Revista de Investigación de Física **20**, 172001351 (2017)

Energía de Mϕller para las métricas de Schwarzschild, Reissner-Nordström y Kerr-Newman

Fulgencio Villegas Silva*[1] y Teófilo Vargas Auccalla**[1]

[1] *Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Ap. Postal 14-0149, Lima, Perú*

Recibido 01 marzo 2017 – Aceptado 30 mayo 2017

Se evalúa la distribucion de energía de los agujeros negros de Schwarzschild, Reissner-Nordström y Kerr-Newman usando el complejo energía-momento de Mϕller. Notamos que la expresión de Mϕller es más general que los pseudotensores de Eisntein, Landau-Lifshitz y Weinberg, ya que la energía puede ser calculada usando directamente las coordinadas esféricas sin la necesidad de transformación a las coordinadas cartesianas.

Palabras claves: Relatividad general, gravitación, cosmología, energía gravitacional..

Mϕller energy for the Schwarzschild, Reissner-Nordström and Kerr-Newman metrics

The energy distribution of the Schwarzschild, Reissner-Nordström and Kerr-Newman black holes are evaluated using the Mϕller energy-momentum complex. We note that the exprension of Mϕller is more general than the Eisntein, Landau-Lifshitz and Weinberg pseudotensors, since the energy can be calculated using directly the spherical coordinate systems without any transformation to the Cartesian coordinates.

Keywords: General relativity, gravitation, cosmology, gravitational energy..

1. Introducción

El concepto de energía-momento junto con las leyes de conservación, cumplen un papel fundamental en cualquier teoría física. Sin embargo, todavía no hay una definición aceptada de energía-momento, y en general, de las cantidades conservadas asociadas con el campo gravitacional. La dificultad radica en en la expresión que define la parte energética del campo gravitacional [1]. Einstein utilizó el principio de equivalencia y las leyes de conservación de la energía-momento para formular las ecuaciones covariantes de campo gravitacional. Él formuló las leyes de conservación de energía-momento en función de dos términos: uno que expresa la densidad de energía de la materia T_a^b y el otro t_a^b que expresa la densidad de energía gravitacional. Indicó que el termino t_a^b no tenía carácter tensorial y por ello fue llamado de pseudotensor, pero concluyo que la expresión que contenía los términos anteriores eran válidos en todos los sistemas de coordenadas, ya que se obtuvieron directamente de los principios de la relatividad general. La elección de una cantidad no tensorial para describir la energía del campo gravitacional atrajo inmediatamente algunas críticas.

Los problemas asociados con el pseudo-tensor de Einstein dieron muchas definiciones alternativas de energía-momento compatibles con la Relatividad general, entre estas definiciones tenemos las correspondientes a Papapetrou [2], Bergman y Thompson [3], a Landau-Lifshitz [4], Tolman [5], Weinberg [6] quienes han sugerido diferentes expresiones para la distribución de energía-momento. El principal problema con estas definiciones es que dependen intrínsicamente de la elección de sistema de coordenadas, solo se pueden obtener resultados significativos cuando los cálculos se realizan en coordenadas cartesianas y por lo que no pueden proporcionar una densidad de energía-momento gravitacional local verdaderamente física. Esta restriccion de la dependencia de las coordenadas motivó a algunos físicos como Mϕller [7], Penrose [8] y Brown-York [9] a que construyeran definiciones independientes de los sitemas de coordenadas para la energía-meomento en el ámbito de la Relatividad General.

El concepto moderno, introducido por Penrose y Brown-York para resolver este dilema, es que la energía-momento en vez de ser local, es cuasilocal, estando asociada con una superficie cerrada que delimita una región [10]. Sin embargo, pronto también quedó claro que no

* fvillegass@unmsm.edu.pe
** tvargasa@unmsm.edu.pe

existe una expresión de energía quasilocal única y se han propuesto muchas definiciones de energía y masa quasilocal. El enfoque hamiltoniano arroja luces a este problema revelando su real significado físico. La energía de un sistema gravitatorio dentro de una región es considerada como el valor del hamiltoniano para este sistema y naturalmente depende no solo del interior de la región, sino también de las condiciones de frontera establecidas en la interfaz con el exterior. Se ha mostrado que el hamiltoniano necesariamente incluye una integral sobre la superficies bidimensional que limita la región considerada y la vez codifica el valor del hamiltoniano y el valor de las condiciones de contorno. Esto significa que las diferentes expresiones de energias cuasilocales que admiten una representación hamiltoniana están asociadas con diferentes tipos de condiciones de frontera [10]. Además, se ha demostrado en [11] que cada pseudotensor energía-momento se puede asociar con un término de superficie hamiltoniano, que a su vez determina el valor de energía-momento cuasilocal que está vinculado con las condiciones de frontera implícitas. En este sentido, se ha dicho que el enfoque hamiltoniano de energía-momento cuasilocal rehabilita los pseudotensores y, además, esclarece cualquier duda sobre el significado físico de estos complejos de energía-momento, ya que con este enfoque todas sus ambigüedades inherentes reciben significados físicos y geométricos claros.

En este trabajo analizamos el problema de la localización de la energía en Relatividad General usando el complejo pseudotensor de Mϕller [12] en el marco de la Relatividad General. Es importante señalar que esta expresión es válida para hacer cálculos en cualquier sistema de coordenadas dentro del marco de la geometría riemanniana y reproduce los mismos valores para la energía total y el momentum que la expresión psudotensorial de Einstein para un sistema cerrado. Virbhadra y otros [13] exploraron varios espacios-tiempo para los cuales diferentes complejos de energía-momento muestran un alto grado de consistencia al dar la misma distribución aceptable de energía-momento. Aguirregabira y otros [14] mostraron que cinco diferentes complejos de energía-momento dieron el mismo resultado para cualquier clase de las métricas de Schwarzschild, Reissner-Nordström, Kerr y otros. Remercamos que en estos trabajos todos los calculos son realizados en coordinadas cartesianas. El objetivo de nuestro trabajo es es calcular la energía de agujeros negros de Schwarzschild, Reissner-Nordström y Kerr-Newman pero usando el complejo pseudotensor de Mϕller en coordinadas esféricas y axiales respectivamente. Estos resultados son comparados con los trabajos anteriores [15], [16] y [17] obtenidos para los agujeros negros cargados y en rotación usando el mismo pseudotensor de Mϕller.

Vamos a proceder de acuerdo con el siguiente esquema. En la sección 2, revisamos el problema de la localización de la energía. En la sección 3, revisamos las principal características del pseudotensor de Mϕller. En las secciones 4, 5 y 6 calculamos la energía de los agujeros negros de Schwarzschild, Reissner-Nordström y Kerr-Newman en coordinadas esféricas y axiales respectivamente. Finalmente, en la sección 5, presentamos una discusión del resultado obtenido.

2. Localización de la energía en Relatividad General

La noción de localización de la energía-momento ha sido uno de los problemas más interesantes y controversiales que permanecen sin resolver desde el advenimiento de la Teoría General de la Relatividad. Se cree que la energía del campo gravitatorio no es localizable, es decir, solo es posible definir la energía del campo gravitacional en toda la región del espacio-tiempo y no en una región pequeña.

El concepto de energía total y momento en el espacio-tiempo asintóticamente plano es aceptado unívocamente; sin embargo, la localización de estas cantidades físicas sigue siendo un problema cuando se incluye el campo gravitacional. En la Teoría Especial de la Relatividad, en ausencia de campos gravitacionales, las leyes de conservación de energía-momentum son dadas por:

$$T^k_{i,k} = 0 \tag{1}$$

donde T^k_i denota el tensor simétrico de nergía-momentum en un sistema de referencia inercial. Mientras que la Relatividad General conduce a la generalización de la ecuación (1)

$$T^k_{i;k} \tag{2}$$

de esta forma la ecuación (2) no da lugar a ninguna ley de conservación lo que, de hecho, si esta ecuación se escribe como:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}T^k_i) = K_i \tag{3}$$

con $K_i = \dfrac{1}{2}\sqrt{-g}\dfrac{\partial g_{kp}}{\partial x^i}T^{kp}$, notamos que la cantidad K_i no es un cuadrivector, por lo tanto en un sistema local iniercial siempre es posible hacer que K_i sea nulo en un punto dado del espacio-tiempo y, en este caso, la ecuación (3) se reduce a la ecuación (1). En general, si $K_i \neq 0$ y para $i = 0$ la ecuacion (3) expresa el hecho de que la energía no se conserva.

Einstein formuló la ley de cornservación en forma de divergencia para incluir la contribución de la energía del campo gravitacional mediante el pseudotensor de energía-momento t^k_i tal que:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}(T^k_i + t^k_i)) = 0. \tag{4}$$

La cantidad t^k_i es cuadrática, homogénea en las primeras derivadas del tensor métrico y, por lo tanto no es un tensor. Con una elección adecuada de un sistema de ooordenadas puede hacer nulo en un punto en particular.

También puede demostrarse que si calculamos la integral $\int t_0^0 dx^3$ en un espacio-tiempo plano usando coordenadas cuasi cartesianas su valor es nulo, mientras que si transformamos a coordenadas esféricas el valor de esta integral es infinito[18].

Einstein atribuyó estas deficiencias a las coordenadas utilizadas, sin embargo, las dificultades asociadas con las cantidades no tensoriales de Einstein plantearon serios problemas relacionados con la localizabilidad de la energía en relatividad General. Como ya mencionamos, la formulación hamiltoniana de la energía ayuda a entender este problema: cada pseudotensor de energía-momento puede asociarse con un término de frontera hamiltoniano, que a su vez determina el valor de energía-momento cuasilocal que está vinculado con las condiciones de frontera implícitas. Sin embargo este problema aún permanece lejos de la solución definitiva.

3. Energía de Mϕller

momento de sistemas físicos cerrados y su dependencia de coordenadas cuasi-cartesianas es de alguna manera insatisfactoria desde el punto de vista de la relatividad general. La mayor parte de la crítica sobre la propuesta de Einstein se centró en la naturaleza no tensorial de la cantidad t_i^k. Mϕller buscó una expresión de energía y momento que no dependa de ningún sistema de coordenadas en particular. Si θ_i^k es la energía-momento de Einstein y S_i^k es otra cantidad con una divergencia nula, entonces la suma $\theta_i^k + S_i^k$será identicamente nula. por lo tanto, la energía-momento no esta determinada únicamente por la condición de que su divergencia sea nula. Mϕller analizó ésta situación buscando una cantidad S_i^k que se pueda añadir a θ_i^k de manera que se transforme como un tensor para transformaciones espaciales. Con el fin de conservar las caracteristicas satisfactorias de la teoría de Einstein S_i^k tubo que ser elegida de tal manera que fuera una función invariante y que dependiera del tensor métrico y de su primera y segunda derivada.

Bajo transformaciones lineales debe comportarse como una densidad tensorial que satisfaga las siguientes condiciones:

1.- $S_{i,k}^k = 0$, por lo tanto debe ser expresado en términos de $\Psi_{i,p}^{kp}$ donde $\Psi_i^{kp} = -\Psi_i^{pk}$ es un tensor afín de rango 3.

2.- $\int S_i^0 dx^3 = 0$ sobre el espacio tridimensional total para un sistema cerrado cuando usamos coordenadas cuasi-cartesianas.

3.- $\theta_i^k + S_i^k$ se compporta como una densidad cuadrivectorial sobre transformaciones del tipo:

$$x^{0'} \longrightarrow x^0, x^{\alpha'} = f^{\alpha'}(x^\beta). \quad (5)$$

Definiendo el término

$$\Theta_i^k = \theta_i^k + S_i^k, \quad (6)$$

la condición (2) implica que

$$\int\int\int \Theta_i^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \int\int\int \theta_i^0 dx^1 dx^2 dx^3, \quad (7)$$

para un sistema físico cerrado. Para encontrar un S_i^k que satisfaga las condiciones anteriores mϕller [12] investigó las propiedades de transformación de θ_0^0 bajo transformaciones infinitesimales del tipo (5) para establecer la desviación de la variacion θ_0^0 de una densidad escalar. Siguiendo este procedimiento mϕller llegó finalmente a la expresión:

$$\Theta_i^k = \frac{1}{8\pi}\chi_{i,p}^{kp}, \quad (8)$$

donde

$$\chi_i^{kl} = \sqrt{-g}(\frac{\partial g_{ip}}{q} - \frac{\partial g_{iq}}{p})g^{kq}g^{lp}. \quad (9)$$

Entonces la densidad de energía viene expresada como:

$$E = \frac{1}{8\pi}\int\int\int \Theta_0^0 dx^1 dx^2 dx^3, \quad (10)$$

o en su forma equivalente

$$E = \frac{1}{8\pi}\int\int\int \frac{\partial \chi_0^{0l}}{\partial x^l} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (11)$$

Ahora vamos a usar esta expresión para calcular la energía de los agujeros negros de Schwarzschild, Reissner-Nordström y Kerr-Newman en coordinadas esféricas y axiales respectivamente.

4. Energía de la métrica de Schwarzchild

Las ecuaciones de campo gravitacional son no lineales y esto significa que una solución general para una distribución de materia arbitraria es analíticamente intratable. El problema se vuelve más fácil si buscamos soluciones especiales, por ejemplo, aquellas que representan el espacio-tiempo que posee simetrías. La primera solución exacta a las ecuaciones de Einstein fue encontrada por Schwarzschild en 1916 [1] y representa el elemento de linea que rodea una partícula puntual atractiva y el campo gravitacional estática, esféricamente simétrica en el espacio vacío que rodea algún objeto esférico masivo como una estrella y se llama solución externa.

a. Solución externa
Está descrito por una métrica estática con simetría esférica, dada por:

$$ds^2 = (1 - \frac{2m}{r})dt^2 - (1 - \frac{2m}{r})^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2) \quad (12)$$

de donde deducimos que:

$$g = -r^4 sen^2\theta \quad (13)$$

Haciendo uso del superpotencial χ_i^{kl} definido por (9)encontramos que:

$$\chi_0^{01} = 2msen\theta \quad (14)$$
$$\chi_0^{02} = \chi_0^{03} = \chi_0^{00} = 0 \quad (15)$$

por lo tanto la energía viene dada por:

$$E = \frac{1}{8\pi}\int_a^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \chi_{0,\nu}^{0\nu} drd\theta d\phi = 0 \quad (16)$$

Es decir la energía fuera del sistema material o la fuente es nula.

b. Solución interna
Para encontrar la energía de la solución interna es necesario continuar hacia el interior de la esfera con otra solución que depende de las propiedades de la materia que compone la esfera. En este caso el campo esta descrito por la métrica estática con simetría esférica [5] dada por:

$$ds^2 = [A - B(1 - \frac{r^2}{R^2})^{1/2}]^2 dt^2 - (1 - \frac{r^2}{R^2})^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2), \quad (17)$$

donde:

$$A = \frac{3}{2}(1 - \frac{a^2}{R^2})^{1/2} \qquad B = 1/2 \quad (18)$$
$$R^2 = \frac{3}{8\pi\rho} = \frac{a^3}{2m} \qquad m = \frac{4}{3}\pi\rho a^3. \quad (19)$$

Éste es el campo asociado con un sistema material esférico, compuesto de un fluido perfecto incompresible con densidad propia ρ. La constante a es el radio del sistema esférico.
De la métrica obtenemos:

$$g = -[A - B(1 - \frac{r^2}{R^2})^{1/2}]^2(1 - \frac{r^2}{R^2})^{-1}r^4 sen^2\theta. \quad (20)$$

Haciendo uso del superpotencial χ_i^{kl} definido por (9)encontramos que:

$$\chi_0^{01} = \frac{2Br^3}{R^2}sen\theta \quad (21)$$
$$\chi_0^{02} = \chi_0^{03} = \chi_0^{00} = 0. \quad (22)$$

Calculando la energía

$$E = \frac{1}{8\pi}\int_a^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \chi_{0,1}^{01} drd\theta d\phi \quad (23)$$

$$E = \frac{1}{8\pi}\int_a^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r}(\frac{2Br^3 sen\theta}{R^2})drd\theta d\phi = \frac{a^3 B}{R^2}, \quad (24)$$

sustituyendo las relaciones dadas en (18) y (19) obtenemos:

$$E = mc^2. \quad (25)$$

Esto es, la energía es igual a la masa gravitacional m de acuerdo con el resultado de Einstein. Además, puesto que la energía del campo exterior fue cero, concluimos que toda la energía del sistema reside dentro del sistema material o la fuente del campo gravitacional. Es importante señalar que la expresión para la energía fue obtenida usando directamente las coordinadas esféricas y no las coordinadas cartesianas. Si usamos otros pseudotensores ya mencionados en la introducción para calcular la energía, es necesario usar sólo las coordinadas cartesianas, pues en coordinadas esféricas se obtendría un valor infinito [19]. Inclusive para la métrica de Minkowski del espacio-tiempo plano en coordinadas esféricas uno obtiene un valor infinito para la energía. Estos resultados infinitos para la energía no son sorprendentes ya que t_i^k no es un tensor.

5. Energía de la métrica de Reissner-Nordström

Ahora calculamos la energía de la métrica fuera de un cuerpo cargado con simetría esférica estática. El exterior de tal el objeto no es un vacío, ya que está lleno de un campo eléctrico estático. La solucion de Reissner-Nordström está dada por [20]:

$$ds^2(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2})dt^2 - (1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2})^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2), \quad (26)$$

donde M y e son la masa y carga eléctrica respectivamente. de la métrica anterior deducimos que:

$$g = -r^4 sen^2\theta \quad (27)$$

Haciendo uso del superpotencial χ_i^{kl}para χ_0^{0l}, encontramos que:

$$\chi_0^{01} = r^2 sen\theta(\frac{2m}{r^2} - \frac{2e^2}{r^3}) \quad (28)$$
$$\chi_0^{02} = \chi_0^{03} = \chi_0^{01} = 0 \quad (29)$$

Calculando la energía mediante la expresión:

$$E = \frac{1}{8\pi}\int_a^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \chi_{0,\nu}^{0\nu} dr d\theta d\phi = 0 \tag{30}$$

obtnemos:

$$E = Mc^2 - \frac{e^2}{r}. \tag{31}$$

Por tanto, la energía depende de la masa gravitacional y la carga de la fuente.

6. Energía de la métrica de Kerr-Newman

En los dos ejemplos anterior obtuvimos la expresión de la energía para sistemas físicos con simetría esférica. Sin embargo, la mayoría de los objetos astrofísicos reales, tales como estrellas, galaxias y agujeros negros, están en rotación. En este caso, una solución con simetría esférica no puede aplicarse ya que el eje de rotación del objeto define una dirección especial, por lo que destruye la isotropía de la solución. En nuestra última aplicación obtenemos la energía para una fuente cargada en rotación.

La métrica de Kerr-Newman en coordenadas de Boyer-Lindquist (t, ρ, θ, ϕ) es expresada por [20]:

$$ds^2 = \frac{\Delta}{r_0^2}(dt - asen^2\theta d\phi)^2 - \frac{sen^2\theta}{r_0^2}[(\rho^2 \tag{32}$$

$$+a^2)d\phi - adt]^2 - \frac{r_0^2}{\Delta}d\rho^2 - r_0^2 d\theta^2,$$

donde:

$$\Delta = \rho^2 - 2M\rho + e^2 + a^2 \tag{33}$$

$$r_0^2 = \rho^2 + a^2cos^2\theta, \tag{34}$$

e y M son la carga y masa respectivamente.

Las coordenadas de Boyer-Lindquist son singulares para $\rho = \rho_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - e^2 - a^2}$.
Removiendo estas coordenadas, introducimos las transformaciones:

$$dt = dv - \frac{\rho^2 + a^2}{\Delta}d\rho, \tag{35}$$

$$d\phi = d\varphi - \frac{a}{\Delta}d\rho. \tag{36}$$

Expresando la métrica en coordenadas de Edington-Finkelstein $(v, \rho, \theta, \varphi)$ resulta [15]:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (1 - \frac{2m\rho}{r_0^2})dv^2 - 2dvd\rho \\ &+ \frac{2asen^2\theta}{r_0^2}(2M\rho - e^2)dvd\varphi \\ &- r_0^2 d\theta^2 + 2asen^2\theta d\varphi \\ -[(\rho^2 + a^2)sen^2\theta &+ \frac{2M\rho - e^2}{r_0^2}a^2sen^4\theta]d\varphi^2. \end{aligned} \tag{37}$$

Haciendo uso del superpotencial χ_i^{kl}para χ_0^{0l}, encontramos que:

$$\chi_0^{01} = \frac{-2(\rho^2 + a^2)sen\theta}{(\rho^2 + a^2cos^2\theta)^2}(Ma^2cos^2\theta - M\rho^2 + e^2\rho). \tag{38}$$

Entonces calculamos la energiá usando la relación:

$$E = \frac{1}{8\pi}\int\int \chi_0^{0\beta}\hat{\mu}_\beta ds \tag{39}$$

donde $\hat{\mu}_\beta$ es un vector unitario normal a la superficie ds. Considerando ρ constante, obtenemos:

$$E = Mc^2 - \frac{e^2}{2\rho}[1 + \frac{a^2 + \rho^2}{a\rho}arctan(\frac{a}{\rho})]. \tag{40}$$

La expresión de energía de una fuente cargada en rotación se caracteriza no solo por su masa M, sino también, por su carga e y su momento angular $J = Mac$.

7. Conclusiones

La localización de la energía-momento desempeña un papel importante enla Teoría de la Relatividad General. Sin embargo, existe una gran dificultad para formular una definición adecuada de la densidad de energía de los campos gravitacionales y aún permanece sin solución definitiva.

En este trabajo hemos usado el pseudotensor de Mϕller para calcular la energía de las metricas indicadas al inicio, los resultados que hemos encontrado muestran un alto grado de consistencia, ya que la teoria de Mϕller es más general que las propuestas de Eisntein, Landau-Lifshitz y Weinberg.

La principal caracteristica del complejo energía-momento de Mϕller es que la energía puede ser obtenida usando directamente las coordinadas esféricas sin necesidad de transformar para las coordinadas cartesianas. Mientras que en otros pseudotensores la energía finita y físicamente consistente es obtenida sólo en las coordinadas cartesianas, pues en coordinadas esféricas se obtendría un valor infinito.

Hemos calculado la Energía para las métricas de Schwarzchild, Reissner-Nordström y Kerr-Newman. De los resultados notamos que la expresión de energía depende sólo de los parámetros físicos de la fuente, para una partícula puntual atractiva o un sistema material esférico compuesto de un fluido perfecto incompresible de masa M, su energía solo depende de la masa, mientras que para una fuente cargada con rotación depende de la carga e y el momento angular J.

Referencias

[1] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler,*Gravitation*, Freeman, San Francisco, 1973.

[2] A. Papapetrou, *Proc. Royal Irish Acad.* A 52, 11 (1948).

[3] P. G. Bergmann and R. Thompson, *Phys. Rev.* 89, 400 (1953).

[4] L.D. Landau and E.M. Lifshitz,*The Classical Theory of Fields*, Addison- Wesley Press, Reading, MA, 1962, 2nd ed.

[5] R.C. Tolman,*Relativity, Thermodynamics and Cosmology*, Oxford Univ. Press, 1934.

[6] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley, New York, 1972.

[7] C. Mϕller,*Ann. Phys.*, **NY 4**,347 (1958).

[8] R. Penrose,*Proc. Roy. Soc. London*, A381, 53 (1982).

[9] J. D. Brown and J. W. York, Jr., *Phys. Rev.* D 47, 1407 (1993).

[10] L. B. Szabados, *Living Rev. Relativity 7*, 4 (2004), http:// livingreviews.org/lrr-2004.

[11] C.-C. Chang, J. M. Nester, and C.-M. Chen, *Phys. Rev. Lett.* 83, 1897 (1999); J.M. Nester, L.L. So and T. Vargas, *Phys. Rev.* D 78, 044035 (2008).

[12] C. Mϕller, *Ann. Phys.* **NY 12**, 118 (1961); G. Lessner, *Gen. Relat. Grav.* 28, 527 (1996).

[13] K.S. Virbhadra, *Phys.Rev.* D41 (1990), 1086; Phys. Rev. D42 (1990), 1066; Phys. Rev. D60 (1999), 104041; K.S. Virbhadra and J.C. Parikh, *Phys. Lett.* B331 (1994), 302.

[14] J.M. Aguirregabiria, A. Chamorro and K.S. Virbhadra and J.C. Parikh, *Gen. Relat. Grav.* 28 (1996), 1393; I. Radinschi, *Mod. Phys. Lett.* A15 (2000), 803.

[15] S.S. Xulu, *Mod. Phys. Lett.* A15 (2000), 1151.

[16] E.C. Vagenas, *Mod. Phys. Lett.* A, 21, 1947 (2006).

[17] G.L. Nashed,*Chin. Phys. Lett*, 25, 4 (2008).

[18] H. Bauer,*Phyz. Z.*, 19 ,163 (1918).

[19] J. Weber, *General Relativity and Gravitational Waves*, Interscience Publication, New York, 1961.

[20] M.P. Hobson, G.P. Efstathiou and A.N. Lasenby, *General Relativity. An Introduction for Physicists*, Cambridge University Press, 2006.