].
- 2) Fue expuesta, abreviadamente, la transformada de Hough como el artificio matemático en la implementación del algoritmo propuesto.
- 3) Fue discutida la estimación del flujo óptico usando la Línea Restringida parametrizada.
- 4) Fueron mostrados los resultados experimentales obtenidos [6], tanto para imágenes sintéticas como reales considerando eventos de traslación, rotación, traslación-rotación y expansión.
- 5) Fue debatida ligeramente la implementación en paralelo con el fin de resolver los problemas en la estimación del movimiento de los objetos en tiempo real.

### B. Análisis Crítico

El abordaje de BEN-TZVI et al. [6] es fundamentada en las OFCE. Su trabajo trata de solucionar problemas que surgen de las discontinuidades del brillo en una imagen. De esa forma supera otras técnicas como TMQ, que es sensible al ruido y a la oclusión. En relacional tiempo computacional, los resultados son buenos dados que la implementación en paralelo permite que la tarea se ejecute casi en tiempo real. Del punto de vista de los ensayos, no se realizan experiencias con imágenes sintéticas de expansión y/o imágenes convergentes en general.

## AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Consejo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq) e al Instituto de Física de San Carlos de la Universidad de San Pablo-Brasil ( Instituto de Física de São Carlos de la Universidade de São Paulo-Brasil).

## REFERENCIAS

- [1]ADIV, G.(Inherent ambiguities in recovering 3D motion and structure from a noise flow field. IEEE Transaction on Pattern Recognition and Machine intelligence, 11(5): 447-489, May 1989.
- [2] AGGARWA, J.K. ( Guest ed. ) Computer Vision, Graphycs and Image Processing, 21: 1-2,1983.
- [3] AGGARWA, J.K. and BADLER, N.I. ( Guest ed.) Special issue on motion and time-varying imaginary. IEEE Transaction on Pattern

- Recognition and Machine Intelligence, 2(6): 493-494, November 1980.
- [4] BALLAR.D, D.H. and BROWN, C.M. Computer Vision. New Jersey, Prentice Hall, 1982, 523p.
- [5] BARRON, J.L.; FLEET, D.J.; BEAUCHEMIN, S.S. and BURKITT, T.A. Performance of optical flow techniques. CVPR. 236-242, 1992.
- [6] BEN-TZVI, D.; DEL BIMBO, A. and NESI, P. Optical flow from constraint lines parametrization. Pattern Recognition, 26(10): 1549-1561, 1993.
- [7] BEN-TZVI, D. and SANDLER, M.B. A combinatorial hough transform Pattern Recognition Letters, 11(3): 167-174, March 1990.
- [8] BRUSS. A.R. and HORN, B.K.P. Passive navigation. Computer Vision, Graphics and Image Processing, 21: 3-20, 1983.
- [9] DEL BIMBO, A.; NESI, P. and SANZ, J.L. Optical flow computation using extended constraints. Tech. Rep. Dipartimento de Sistemi e Informatica, Facolta' di Ingegneria, Universite' di Firenze, DSI-RT 19/92.
- [10] DEL BIMBO, A.; NESI, P. and SANZ, J.L. Analysis of optical flow constraints. Tech. Rep. Dipartimento de Sistemi e Informatica, Facolta' di Ingegneria, Universite' di Firenze, November 92.
- [11] DUDA, R.O. and HART, P.E. Use of the hough transformation to detect. lines curves in pictures. Communication of ACM, 15(1.): 1.1-15, 1972.
- [12] FENNEMA, C.L. and THOMPSON, W.B. Velocity determination in scenes containing several moving objects. Computer Vision, Graphics and Image Processing, 9: 301-315. April 1979.
- [13] GONZALEZ, R.C. and WINTZ, P. Digital Image Processing. USA, Addison-Wesley, 1987, 503p.
- [14] HORN, B.K.P. Robot Vision. Massachusetts, MacGraw-Hill, 1986, 504p.
- [15] HORN, B.K.P. and SCHUNK, B.G. Determining optical flow. Artificial Intelligence, 17: 185-203, 1981.
- [16] MARR, D. Vision. New York, W.H. Freeman, 1982. 597p.
- [17] MITICHE, A.; WANG, Y.F. and AGGARWAL, J.K. Experiments in computing optical flow with the gradient-based, multiconstraint method. Pattern Recognition, 20(2): 173-179, 1987.
- [18] NAGEL EL, H.- H. On a constraint equation for the estimation of displacement rates in image sequences. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 11(1): 13-30, January 1989.
- [19] NELSON, R.C. and ALOIMONOS, J. Obstacle avoidance Using flow field divergence. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 11(10): 11202-1106, October 1989.
- [20] NESI, P.; DEL BIMBO, A. and BEN-TZVI, D. Algorithms for optical flow estimation in real-time on connection machine-2. Tech. Rep. Dipartimento de Sistemi e Informatica, Facolta' di Ingegneria, Universite' di Firenze, DSI-RT 24/92, Italy, 1992.
- [21] PAQUIN, R. and DUBOIS, E. A spatio-temporal gradient method for estimating the displacement field in time-varying imagery. ation in optical flow. Computer Vision , Graphics and Image Processing, 21: 205-221, 1983.
- [22] PRATT, W.K. Digital Image Processing. USA John Willey - Sons, 1978, 750p.
- [23] PRAZDNY, K. On information in optical flow. Computer Vision, Graphics and Image Processing, 22: 239-259, 1983.
- [24] SCHUNCK, B.C. Image flow segmentation and estimation by constraint line clustering. IEEE Transactions 011 Pattern Analysis and Machine Intelligence, 11(10): 1010-1027, October 1989.
- [25] SEMINARIO, M.A. e OBAC, V. Técnica para o reconhecimento de padrões visuais em movimento. Workshop sobre Visão Cibernética, São Carlos-SP Brasil, pp 81-86, Agosto 1994.
- [26] SNYDER, W.E. (Guest ed.) Computer analysis of time-varying images. Computer society, 14(8): 7-9, August 1981.
- [27] THOMPSON, W. B. y Combining motion on contrast for segmentation. IEEE Transactions Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2(16): 543-549, November 1980.
- [28] THOMPSON, W.B. and BARNARD, S.T Lower level estimation and interpretation of visual motion. Computer, 14: 20-28, August 1981.
- [29] ULLMAN, S. Analysis, of visual motion by biological and computer system. IEEE Computer Society, 14(8): 57-69, August 1981.
- [30] VERRY, A and POGGIO, T. Motion field and optical flow: qualitative properties. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 11(5): 490-498, May 1989.
- [31] WEBB. J.A. and AGGARWAL, J .K. Visually interpreting the motion of objects in space. IEEE Computer Society, 14(8): 40-46, August 1981.
- [32] YOUNG, T.I. and FU, K.-S. (eds ) Handbook of Pattern Recognition and Image Processing. USA. San Diego, Academic Press, 1986. 705p.

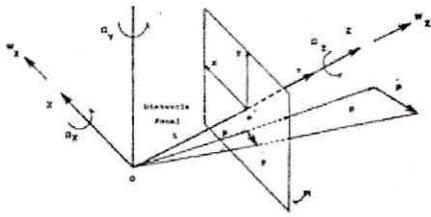


Fig. 1. Geometría de la cámara y movimiento aparente

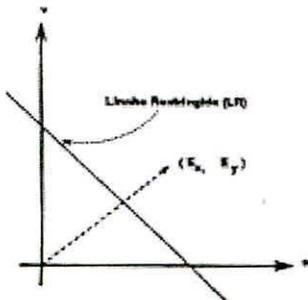


Fig. 2. Espacio de velocidad, Se muestra la restricción de la velocidad del flujo local expresada por la eq.(22)

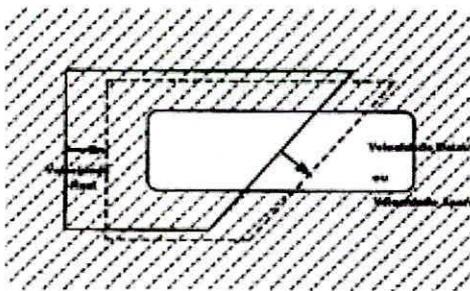


Fig. 3. Visualización del problema de apertura

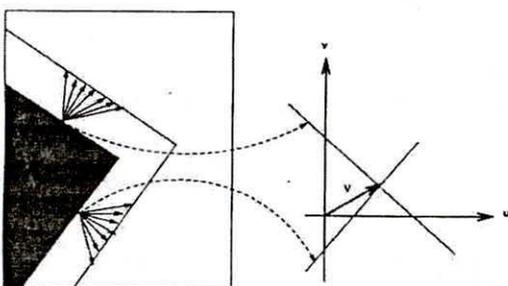
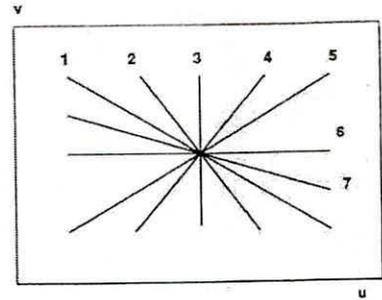
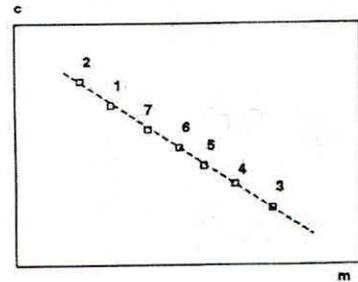


Fig. 4. Problema de apertura asociado a Línea Restringida en el espacio de velocidad.

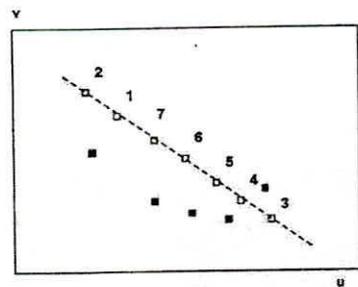


(a) En el espacio de velocidad

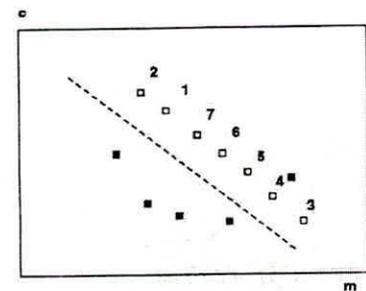


(b) En el plano paramétrico

Fig.5. Líneas Restringidas Parametrizadas

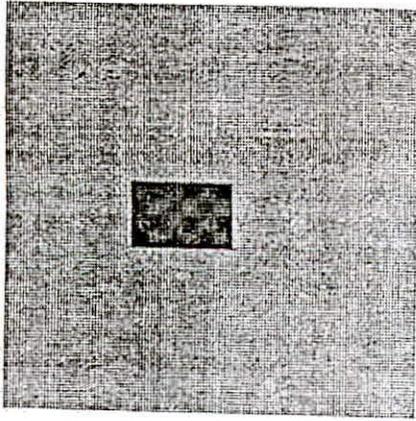


(a) Estimación basado en conteo

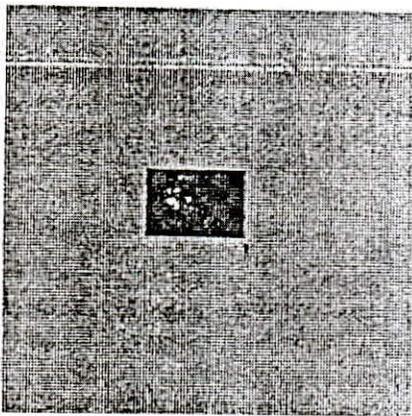


(b) Estimación basado la técnica de los mínimos cuadrados

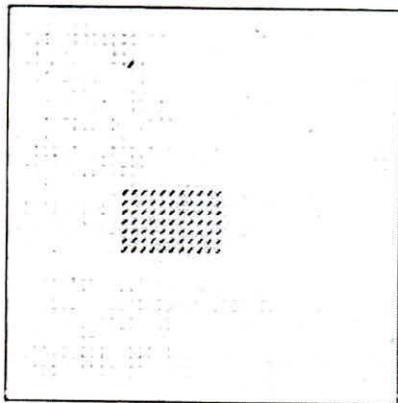
Fig. 6. Efectos del ruido (□= punto sin ruido, ■=punto con ruido, ---= línea estimada)



(a) Cuadros número 5(1228x128)



(b) Cuadros número 10(128x128)



(b) Estimación del Flujo Óptico



(a) Secuencia de tráfico vehicular a lo largo del eje x, cuadro número 1(128x128)



(b) Idem para cuadro número 5



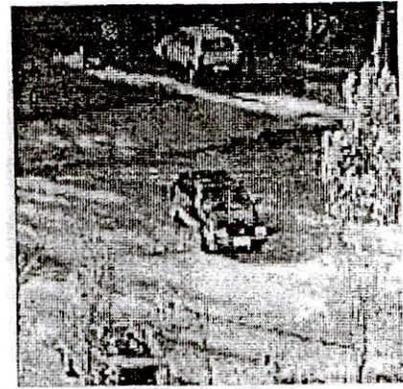
(b) Estimación del flujo óptico

Fig. 7. Movimiento de translación de una secuencia de imágenes sintéticas

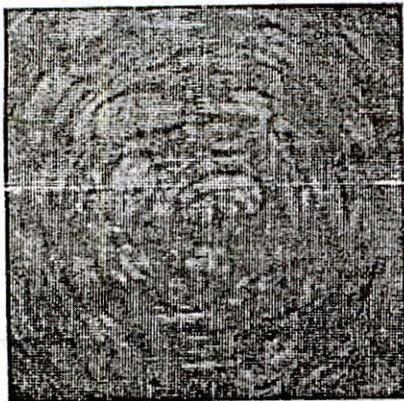
Fig. 8. Movimiento de translación de una secuencia de imágenes reales



(1)



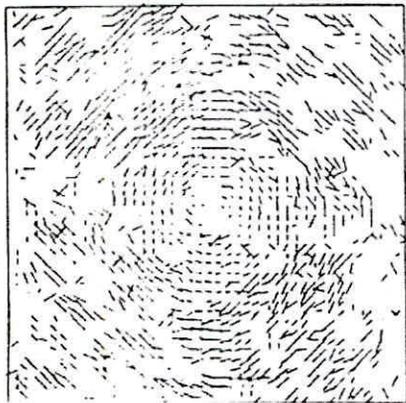
(a) 17



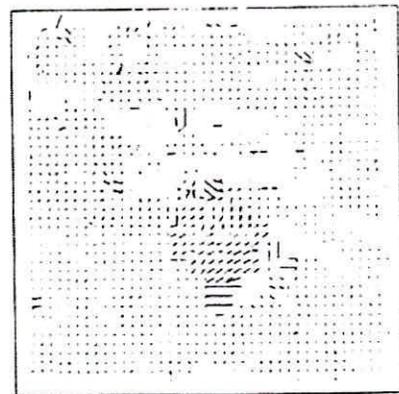
(a)5



(2) 28



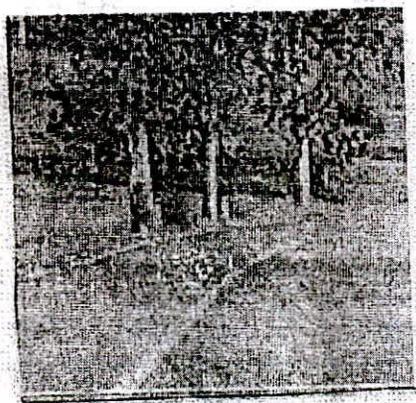
(b)



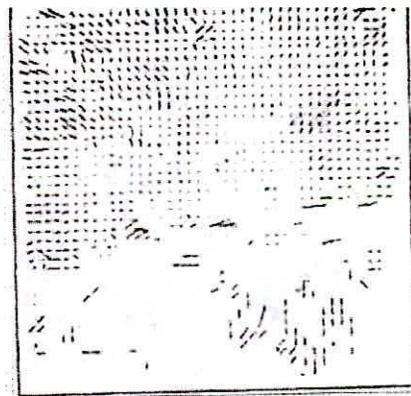
(b)

Fig. 9. Movimiento de rotación de una secuencia de imágenes sintéticas, a) modelo rotado en torno del eje z. Cuadros número 1 y 5, resolución 128x128, b) estimación del Flujo Óptico.

Fig. 10. Movimiento combinado de Translación de una secuencia de imágenes a) cuadros número 17 y 28, resolución 128x128 b) estimativa del Flujo Óptico



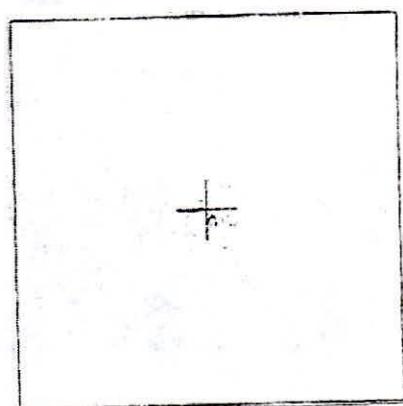
(a) 1



(b)



(a) 16



(c)

Fig.11. Movimiento que expansión de una secuencia de imágenes reales . (a) cuadros número 1 y 16 (128x128) b) Estimación del Flujo Óptico c) Distribución del FDE (campo de expansión)