

MODELO DE ECUACIONES DE FLUJOS DE POTENCIA REAL Y REACTIVA EN SISTEMAS DE ENERGIA ELECTRICA

Ing. Luis Milla Lostaunau
d270021@unmsm.edu.pe

Facultad de Ingeniería Electrónica de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos de Lima - Perú

Resumen: El presente trabajo presenta un estudio para facilitar los cálculos de los flujos de potencia en las barras o nodos de un sistema eléctrico, estos cálculos están basados en métodos o modelos como Gauss Seidel y Newton – Raphson.

Abstract: This article a study to facilitate the calculations of the flows of power in the bars or nodes of an electric system, these calculations are based on methods or models as Gauss Seidel and Newton – Raphson.

Palabras Claves: Barras, Módulos, Angulo del Voltaje, Flujo de Potencia, Potencia Real, Potencia Reactiva.

I. INTRODUCCION

La necesidad de poder determinar el funcionamiento de un sistema eléctrico es muy importante es la operación de un sistema, así como para efectuar el planeamiento y diseño de extensiones futuras de la red.

Los estudios de flujos de potencia se realizan para ciertas condiciones de cargas predeterminadas, según un plan de generación y la conexión de la red de transmisión.

Las cargas se muestran como el suministro de potencia real y reactiva fija, independiente del voltaje.

En todos los generadores se muestra el módulo de voltaje, que corresponde a los terminales de los mismos, los que se mantienen constantes por acción de un regulador de voltaje. En uno los generadores se debe especificar el módulo y ángulo del voltaje terminal.

Pueden estar asociadas además las variables: módulo de voltaje, el ángulo del voltaje, la potencia real y reactiva que suministrarán los generadores y la potencia sustraída.

Llegar a un resultado consiste en calcular el módulo y el argumento de los voltajes en todas las barras donde no se conocen, lo que hace obtener flujos de potencia real y reactiva en todas las ramas de la red.

II. CALCULO DE LOS VOLTAJES Y FLUJOS DE POTENCIA REAL Y REACTIVA DE UN SISTEMA DE ENERGIA ELECTRICA

El funcionamiento de un sistema eléctrico en régimen permanente equilibrado queda definido si se saben los valores de los voltajes en todos los barras o nodos del sistema y los flujos de potencia real y reactiva en todos los elementos de la red.

La determinación del funcionamiento es de gran importancia para la operación, la planeación y diseño de ampliaciones futuras.

Los estudios se realizan para una condición de carga determinada, así como para un plan de generación y de conexión de la red de transmisión. Las cargas se representan como una extracción de potencia real y reactiva fija, independiente del voltaje.

Para todos los generadores, menos uno, se plantea un módulo de voltaje determinado, que pertenece al voltaje en los terminales del generador, el cual se mantiene constante por acción del regulador de voltaje y generación de potencia del programa de generación propuesto, donde se especifican únicamente módulo y ángulo del voltaje terminal.

En cada barra o bus del sistema pueden vincularse cuatro cantidades: el módulo del voltaje, el ángulo del voltaje y la potencia real y reactiva producida por las generadores o sustraídas por las cargas.

Las barras pueden clasificarse en tres grupos (que serán descritos más adelante) según las cantidades que se conocen al iniciar el estudio y las desconocidas deben calcularse.

2.1 Los Tipos de barras son:

Barras donde se conocen la potencia real y reactiva sustraídas, en este caso, debe calcularse el módulo y argumento del voltaje.

Barras de generación donde se conocen el módulo y ángulo del voltaje (generalmente igual a cero), en este caso, debe calcularse la potencia real y la reactiva proporcionada por el generador.

Barra de generación donde se conoce el módulo y la potencia real proporcionada por el generador, en este caso, debe calcularse el ángulo del voltaje y la potencia reactiva proporcionada por el generador.

La solución del flujo de potencia consiste en calcular, el módulo y el argumento de los voltajes de todas las barras, lo que permitirá calcular los flujos de potencia real y reactiva en todas las ramas de la red, las pérdidas reales y reactivas en la red, la potencia real y reactiva producidas por el generador, donde se mencionó solamente el módulo y el argumento del voltaje y la potencia, reactiva generada por los otros generadores.

III. PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES DE FLUJO DE POTENCIA

Gran parte de los métodos para resolver el problema de flujos de potencia se basa en las ecuaciones nodales de la red.

La forma general de las ecuaciones nodales de un sistema de $n+1$ nodos mayores uno de los cuales, el neutro, se tome como referencia para los voltajes, es la siguiente:

$$\bar{Y}_{11}\bar{V}_1 + \bar{Y}_{12}\bar{V}_2 + \dots + \bar{Y}_{1k}\bar{V}_k + \dots + \bar{Y}_{1n}\bar{V}_n = \bar{I}_1$$

$$\bar{Y}_{21}\bar{V}_1 + \bar{Y}_{22}\bar{V}_2 + \dots + \bar{Y}_{2k}\bar{V}_k + \dots + \bar{Y}_{2n}\bar{V}_n = \bar{I}_2$$

$$\bar{Y}_{k1}\bar{V}_1 + \bar{Y}_{k2}\bar{V}_2 + \dots + \bar{Y}_{kk}\bar{V}_k + \dots + \bar{Y}_{kn}\bar{V}_n = \bar{I}_k$$

$$\bar{Y}_{n1}\bar{V}_1 + \bar{Y}_{n2}\bar{V}_2 + \dots + \bar{Y}_{nk}\bar{V}_k + \dots + \bar{Y}_{nn}\bar{V}_n = \bar{I}_n$$

Las fuentes de corriente que se muestran en las ecuaciones anteriores, que representan los generadores y las cargas pueden expresarse en función de la potencia real y reactiva en par unidad, inyectadas o substraídas en cada punto de unión.

Por ejemplo:

$$\bar{I}_k = \left(\frac{\bar{P}_k^+ j\bar{Q}_k}{\bar{V}_k} \right)^* = \frac{\bar{P}_k - j\bar{Q}_k}{\bar{V}_k}$$

y la ecuación quedará:

$$\bar{Y}_{k1}\bar{V}_1 + \bar{Y}_{k2}\bar{V}_2 + \dots + \bar{Y}_{kk}\bar{V}_k + \dots + \bar{Y}_{kn}\bar{V}_n = \frac{\bar{P}_k - j\bar{Q}_k}{\bar{V}_k^0} \quad (1)$$

En las barras de carga donde se conocen la potencia real y reactiva, la ecuación puede plantearse directamente.

En las barras de generación, donde se especifica la potencia real generada y el módulo del voltaje terminal del generador, es conveniente expresar la potencia reactiva en función de los voltajes y las admitancias de la red.

El problema consiste en determinar los voltajes, en módulos y argumento en todas las barras resolviendo el sistema de n ecuaciones simultáneas de la forma de la ecuación (1).

Este es un sistema de ecuaciones no lineal, por lo que se recurre a métodos iterativos para obtener la solución .

Los dos métodos más utilizados son el Gauss – Seidel y el Newton – Raphson.

Una vez conocidas todos los voltajes de los nodos pueden calcularse los flujos de corriente en todas las ramas de la red, cuyas admitancias son conocidas y los flujos de potencia real y reactiva.

3.1 Solución de las ecuaciones de flujo de potencia por el método de Gauss – Seidel.

Despejando de la ecuación (1) \tilde{V}_k

$$\tilde{V}_k = \frac{1}{\bar{Y}_{kk}} \left[\frac{\bar{P}_k - j\bar{Q}_k}{\tilde{V}_k} - \sum_{m=1}^n \bar{Y}_{km} \tilde{V}_m \right] \quad (2)$$

donde $m \neq k$

El cálculo puede hacerse de la siguiente manera:

Partiendo de valores supuestos de los n voltajes se calcula el valor del voltaje en el punto de unión 1, mediante la ecuación (2) para $k = 1$

$$\tilde{V}_1 = \frac{1}{\bar{Y}_{11}} \left[\bar{P}_1 - j\bar{Q}_1 - \sum_{m=2}^n \bar{Y}_{1m} \tilde{V}_m \right] \quad (3)$$

El valor corregido del voltaje de punto de unión 1 se utiliza para calcular en forma similar el valor corregido del voltaje de punto de unión 2. El proceso se repite en cada barra, hasta incluir las n barras, lo que completa la primera iteración. Con los valores de los n voltajes obtenidos en la primera iteración, se repite el proceso todas las veces que sea necesario, hasta que la diferencia entre los valores de los voltajes de cada barra calculados en dos iteraciones sucesivas sea menos que una tolerancia predeterminada.

En las barras de generación donde se conocen la potencia real y el módulo del voltaje, debe calcularse la potencia reactiva mediante la expresión que se deduce a continuación:

De la ecuación (1)

$$\bar{P}_k - j\bar{Q}_k = \tilde{V}_k^* \sum_{m=1}^n \bar{Y}_{km} \tilde{V}_m$$

La parte imaginaria de la expresión anterior con signo negativo corresponde a la potencia reactiva.

$$\bar{Q}_k = -\operatorname{Im} \left[\tilde{V}_k^* \sum_{m=1}^n \bar{Y}_{km} \tilde{V}_m \right] \quad (4)$$

El método iterativo de Gauss – Seidel se calcula para las barras generadoras, la potencia reactiva Q_k mediante la ecuación (3), partiendo de los valores disponibles de los voltajes y se sustituye en la ecuación (2) para encontrar una nueva aproximación del voltaje V_k .

3.2 Solución de las ecuaciones de flujo de potencia por el método Newton-Raphson.

La potencia compleja generada o substraída en una barra cualquiera k de un sistema de n barras, puede expresarse, tomando como base la ecuación (1) de la forma siguiente:

$$\bar{P}_k - j\bar{Q}_k = \bar{V}_k^* \sum_{m=1}^n \bar{Y}_{km} \bar{V}_m \quad (5)$$

Los voltajes y las admitancias se pueden expresar, usando coordenadas rectangulares:

$$\bar{V}_k = \bar{e}_k + j\bar{f}_k$$

$$\bar{V}_m = \bar{e}_m + j\bar{f}_m$$

$$\bar{Y}_{km} = \bar{G}_{km} - j\bar{B}_{km}$$

Sustituyendo en la ecuación (4)

$$\bar{P}_k - j\bar{Q}_k = \left(\bar{e}_k - j\bar{f}_k \right) \sum_{m=1}^n \left(\bar{G}_{km} - j\bar{B}_{km} \right) \left(\bar{e}_m + j\bar{f}_m \right)$$

La potencia real o reactiva P_k es igual a la parte real de la expresión anterior y la potencia reactiva Q_k . Es igual a la parte imaginaria multiplicada por -1 .

$$\bar{P}_k = \sum_{m=1}^n \left[\bar{e}_k \left(\bar{e}_m \bar{K}_{km} + \bar{f}_m \bar{B}_{km} \right) + \bar{f}_k \left(\bar{f}_m \bar{G}_{km} - \bar{e}_m \bar{B}_{km} \right) \right] \quad (6)$$

$$\bar{Q}_k = \sum_{m=1}^n \left[\bar{f}_k \left(\bar{e}_m \bar{K}_{km} + \bar{f}_m \bar{B}_{km} \right) - \bar{e}_k \left(\bar{f}_m \bar{G}_{km} - \bar{e}_m \bar{B}_{km} \right) \right] \quad (7)$$

De aquí resolveremos dos ecuaciones simultáneas no lineales para cada barra, de tal forma que si el sistema tiene n barras resulta un sistema de 2n ecuaciones. Se tienen luego un total de 2n incógnitas, 2 por barra, de la siguiente manera:

- en las barras de carga, donde se señala la potencia real y reactiva substraídas, las incógnitas son el módulo y el argumento del voltaje de la barra;
- en la barras de generación donde se señala la potencia real producida por el generador y el modulo del voltaje de la barra, las incógnitas son la potencia reactiva suministrada por el generador y el ángulo del voltaje;

- c) en una barra de generación, en la que se especifica el módulo y el argumento del voltaje, las incógnitas son la potencia real y potencia reactiva suministrada por el generador.

A continuación, supongamos que se tiene un sistema de tres ecuaciones algebraicas simultáneas no lineales:

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3)$$

$$y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3)$$

$$y_3 = f_3(x_1, x_2, x_3)$$

Si se conocen los valores de y_1 , y_2 y y_3 y se deben calcular los valores de x_1 , x_2 y x_3 que satisfacen las ecuaciones. Hacemos luego un cálculo inicial de las incógnitas, esos valores iniciales se representan con los símbolos:

$$x_1^0, x_2^0, x_3^0$$

Esta primera aproximación no satisface las ecuaciones. Entonces llamamos Δx_1^0 , Δx_2^0 y Δx_3^0 a las cantidades que hay que sumarle a los valores inicialmente supuestos de las variables para que el sistema de ecuaciones se verifique. Por lo tanto puede escribirse:

$$y_1 = f_1(x_1^0 + \Delta x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2^0, x_3^0 + \Delta x_3^0)$$

$$y_2 = f_2(x_1^0 + \Delta x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2^0, x_3^0 + \Delta x_3^0)$$

$$y_3 = f_3(x_1^0 + \Delta x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2^0, x_3^0 + \Delta x_3^0)$$

Se sabe que cualquier función de x que tenga derivadas de todas las órdenes en el punto $x = x_1$, puede expresarse como una serie de Taylor, de la forma siguiente:

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) + \frac{f''(x_1)}{2!}(x - x_1)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x - x_1)^n$$

Aplicando la expansión en una serie de Taylor al caso de tres ecuaciones simultáneas con funciones de tres variables, tomando los dos primeros términos de la serie y despreciando los otros. El error será mínimo si la primera estimación de las variables esta próxima a la solución exacta, o sea si las Δx son pequeñas, se tiene las siguientes ecuaciones:

$$y_1 = f_1(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Delta x_1^0 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Delta x_2^0 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \Delta x_3^0$$

$$y_2 = f_2(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \Delta x_1^0 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \Delta x_2^0 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \Delta x_3^0$$

$$y_3 = f_3(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \Delta x_1^0 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \Delta x_2^0 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \Delta x_3^0$$

Las derivadas parciales se evalúan para la primera aproximación de las incógnitas o sea para x_1^0, x_2^0 y x_3^0 respectivamente

Utilizando la notación matricial, las ecuaciones antes mostradas se pueden expresar:

$$\begin{bmatrix} y_1 - f_1(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \\ y_2 - f_2(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \\ y_3 - f_3(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1^0 \\ \Delta x_2^0 \\ \Delta x_3^0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

La matriz de las derivadas parciales se llama matriz Jacobiana. Usando una notación abreviada la ecuación (7) puede escribirse:

$$[y - f^0] = [J^0] [\Delta X_0]$$

Resolviendo la ecuación (7) para $\Delta x_1^0, \Delta x_2^0$ y Δx_3^0 se tiene la solución del problema. Utilizando el método de solución matricial:

$$[\Delta X_0] = [J^0]^{-1} [y - f^0] \quad (9)$$

Por haberse hecho algunas simplificaciones al desarrollar el procedimiento, no se tendrá resultados exactos.

En el método Newton – Raphson los valores calculados de $\Delta x_1^0, \Delta x_2^0$ y Δx_3^0 se utilizan para calcular nuevos valores de:

$$\begin{aligned}x_1^1 &= x_1^0 + \Delta x_1^0 \\x_2^1 &= x_2^0 + \Delta x_2^0 \\x_3^1 &= x_3^0 + \Delta x_3^0\end{aligned}$$

y realizar una nueva iteración. El proceso iterativo se continua hasta que dos valores sucesivos de Δx_n difiera en menos de una cantidad especificada. Habrá que evaluar en cada iteración los elementos de la matriz Jacobiana. Si los Δx_n varían poco de una iteración a otra, la evaluación se puede hacer después de varias iteraciones.

Aplicando el método Newton – Raphson a la solución de las ecuaciones (5) y (6).

Suponemos, que con excepción de la barra suelta, donde se define en forma completa el voltaje en módulo y argumento en todas las demás barras se conoce la potencia real y reactiva inyectada por los generadores y sustraída por las cargas y se calculará la componente real y la imaginaria del voltaje correspondiente (Jacinto Viqueira 1993).

Si el sistema tiene n barras el número de ecuaciones simultáneas es $2(n-1)$, ya que para cada barra se establece dos ecuaciones de la forma de:

$$\begin{bmatrix} At \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} At \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} At \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_p \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} At \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \end{bmatrix}$$

pero debe descontarse la barra suelta donde se conoce en forma completa el voltaje.

En forma igual a las ecuaciones (7) pueden escribirse las siguientes $2(n-1)$ ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \Delta \bar{P}_1^0 \\ \Delta \bar{P}_{n-1}^0 \\ \Delta \bar{Q}_1^0 \\ \Delta \bar{Q}_{n-1}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{P}_1}{\partial e_{10}} & \frac{\partial \bar{P}_1}{\partial e_{n-1,0}} & \frac{\partial \bar{P}_1}{\partial f_{10}} & \frac{\partial \bar{P}_1}{\partial f_{n-1,0}} \\ \frac{\partial \bar{P}_{n-1}}{\partial e_{10}} & \frac{\partial \bar{P}_{n-1}}{\partial e_{n-1,0}} & \frac{\partial \bar{P}_{n-1}}{\partial f_{10}} & \frac{\partial \bar{P}_{n-1}}{\partial f_{n-1,0}} \\ \frac{\partial \bar{Q}_1}{\partial e_{10}} & \frac{\partial \bar{Q}_1}{\partial e_{n-1,0}} & \frac{\partial \bar{Q}_1}{\partial f_{10}} & \frac{\partial \bar{Q}_1}{\partial f_{n-1,0}} \\ \frac{\partial \bar{Q}_{n-1}}{\partial e_{10}} & \frac{\partial \bar{Q}_{n-1}}{\partial e_{n-1,0}} & \frac{\partial \bar{Q}_{n-1}}{\partial f_{10}} & \frac{\partial \bar{Q}_{n-1}}{\partial f_{n-1,0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta e_1^0 \\ \Delta e_{n-1}^0 \\ \Delta f_1^0 \\ \Delta f_{n-1}^0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Usando la notación matricial abreviada, las ecuaciones pueden escribirse.

$$\begin{bmatrix} \Delta \bar{P}^0 \\ \Delta \bar{Q}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{J}_1^0 & \bar{J}_2^0 \\ \bar{J}_3^0 & \bar{J}_4^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta e^0 \\ \Delta f^0 \end{bmatrix}$$

Los términos $\Delta \bar{P}^0$ y $\Delta \bar{Q}^0$ son la diferencia entre las potencias reales y reactivas especificadas en cada barra y las calculadas (5) y (6) usando la estimación inicial de los componentes real y reactiva de los voltajes.

$$\Delta \bar{P}_k^0 = \bar{P}_{k-} - \sum_{m=1}^n \left[e_k^0 \left(e_m^0 \bar{G}_{km} + f_m^0 \bar{B}_{km} \right) + f_k^0 \left(f_m^0 \bar{G}_{km} - e_m^0 \bar{B}_{km} \right) \right]$$

$$\Delta \bar{Q}_k^0 = \bar{Q}_k^0 \sum_{m=1}^n \left[\bar{f}_k^0 \left(\bar{e}_m^0 \bar{G}_{km} + \bar{f}_m^0 \bar{B}_{km} \right) + \bar{e}_k^0 \left(\bar{f}_m^0 \bar{G}_m - \bar{e}_m^0 \bar{B}_{km} \right) \right]$$

La matriz Jacobiana se calcula a partir de las derivadas parciales de las ecuaciones (5) y (6), sustituyendo las estimaciones iniciales de los componentes real y reactiva de los voltajes.

Calculados $\Delta \bar{P}^0$ y $\Delta \bar{Q}^0$ la matriz Jacobiana $[J^0]$ de la estimación inicial de voltajes, los términos $\Delta \bar{e}^0$ y

$\Delta \bar{f}_0$ que representan el incremento o decremento a la componente real y reactiva, se calculan invirtiendo la matriz Jacobiana, en forma igual que (8):

$$\begin{bmatrix} \Delta \bar{e}_0 \\ \Delta \bar{f}_0 \end{bmatrix} = [J^{-1}] \begin{bmatrix} \Delta \bar{P}_0 \\ \Delta \bar{Q}_0 \end{bmatrix}$$

A partir de los términos $\Delta \bar{e}^0$ y $\Delta \bar{f}_0$ se calculan nuevos valores de los componentes real y reactiva de los voltajes de las barras.

3.3 Solución aproximada de los flujos de Potencia

Según la ecuación

$$\bar{P}_k - j\bar{Q}_k = \bar{V}_k \sum_{m=1}^n \bar{Y}_{km} \bar{V}_m$$

Expresando los voltajes y admitancias en coordenadas polares

$$\bar{V}_k \cong \bar{V}_k e^{-j\delta_k} \quad \bar{V}_k^* = \bar{V}_k e^{-j\delta_k}$$

$$\bar{V}_m \cong \bar{V}_m e^{-j\delta_m}$$

$$\bar{V}_{km}^- = \left| \bar{V}_{km}^- \right| e^{-j\theta_{km}}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (5), se tiene:

$$\bar{P}_k - j\bar{Q}_k = \sum_{m=1}^n \left(\bar{V}_k \bar{V}_m \bar{Y}_{km} \right) e^{-j(\delta_k - \delta_m + \theta_{km})} \quad (11)$$

Teniendo en cuenta que.

$$e^{-j(\delta_k - \delta_m + \theta_{km})} = \cos(\delta_k - \delta_m + \theta_{km}) - j \operatorname{sen}(\delta_k - \delta_m + \theta_{km})$$

La potencia real o reactiva y la potencia reactiva pueden expresarse como la parte real y la parte imaginaria respectivamente (11):

$$\bar{P}_k = \sum_{m=1}^n \left(\bar{V}_k \bar{V}_m \bar{Y}_{km} \right) \cos(\delta_k - \delta_m + \theta_{km}) \quad (12)$$

$$\bar{Q}_k = \sum_{m=1}^n \left(\bar{V}_k \bar{V}_m \bar{Y}_{km} \right) \operatorname{sen}(\delta_k - \delta_m + \theta_{km}) \quad (13)$$

Ecuaciones que relacionan cambios de potencia real y reactiva en función de cambios de voltaje se escriben en forma abreviada:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{J}_1 & \bar{J}_2 \\ \bar{J}_3 & \bar{J}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta V \end{bmatrix} \quad (14)$$

donde $\Delta \delta$ y $\Delta \bar{V}$ son incrementos y decrementos de los ángulos y de los módulos de voltajes de barras.

Los elementos de la matriz Jacobiana se calculan obteniendo las derivadas parciales de las ecuaciones (12) y (13)

para la submatriz \bar{J}_1 :

$$\frac{\partial \bar{P}_k}{\partial \bar{\delta}_m} = \left(\bar{V}_k \bar{V}_m \left| \bar{Y}_{km} \right. \right) \text{sen}(\delta_k - \delta_m + \theta_{km}) \text{ donde } m \neq k$$

$$\frac{\partial \bar{P}_k}{\partial \bar{\delta}_m} = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \left(\bar{V}_k \bar{V}_m \left| \bar{Y}_{km} \right. \right) \text{sen}(\delta_k - \delta_m + \theta_{km})$$

Para la submatriz \bar{J}_2 :

$$\frac{\partial \bar{P}_k}{\partial \bar{V}_m} = \left(\bar{V}_k \left| \bar{Y}_{km} \right. \right) \cos(\delta_k - \delta_m + \theta_{km})$$

$$\frac{\partial \bar{P}_k}{\partial \bar{V}_k} = 2 \left(\bar{V}_k \left| \bar{Y}_{kk} \right. \right) \cos \theta_{kk} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \left(\bar{V}_m \left| \bar{Y}_{km} \right. \right) \cos(\delta_k - \delta_m + \theta_{km})$$

Para la submatriz \bar{J}_3 :

$$\frac{\partial \bar{Q}_k}{\partial \bar{\delta}_m} = \left(\bar{V}_k \bar{V}_m \left| \bar{Y}_{km} \right. \right) \cos(\delta_k - \delta_m + \theta_{km}) \quad m \neq k$$

$$\frac{\partial \bar{Q}_k}{\partial \bar{\delta}_k} = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \left(\bar{V}_k \bar{V}_m \left| \bar{Y}_{km} \right. \right) \cos(\delta_k - \delta_m + \theta_{km})$$

Para la submatriz \bar{J}_4

$$\frac{\partial Q_k}{\partial \bar{V}_m} = \left(\bar{V}_k \left| \bar{Y}_{m|} \right. \right) \text{sen}(\delta_k - \delta_m + \theta_{km})$$

$$\frac{\partial Q_k}{\partial V_m} = 2 \left(\bar{V}_k \left| \bar{Y}_{kk|} \right. \right) \text{sen} \theta_{kk} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \left(\bar{V}_m \left| \bar{Y}_{km|} \right. \right) \text{sen}(\delta_k - \delta_m + \theta_{km})$$

Las variaciones de la potencia real se deben principalmente a las variaciones del ángulo de voltaje y las variaciones de la potencia reactiva se deben a las variaciones en el módulo del voltaje. Para cambios pequeños de magnitud y el ángulo de los voltajes, las submatrices se pueden considerar cero y la ecuación matricial (7) se reduce a:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{J}_1 & 0 \\ 0 & \bar{J}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta \bar{V} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Lo que significa que puede calcularse separadamente los flujos de potencia real y reactiva:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{J}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{J}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V \end{bmatrix}$$

Esta simplificación se llama de los flujos desacoplados.

Referencia General: (Ver texto Viqueira J.- Ed. Alfa – Omega 1993 y Donald Richardson y Arthur Caisse Máquinas Rotativas y Transformadores Ed. Prentice Hall 1997).

Los datos de placa de los diferentes aparatos del sistema son los siguientes:

Generador G₁
120 MVA
22 KV

Generador G₂
50 MVA
12 KV

Transformadores T₁ y T₂
 142/22 KV
 60 MVA
 $Z_{cc} = 8.20\%$

Transformadores T₃ y T₄
 132/12 KV
 45 MVA
 $Z_{cc} = 7.25\%$

Los datos de placas anteriores indican potencias trifásicas y voltajes entre líneas.

Las características eléctricas de las líneas de transmisión son las siguientes:

Línea L₁
 $R = 29.9 \Omega$
 $X_1 = j107.5 \Omega$
 $X_c = -j 1325 \Omega$

Línea L₂
 $R = 49.5 \Omega$
 $X_1 = j 177.7 \Omega$
 $X_c = -j 1325 \Omega$

Línea L₃
 $R = 19.6 \Omega$
 $X_1 = j 70.2 \Omega$
 $X_c = -j 2025 \Omega$

Línea L₄
 $R = 1.5 \Omega$
 $X_1 = j 3.3 \Omega$
 $X_c = \infty$

Las cargas constituyen extracciones de potencia real y reactiva de las siguientes magnitudes:

Carga C₁
 $S_{c1} = 15 + j 8 \text{ MVA}$

Carga C₂
 $S_{c2} = 61 + j 19 \text{ MVA}$

En el circuito equivalente en por unidad (fig. N° 1) los distintos elementos se representarán como sigue:

Los generados como fuentes de voltaje constante conectadas de fase a neutro, de magnitud igual a su voltaje terminal al neutro, expresado en por unidad.

Los transformadores por reactancias en serie en por unidad considerando despreciables las resistencias y de valor infinito las impedancias de circuito abierto.

Las líneas de transmisión mediante circuitos equivalentes π .

Las cargas por impedancias constantes en por unidad, conectadas entre fase y neutro.

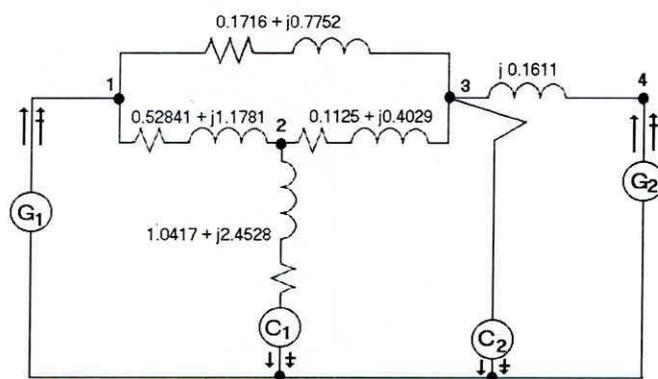


Figura 1. Circuito equivalente en por unidad del ejemplo

Sea el sistema eléctrico trifásico del ejemplo N° 1. Si se desprecia la capacitancia de las líneas (o sea se considera infinita la reactancia capacitiva) y las cargas se representan como sustracciones de potencia real y reactiva, el circuito equivalente en por unidad queda como se indica en la figura 1, en el que se muestra la impedancia en por unidad de cada rama.

En la tabla 1 se resume la información sobre las impedancias de la red, identificando cada rama mediante los números asignados a los nodos.

Impedancia de la Red de números asignados a los nodos

TABLA 1

Rama	\bar{R}	\bar{X}
1-2	0.2841	j1.1781
1-3	0.1716	j0.7752
2-3	0.1125	j0.4029
2-5	1.0417	j2.4528
3-4	0.0	j0.1611

En la tabla 2 se da la información referente a las barras que tienen conectadas generadores o cargas. En las barras 2 y 5, que tienen conectadas cargas, se conocen las potencias reales y reactivas suministradas a las cargas y hay que calcular el módulo y el argumento del voltaje.

En la barra 4 que tiene conectado un generador, se especifica para este la potencia real que suministra y el módulo del voltaje en sus terminales.

En la barra 1 que tiene conectado otro generador y que se toma como la barra suelta, se especifica la magnitud y el ángulo del voltaje.

Barras conectadas a generadores o cargas

TABLA 2

Barra	\bar{P}_G	\bar{Q}_G	\bar{P}_C	\bar{Q}_C	\bar{V}	θ_v
1					1.110	0°
3			-0.61	-j0.19		
4	0.35				0.990	
5			-0.15	-j0.018		

Para aplicar el método para el cálculo de los voltajes de los nodos y los flujos de potencia real y reactiva en las ramas de la red, basado en las ecuaciones nodales, es necesario partir de las admitancias de las ramas de la red para calcular las admitancias propias y mutuas de la matriz de admitancias de barra.

Partiendo de las impedancias de las ramas, se pueden calcular las admitancias correspondientes mediante la siguiente expresión:

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{R} + j\bar{X}} = \frac{\bar{R}}{\bar{R}^2 + \bar{X}^2} - j \frac{\bar{X}}{\bar{R}^2 + \bar{X}^2} = \bar{G} - j\bar{B}$$

donde \bar{G} es la conductancia y \bar{B} es la susceptancia, ambas en por unidad. En la tabla 3 se presentan los resultados del cálculo de las admitancias de las ramas.

Conductancias y susceptancias asignadas a los nodos

TABLA 3

Rama	\bar{G}	\bar{B}
1-2	0.1934	-j0.8022
1-3	0.2722	-j1.2297
2-3	0.6429	-j2.3025
2-5	0.1467	-0.3454
3-4	0.0	-j6.2073

Partiendo de los datos de la tabla 3 se calculan las admitancias propias y mutuas. Por ejemplo:

$$Y_{11} = (0.1934 - j0.8022) + (0.2722 - j1.2297) = 0.4656 - j2.03119$$

$$Y_{12} = (0.1934 - j0.8022) = -0.1934 + j0.8022$$

$$Y_{13} = (0.2722 - j1.2297) = -0.2722 + j1.2297$$

$$Y_{14} = 0 - j0 \text{ puesto que no hay conexión entre las barras 1y4}$$

$$Y_{15} = 0 - j0 \text{ puesto que no hay conexión entre las barras 1y5}$$

La matriz de admitancias de barra resultante es como sigue:

	1	2	3	4	5
1	0.4656 - j2.0319	-0.1934 + j 0.8022	-0.2722 + j 1.2297	0 + j 0	0 + j 0
2	-0.1934 + j0.8022	0.9830 - j 3.4501	-0.6429 + j 2.3025	0 + j 0	-0.1467 + j 0.3454
3	-0.2722 + j1.2297	-0.6429 + j 3.4501	0.9151 - j 9.7395	0 + j 6.2073	0 + j 0
4	0 + j 0	0 + j 0	0 + j 6.2073	0 + j 6.2073	0 + j 0
5	0 + j 0	-0.1467 + j 0.3454	0 + j 0	0 + j 0	0.1467 - j 0.3454

Una vez establecida la matriz de admitancias de barra se procede al cálculo de los voltajes en todas las barras, aplicando alguno de los métodos iterativos antes descritos.

A continuación se ilustrará el uso del método de Gauss-Seidel.

Como ya se dijo, la barra 1 se eligió como barra suelta, en la que se especifica la magnitud y el ángulo del voltaje:

$$\bar{V}_1 = 1.11 + j0$$

El método iterativo se inicia en la barra 2, aplicando la ecuación (2) a esta barra:

$$\bar{V}_2 = \frac{1}{Y_{22}} \left[\frac{\bar{P}_2 - j\bar{Q}_2}{\bar{V}_2} - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq 2}}^5 \bar{Y}_{2m} \bar{V}_m \right]$$

Como la barra 2 no tiene carga conectada

$$\bar{P}_2 - j\bar{Q}_2 = 0 - j0$$

Se supone, como primera aproximación, que los voltajes de las barras 2,3 y 5 son iguales a 1 + j 0.

$$V_2 = \frac{1}{0.9830 - j3.4501} \left\{ \frac{0 - j0}{(1 + j0)^*} [(-0.1934 + j0.8022)1.11 + \right.$$

$$+(-0.6429 + j2.3025)1 + (-0.1467 + j0.3454)] - \left. \right\}$$

$$V_2 = \frac{1.0043 - j3.5383}{0.9830 - j3.4501} = 1.0253 \angle -0.05^\circ = 1.0253 - j0.0009$$

Se continúa ahora con la barra 3:

$$\tilde{V}_3 = \frac{1}{\bar{Y}_{33}} \left[\frac{\bar{P}_3 - j\bar{Q}_3}{\bar{V}_3} - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq 3}}^5 \bar{Y}_{3m} \tilde{V}_m \right]$$

La barra 3 tiene una carga conectada $\bar{P}_3 \pm j\bar{Q}_3$ de $-(0.61 + j0.19)$. El signo menos indica que la potencia real y reactiva salen de la barra 3.

$$\bar{P}_3 - j\bar{Q}_3 = -0.61 + j0.19$$

Se utiliza el valor calculado del voltaje de la barra 2

$$\tilde{V}_2 = 1.0253 \angle -0.05^\circ = 1.0253 - j0.0009$$

El voltaje de la barra 3 se supone igual a $1 + j0$ y el de la barra 4, donde se especificó el módulo del voltaje, se considera que:

$$\tilde{V}_4 = 0.99 + j0$$

Se pasa ahora a la barra 4:

$$\tilde{V}_4 = \frac{1}{\bar{Y}_{44}} \left[\frac{\bar{P}_4 - j\bar{Q}_4}{\bar{V}_4} - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq 4}}^5 \bar{Y}_{4m} \tilde{V}_m \right]$$

Substituyendo esos valores en la ecuación correspondiente a la barra 3:

$$\tilde{V}_3 = \frac{1}{0.9151 - j9.7395} \left\{ \frac{-0.61 + j0.19}{(1 + j0)^*} - [(-0.2722 + j1.2297) \right.$$

$$1.11 + (-0.6429 + j2.3025)(1.0253 - j0.009) + (0 + j6.2073)0.99] - \left. \right\}$$

$$\tilde{V}_3 = \frac{0.3492 - j9.6816}{0.9151 - j9.7395} = 0.9903 \angle -3.3^\circ = 0.9887 - j0.0570$$

La barra 4 es una barra de generación. El generador inyecta una potencia real de 0.35. Para poder aplicar la ecuación del voltaje de la barra es necesario, primero, calcular la potencia reactiva del generador, aplicando la ecuación (4) a esta barra:

$$Q_4 = \vartheta_m \left[\bar{V}_4 - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq 4}}^5 \bar{Y}_{4m} \tilde{V}_m \right]$$

Se utilizarán los valores calculados de los voltajes que se tienen ya disponibles del proceso de la primera iteración:

$$\tilde{V}_3 = 0.9887 - j0.0570$$

En la barra 4 se especificó el módulo del voltaje y se desconoce el ángulo del mismo. Como una primera aproximación se toma:

$$\tilde{V}_4 = 0.99 + j0$$

Con estos valores de los voltajes se hace una primera aproximación del valor de la potencia reactiva:

$$\bar{Q}_4 = -\vartheta_m \{0.99[(0 + j6.2073)(0.9887 - j0.0570) + (0 - j6.2073)(0.99 + j0)]\}$$

$$Q_4 = j0.008$$

La potencia compleja inyectada por el generador G_2 a la barra 4 es:

$$\bar{P}_4 + j\bar{Q}_4 = 0.35 + j0.008$$

Substituyendo estos valores en la ecuación del voltaje de la barra 4:

$$\tilde{V}_4 = \frac{1}{0 - j6.2073} \left\{ \frac{0.35 - j0.008}{(0.99 + j0)^*} - [(0 + j6.2073)(0.9887 - j0.0570)] \right\}$$

$$\tilde{V}_4 = \frac{-0.0003 - j6.1453}{-j6.2073} = 0.9900 + j0$$

La primera iteración se concluye en la barra 5:

$$\tilde{V}_5 = \frac{1}{\bar{Y}_{55}} \left[\frac{\bar{P}_5 - j\bar{Q}_5}{\bar{V}_5} - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq 5}}^5 \bar{Y}_{5m} \tilde{V}_m \right]$$

La barra 5 tiene una carga conectada de $-(0.15 + j0.08)$. El voltaje de la barra 5 se estima, como se dijo, igual a $1 + j0$ y el voltaje calculado para la barra 2 en la primera iteración es $1.0253 - j0.0009$:

$$\tilde{V}_5 = \frac{1}{0.1467 - j0.3454} \left\{ \frac{-0.15 + j0.08}{(1 + j0)^*} [(-0.1467 + j0.3454)(1.0253 - j0.0009)] \right\}$$

$$\tilde{V}_5 = \frac{0.0001 - j0.3462}{0.1467 - j0.3454} = 0.922 \angle -23^\circ = 0.8487 - j0.3603$$

El proceso iterativo se repite hasta que el cambio del valor de los voltajes en dos iteraciones sucesivas sea menor que una tolerancia especificada.

Una vez determinados los voltajes pueden calcularse los flujos de potencia reactiva y la potencia real y reactiva generada por la barra suelta.

IV. BIBLIOGRAFÍA

- Viqueira J., "Redes Eléctricas" Ed. Alfa Omega 1993
 Donal V. Richarson y Arthur Caisse "Máquinas Rotativas y Transformadores" Ed. Prentice Hall 1997.
 Romero R., "Análisis de Sistemas de Potencia" 1983
 Kimbark "Power System Stability" Ed. Wiley 1965.