

DISEÑO POR UBICACIÓN DE POLOS BASADO EN MODELOS DE ENTRADA SALIDA

Ing. Bruno Elio Vargas Tamani
bvargast@unmsm.edu.pe

*Profesor de la Facultad de Ingeniería Electrónica, Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Lima - Perú*

RESUMEN: Un sistema de control adaptativo modifica su comportamiento de acuerdo a los cambios en la dinámica del sistema y las perturbaciones. En el presente artículo se describe el análisis y simulación de un tipo de controlador adaptativo denominado regulador autoajustable (STR: self-tuning regulator) basado en la técnica de asignación de polos usando modelos de entrada-salida. Como ejemplo de aplicación se presenta el control de un sistema mecánico diseñado con esta técnica.

ABSTRACT: A system of control adaptive modifies its behavior according to the changes in the dynamics of the system and the interferences. In this paper is described the analysis and simulation of an adaptive controller denominated self-adjusting regulator type (STR: self-tuning regulator) based on the technique of assignment of poles using entrance-exit models. As application example the control of a mechanical system is presented.

Palabras claves: controlador, perturbaciones, prealimentación, polos, ceros, realimentación, función de transferencia, frecuencia de oscilación, frecuencia natural, amortiguamiento, ruido.

I. INTRODUCCIÓN

Cuando los parámetros de un sistema a ser controlado varían con el tiempo, por ejemplo por no linealidades, variaciones de las constantes físicas por desgaste, etc.; el controlador calculado con un conjunto de parámetros iniciales para un punto de funcionamiento, no será el adecuado cuando cambian las condiciones de operación. Si consideramos que contamos con un algoritmo de actualización de parámetros de la planta, entonces en base a los nuevos parámetros, debemos actualizar el controlador. El desarrollo del control adaptativo ha traído consigo varios métodos para solucionar el nuevo controlador. Una de ellas es el denominado regulador autoajustable (STR: *self-tuning regulator*), el cual a partir de la información recogida del proceso y basado en un determinado criterio de diseño modificará los parámetros del controlador. Uno de estos planteamientos es la técnica llamada : diseño por ubicación de polos basado en modelos de entrada salida. Se requiere una actualización del modelo

de entrada salida discreto de la planta (función de transferencia discreta), el criterio de actualización del controlador consiste en resolver una ecuación polinómica con ciertas restricciones en el orden de los polinomios. El objetivo de dicha actualización es permitir, que el sistema de lazo cerrado, presente una función de transferencia llamada de referencia, de la cual conocemos sus polos y ceros. El controlador adaptará sus parámetros para seguir a ese modelo de referencia de lazo cerrado. [Rodríguez, 1996] -[Astrom, 1997]

La actualización del controlador requiere de la solución en línea del método, lo cual implica la necesidad de elegir un criterio, cuyo algoritmo se pueda implementar con facilidad. Se muestra a continuación el análisis de este método. Luego desarrollamos una aplicación para un problema de control de un sistema mecánico, con dos soluciones. Y finalmente mostramos el algoritmo de control que puede servir como base para la implementación práctica.

II. DISEÑO POR UBICACIÓN DE POLOS BASADO EN MODELOS DE ENTRADA SALIDA

Se tiene un proceso de entrada $u(k)$ y salida $y(k)$, con función de transferencia de pulso:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (1)$$

La respuesta deseada $y(k)$ de este proceso (figura 1), es la que se obtiene de un modelo de referencia $H_m(z)$ (figura 2), que da la respuesta deseada a las entradas de referencia $I(k)$.

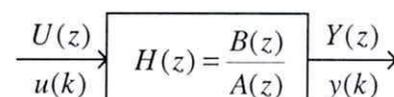


Figura 1- Modelo discreto de la planta.

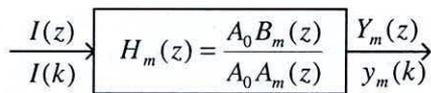


Figura 2- Modelo de referencia deseado en lazo cerrado (con polinomio observador).

donde $A_0(z)$ es un polinomio observador, que es necesario especificar. Se desea encontrar una ley de control, para que la salida $y(k)$, sea la salida deseada $y_m(k)$. Dicha ley de control $u(k)$ dependerá de $I(k)$, que es la entrada de lazo cerrado y de la señal $y(k)$ que se medirá. Es decir:

$$U(z) = H_1(z)I(z) - H_y(z)Y(z) \tag{2}$$

Se muestra en la figura 3, el diagrama de bloques de lazo cerrado.

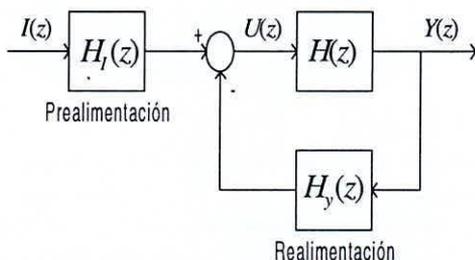


Figura 3- Diagrama de bloques de lazo cerrado.

El cual debe comportarse en forma equivalente al modelo de referencia deseado, que se observa en la figura 4:

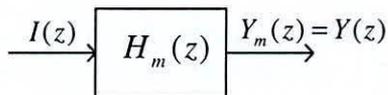


Figura 4 - Modelo de referencia deseado en lazo cerrado.

Podemos expresar la ley de control como:

$$\begin{aligned} U(z) &= H_1(z)I(z) - H_y(z)Y(z) \\ &= \frac{T_1(z)}{R_1(z)} I(z) - \frac{S_1(z)}{R_2(z)} Y(z) \\ &= \frac{T_1(z)R_2(z)I(z) - R_1(z)S_1(z)Y(z)}{R_1(z)R_2(z)} \end{aligned} \tag{3}$$

definiendo: $R(z) = R_1(z)R_2(z)$,
 $T(z) = T_1(z)R_2(z)$,
 $S(z) = R_1(z)S_2(z)$,

entonces se obtiene:

$$\begin{aligned} U(z) &= \frac{T(z)}{R(z)} I(z) - \frac{S(z)}{R(z)} Y(z) \\ &= H_1(z)I(z) - H_y(z)Y(z) \end{aligned} \tag{4}$$

Se debe cumplir que $\text{grado}R \geq \text{grado}T$ y $\text{grado}R \geq \text{grado}S$. Para que se anulen los errores de estado estacionario debido a las perturbaciones, se deben agregar integradores, en general n integradores, es decir:

$$R(z) = (z-1)^n R'_1(z) \tag{5}$$

En lazo cerrado, la función de transferencia de pulso será:

$$\begin{aligned} F_{i,c}(z) &= \frac{H_1(z)H(z)}{1 + H_y(z)H(z)} \\ &= \frac{[T(z)/R(z)][B(z)/A(z)]}{1 + [S(z)/R(z)][B(z)/A(z)]} \\ &= \frac{T(z)B(z)}{R(z)A(z) + B(z)S(z)} = \frac{A_0(z)B_m(z)}{A_0(z)A_m(z)} \end{aligned} \tag{6}$$

Se trata entonces de encontrar los polinomios R, S y T, que satisfagan esta relación; la cual obviando la variable z es:

$$\frac{TB}{AR + BS} = \frac{A_0 B_m}{A_0 A_m} \tag{7}$$

Se detallará la solución de una posible situación. En ese sentido, si un factor de B no lo es de B_m , entonces debe ser un factor de $AR + BS$, es decir debe ser cancelado por un polo de lazo cerrado. En este caso se cancelan ceros de la planta. (Deben cancelarse sólo los ceros estables, pues estos serán polos de lazo cerrado).

Sea $B = B^+ B^-$ (ceros estables) (incluye ceros inestables). Como B^- no puede ser factor de $(AR + BS)$, entonces debe ser factor de B_m , es decir:

$$B_m = B^- B'_m \tag{8}$$

Como B^+ es factor de $(AR + BS)$, entonces debe ser factor de R (no puede ser de A, sino se cancelarían), es decir:

$$R = B^+ R' \tag{9}$$

Luego se tiene:

$$\frac{TB}{AR + BS} = \frac{TB^+ B^-}{AB^+ R' + B^+ B^- S} = \frac{A_0 B^- B'_m}{A_0 A_m} \tag{10}$$

cumpliéndose :

$$\frac{T}{AR' + B^- S} = \frac{A_0 B'_m}{A_0 A_m} \tag{11}$$

Se debe resolver entonces:

$$AR' + B^- S = A_0 A_m \tag{12}$$

hallando R' y S , encontramos $R = B^+ R'$ y $T = A_0 B_m'$. La ecuación (12) es única para dos variables (R' y S), pero tiene solución si el máximo común divisor de A y B^- divide a A_m . Si R'_0 y S'_0 una solución es entonces:

$$R' = R'_0 + QB^- \quad (13)$$

$$S = S'_0 - QA \quad (14)$$

El polinomio Q es arbitrario y si hay una solución se pueden hallar infinitas soluciones. Se puede justificar, que se debe cumplir: $\text{grado}A_0 \geq 2\text{grado}A - \text{grado}A_m - \text{grado}B^+ + n - 1$

Si se agregan n integradores entonces $R'(z) = (z-1)^n R'_1(z)$, con lo cual hay que resolver:

$$A(z-1)^n R'_1 + B^- S = A_0 A_m \quad (15)$$

El diseño se puede resumir en la siguiente secuencia:

1. Factorizar B y B_m como: $B = B^- B^+$, $B_m = B^- B_m'$.
2. Resolver ecuación (15), donde: $\text{grado}S < n + \text{grado}A$;
 $\text{grado}R'_1 = \text{grado}A_0 + \text{grado}A_m - \text{grado}A - n$
3. Hallar la ley de control:

$$U(z) = \frac{T(z)}{R(z)} I(z) - \frac{S(z)}{R(z)} Y(z) \quad (16)$$

donde: $R = B^+ R'$, $T = A_0 B_m'$ y $R' = (z-1)^n R'_1$.

III. CONTROL DE VELOCIDAD DE DOS MASAS ACOPLADAS

Un motor mueve una carga formada por dos masas acopladas por un muelle de constante K . La señal de entrada es la corriente I . Las velocidades angulares y los ángulos de las masas son ω_1 , ω_2 , θ_1 y θ_2 ; los momentos de inercia son J_1 y J_2 . En la figura 5 se muestra el sistema mecánico, que será la planta a controlar. Se supone que hay un amortiguamiento b , en el muelle y que las masa pueden ser perturbadas por un par T_L .

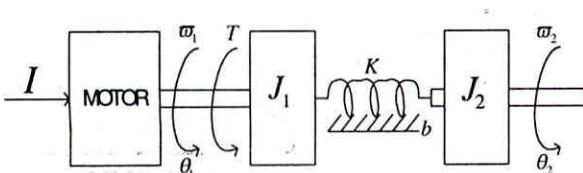


Figura 5 - Sistema mecánico consistente en dos masas acopladas.

La salida del proceso es la velocidad angular ω_2 .

Para $J_1 = 10/9$, $J_2 = 10$, $K = 1$, $b = 0.1$ y $K_f = 1$; se obtiene la siguiente función de transferencia continua del proceso:

$$F(s) = \frac{\omega_2(s)}{I(s)} = \frac{0.009(s+10)}{s(s^2 + 0.1s + 1)} \quad (17)$$

El proceso presenta un amortiguamiento muy bajo de 0.5, por lo cual se presenta una alta ganancia a la frecuencia de resonancia de 1rad/seg. Se desea en lazo cerrado un amortiguamiento de 0.7 y frecuencia natural de 0.5rad/seg. con lo cual la frecuencia de oscilación no amortiguada es de $\omega_d = 0.5\sqrt{1-0.7^2} = 0.3571$, y los polos deseados continuos de lazo cerrado deben ser $s_{12} = -0.35 \pm j0.3571$; se elige un período de muestreo $T=0.5$ seg.

Para evitar problemas de muestreo de ruido, se ubica un filtro continuo de segundo orden, con función de transferencia:

$$F_{fil}(s) = \frac{4}{s^2 + 2.8s + 4} \quad (18)$$

La frecuencia natural del filtro es 2rad/seg., muy cercano a la frecuencia natural del proceso, entonces se debe considerar el filtro en el modelo del proceso a discretizar. Con lo cual el modelo equivalente de planta más el filtro es de cuarto orden. Los polos de lazo cerrado discretos deseados serán:

$$z_{12} = e^{Ts_{12}} = 0.826 \pm j0.149 \quad (19)$$

Con lo cual el polinomio característico deseado es:

$$P(z) = z^2 - 1.6523z + 0.70476 \quad (20)$$

Se debe cumplir que:

$$\frac{TB}{AR + BS} = \frac{A_0 B_m K}{A_0 A_m} = H_m \quad (21)$$

No se desea cancelar ceros de B , entonces B_m debe contener todos los factores de B ; entonces hacemos $B_m = B$. Los grados de los polinomios cumplirán: $\text{grado}A_m = 5$, $\text{grado}A_0 = 4$, $\text{grado}R = 4$ y $\text{grado}S = 4$.

$$\text{Como: } A_m = A'_m A_m^* = (z^2 - 1.6523z + 0.70476) A_m^* \quad (22)$$

Completamos con $A_m^* = z^3$. Como $S = S' A_n$, se debe resolver:

$$A'R + BS' = A'_0 A_m \quad (23)$$

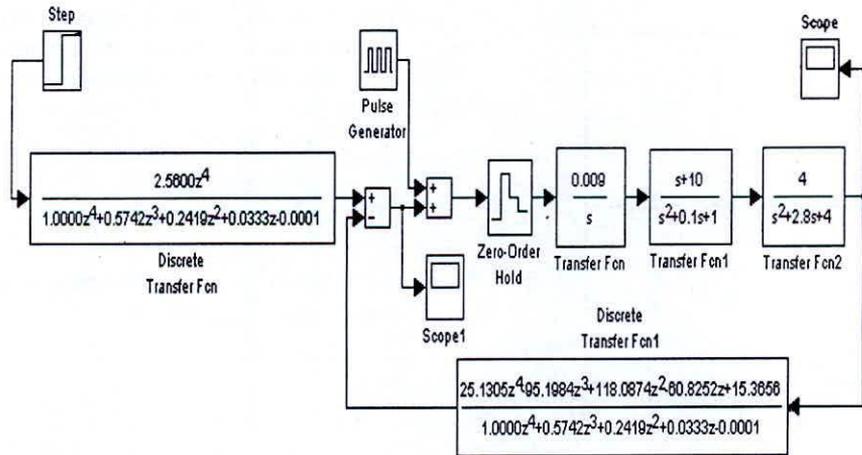


Figura 9 - Diagrama de bloques de simulación en SIMULINK.

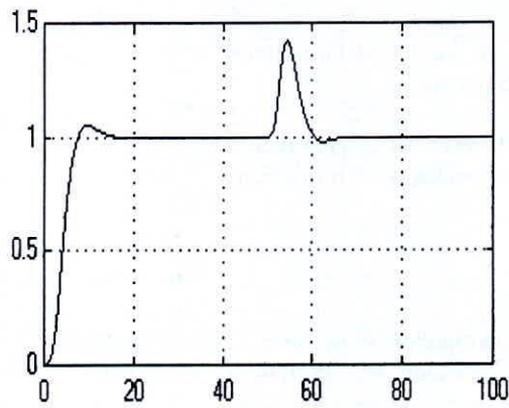


Figura 10 - Respuesta al escalón (en t=50seg. se presenta perturbaciones).

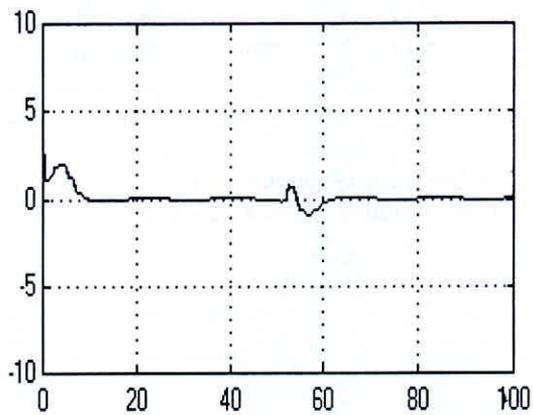


Figura 11 - Señal de control par respuesta al escalón con perturbaciones.

IV. CONCLUSIONES

El método desarrollado permite la solución en línea de los nuevos parámetros del controlador, se requiere implementar para ello un programa que resuelva una ecuación polinomial, para encontrar los coeficientes de los polinomios numeradores y denominadores de las funciones de transferencia componentes de la ley de control.

En la opción de diseño por cancelación de ceros, no se pueden cancelar los ceros inestables del sistema de lazo abierto, pues se convertirían en polos de lazo cerrado.

Debido a la alta ganancia en la frecuencia de resonancia (por el bajo amortiguamiento), en el primer método de cancelación de ceros, las perturbaciones activan los modos oscilatorios de la planta (figura 10). El segundo método, elimina dichas oscilaciones para la misma perturbación (figura 10), lo cual requiere una solución polinómica de mayor grado.

V. BIBLIOGRAFÍA

Rodríguez R. F., Lopez S. M. J.; Control Adaptivo y Robusto. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Sevilla, 1996.

Astrom K, Wittenmark B. Computer-Controlled Systems Theory and Design. Prentice Hall, 1997.

VI.- ANEXOS

1.- Edición de programa FTUBIPOLOS1M

```
%FTUBIPOLOS1.M
close all
clear all
%Panta continua
bc=0.009*[1 10];
ac=conv([1 0],[1 0.1 1]);
%Agregamos un filtro continuo
bf=4;
af=[1 2.8 4];
[ntc,dtc]=series(bc,ac,bf,af);
%Equivalente discreto con T=0.5
T=0.5;
[b,a]=c2dm(ntc,dtc,T);
%Cálculo de polinomios
%Polos continuos deseados
wn=0.5;amort=0.7;
pd=-amort*wn+i*wn*sqrt(1-amort^2);
%Polinomio discreto deseado
pdd=exp(T*pd);
eclc=poly([pdd pdd]);
%Am deseado
```

```
am=conv([1 0 0 0],eclc);
a0p=[1 0 0];
a0pam=conv(a0p,am);
%Polinomio factor de a
ap=conv([1 -1],[1 -0.7505 0.2466]);
%Solución sol=[r1 r2 r3 r4 s0 si s2]
M1=[ap 0 0 0
     0 ap 0 0
     0 0 ap 0
     0 0 0 ap];
bs=b(2:6);
ams=a0pam(2:8);
M2=[bs 0 0
     0 bs 0
     0 0 bs];
M=[M1' M2'];
const=[ap(2:4) 0 0 0 0]';
r=ams'-const;
sol=inv(M)*r;
R=[1 sol(1:4)'];
Sp=sol(5:7)';
K=polyval(am,1)/polyval(b,1);
an=[1 -1.7124 0.9512];
T=conv(K*an,a0p);
S=conv(Sp,an);
```

2.- Edición de programa FTUBIPOLOS2.M

```
%FTUBIPOLOS2.M
close all
clear all
%Panta continua
bc=0.009*[1 10];
ac=conv([1 0],[1 0.1 1]);
%Agregamos un filtro continuo
bf=4;
af=[1 2.8 4];
[ntc,dtc]=series(bc,ac,bf,af);
%Equivalente discreto con T=0.5
h=0.5;
[b,a]=c2dm(ntc,dtc,h);
%Cálculo de polinomios
%Polos continuos deseados
wn=0.5;amort=0.7;
pd=-amort*wn+i*wn*sqrt(1-amort^2);
%Polinomio discreto deseado
pdd=exp(h*pd);
eclcp=poly([pdd pdd]);
%Polinomio discreto adicional deseado
pda=-0.707+i*0.9987;
pdad=exp(h*pda);
eclca=poly([pdad pdad]);
amp=conv(eclcp,eclca);
%Am deseado
am=conv([1 0],amp);
a0=[1 0 0 0 0];
```

```
a0am=conv(a0,am);
%Solución sol=[r1 r2 r3 r4 s0 si s2]
M1=[a 0 0 0
     0 a 0 0
     0 0 a 0
     0 0 0 a];
bs=b(2:6);
ams=a0am(2:10);
M2=[bs 0 0 0 0
     0 bs 0 0 0
     0 0 bs 0 0
     0 0 0 bs 0
     0 0 0 0 bs];
M=[M1' M2'];
const=[a(2:6) 0 0 0 0]';
r=ams'-const;
sol=inv(M)*r;
R=[1 sol(1:4)'];
S=sol(5:9)';
K=polyval(am,1)/polyval(b,1);
T=K*a0;
```