



Estimación de la distribución espectral de haces de rayos X por cálculo iterativo computacional y diseño de programa de dosimetría, utilizando datos de atenuación

Miguel Castillo*¹, Galo Patiño¹, Marco Merma¹, Juan Mendoza¹, José Janampa² y Nonoy Podestá²

¹Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Físicas, Lima, Perú

²Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Clínica Universitaria, Lima, Perú

Recibido 01 junio 2019 – Aceptado 15 julio 2019

Resumen

En este trabajo de investigación se ha determinado el espectro de rayos X, para ello hemos diseñado un programa computacional mediante el cálculo iterativo, se han tomado las muestras de datos de atenuación y luego se ha trabajado un programa previamente diseñado con un lenguaje de programación, con los datos de atenuación. Para este caso se trabajó con los filtros de Aluminio y Cobre. Esta investigación nos ha permitido: 1.- Encontrar los espectros de radiación de rayos X. 2.- Diseñar un Programa que nos permita encontrar los espectros de rayos X, que debemos comparar con los espectros de rayos X determinados anteriormente por Tominaga (1981). 3.- Diseñar un Programa Visual de Dosimetría de rayos X. El resultado esperado es la obtención de los espectros de radiación y la optimización de la dosimetría de rayos X, en base al programa diseñado.

Palabras clave: Espectros, dosimetría, atenuación, filtros, haces de radiación.

Estimation of the spectral distribution of X-ray beams by computational iterative calculation and dosimetry program design, using attenuation data

Abstract

The present research has allowed us to determine the X-ray spectrum, for this we have designed a computational program through iterative calculation, samples of attenuation data have been taken and then a previously designed program has been used with a programming language, with the attenuation data. For our case we have worked with the Aluminum and Copper filters. This research has allowed us to: 1.- Find the spectra of X-ray radiation. 2.- Design a program that allows us to find the X-ray spectra, which we must compare with the X-ray spectra previously determined by Tominaga (1981). 3.- Design a Visual X-ray Dosimetry Program. The expected result is the obtaining of the radiation spectra and the optimization of the X-ray dosimetry, based on the designed program.

Keywords: Spectra, Dosimetry, Attenuation, Filters, Radiation Beams.

1. Introducción

El trabajo de investigación permitió determinar el espectro de haces de radiación de rayos X (Mulkay y Gutiérrez, 1987) [Mul87], se ha determinado la distribución espectral continua o de Bremsstrahlung de un sistema generador de rayos X que opera a potencial constante, empleando el método del cálculo iterativo computacional utilizando datos de atenuación, sustentado en Tominaga (1981), quien desarrollo: La estimación de distribuciones espectrales de rayos X con datos de atenuación por medio

de cálculo iterativo, para estimar los espectrales de rayos X, a partir de datos de atenuación medidos con diferentes filtros [Tom81].

El método de atenuación consiste en el análisis adecuado de los datos obtenidos en una cámara de ionización, luego de hacer pasar un haz de rayos X a través de filtros de diferentes espesores situados entre el generador de rayos X y la cámara de ionización.

En la primera parte del trabajo se da la fundamentación teórica de la producción de los rayos X y su distribución espectral, nos ocupamos también del espectro teórico

*mcastillo@unmsm.edu.pe

de Kramers (con filtros y sin filtros).

En la segunda parte se hace un análisis del cálculo matricial utilizado para la realización de nuestro programa. En la tercera parte del trabajo se muestra los resultados obtenidos referentes a la convalidación del método, de las distribuciones espectrales de rayos X continuas, y por último, presentamos los análisis y las conclusiones.

Las unidades participantes están conformadas por Docentes de la Facultad de Ciencias Físicas, Medicina Humana, especialistas en programación y un equipo de apoyo profesional.

2. Fundamento teórico

En 1992, se desarrolló un trabajo de tesis, en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, cuyo título es: Determinación del espectro continuo de rayos X por método de absorción y transformada de Laplace (Benavente, 1982) [Ben92]. La validez del método es probado con los datos de absorción publicados por Tominaga (1981) [Tom81]. La relación entre la función de la distribución espectral y la función de la curva de trasmisión mediante la transformada de Laplace es mostrada mediante un análisis de la forma general, la función analítica de la curva de transmisión es ejecutada y cuyos parámetros de ajuste son obtenidos por el método de optimización de Rosenbrock. Las distribuciones espectrales para 60 y 100 kV son calculadas previamente.

Tominaga (1981), desarrolló el trabajo: La estimación de distribuciones espectrales de rayos X de datos de atenuación por medio de cálculo iterativo, para estimar las distribuciones espectrales de rayos X, a partir de datos de atenuación medidos con diferentes filtros [Tom81]. El algoritmo es derivado por la Función de Mínimos Cuadrados, el método se sustenta en el espectro basado en la teoría de Kramers, experimentalmente ilustrado para una distribución de 140 keV a potencial constante de una fuente de rayos X.

En el trabajo Distribución Espectral de la ventana final del tubo de Rayos X (Broll, 1999) [Bro99]. Además se presenta la distribución de intensidad espectral de la ventana final tubos de rayos X (Au, Rh, Cu y Cr ánodos), normalmente se utiliza en longitud de onda y la energía espectralmente dispersivos. La distribución espectral de los rayos X, según los tubos de medida con un método de dispersión de energía permite compararlos con los datos experimentales del espectro continuo del tubo de rayos X a una expresión semi-empírica sobre la base de la Ley de Kramers. El conocimiento de la radiografía de las diferentes líneas contribuye a la total distribución espectral de los rayos X.

Este trabajo consiste en mejorar los trabajos descritos, haciéndolo más precisos en los cálculos para la distribución espectral, por ello se ha diseñado un programa espectral en

un lenguaje de programación (Joyanes, 1996) [Joy96], en base a los métodos numéricos (Nakamura, 1997) [Nak97], así mismo en presentar el programa optimizado y visual para determinar la dosis de cada paciente en función de sus características.

3. Datos

Se emplean la fórmula teórica de Kulenkampff-Kramers o la técnica de simulación de Monte Carlo (Ramos, 2005) [Ram05], asumiendo que las mediciones de atenuación de la tasa de exposición son realizadas con un haz suficientemente colimado, tal que los fotones dispersados no son detectados. La relación entre la distribución espectral de exposición objetivo $X_E(E)$ y la exposición total $I(T)$ medida luego de ser atenuada por un filtro de espesor T es expresada por la siguiente ecuación (1):

$$I(T) = \int_0^{E_{max}} X_E(E) \exp(-\mu(E)) \rho(t) dE \quad (1)$$

Donde

E_{max} = Energía máxima de fotones correspondiente al voltaje del tubo de R-X (keV)

$\mu(E)$ = Coeficiente de atenuación masico del material del filtro a una energía (E)

ρ = Densidad del material del filtro

Como el coeficiente másico de atenuación es una función que decrece monótonamente con el incremento de la energía, se puede estimar la distribución original $X_E(E)$ sin filtración, conociendo los valores de $\mu(E)$ y valores medidos o simulados de $X(T)$ para filtros de diferentes espesores.

Cuando se toma en cuenta los errores, la ecuación anterior se puede expresar como la siguiente ecuación:

$$Y(T) = I(T) + N(T) \quad (2)$$

Donde $N(T)$ es el error estadístico de la medición de alrededor del 1%.

Los cálculos numéricos directos para la estimación espectral requieren que las ecuaciones anteriores sean reemplazadas por un grupo de ecuaciones lineales. Dividiendo el intervalo de energía $0 - E_{max}$ en n sub-intervalos de energías $\Delta E_i (i = 1, 2, \dots, n)$, y expresando $X_E(E) (0 \leq E \leq E_o)$ en forma discreta $[X(E_1), X(E_2), \dots, X(E_n)]$, las medidas de atenuación $Y(T_i) (i = 1, 2, \dots, m)$ con m filtros de diferente espesor pueden ser descritas como la ecuación:

$$Y(T_i) = \sum_{j=1}^n \underbrace{[X_E(E_i)]}_X \underbrace{\exp(-\mu(E_j))\rho t_j}_R \underbrace{\Delta E_j + n(t_i)}_E \quad (3)$$

$$i = (1, 2, \dots, m) \quad y \quad j = (1, 2, \dots, n)$$

Donde $n(T_i)$ es el error de la medición y puede incluir también el error de la aproximación. Por razones de simplicidad, la ecuación anterior puede ser expresada en forma matricial, así la siguiente ecuación (4):

$$Y = REx + n \quad (4)$$

Donde cada una de ellas expresan las siguientes matrices en las ecuaciones (5)

$$Y = \begin{bmatrix} T(T_1) \\ \vdots \\ Y(T_m) \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X(E_1) \\ \vdots \\ X(E_n) \end{bmatrix} \quad n = \begin{bmatrix} n(T_1) \\ \vdots \\ n(T_n) \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \exp(-\mu(E_1)\rho T_1) & \dots & \exp(-\mu(E_n)\rho T_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \exp(-\mu(E_1)\rho T_m) & \dots & \exp(-\mu(E_n)\rho T_m) \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} \Delta E_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \Delta E_n \end{bmatrix} \quad (5)$$

Las distribuciones espectrales $X_E(E)$ quedan determinadas para n intervalos de energías E_1, \dots, E_n mediante el empleo de un algoritmo adecuado que estima la distribución discreta X , a partir del vector de medido Y , y de la matriz R . Para resolver este problema podemos asociar la función de mínimos cuadrados en la ecuación (6):

$$J(x) = [y - REx]^T W^{-1} [y - REx] \quad (6)$$

La matriz W , ($m \times m$), matriz covarianza del error de n desde el punto de vista estadístico (Sage y Melsa, 1971). Puesto que la verdadera covarianza no es bien conocida, bajo la asunción que los elementos de m , son mutuamente no correlacionado, aquí definimos W como una matriz diagonal con elementos $W_{ii} = Y(t_i)^2$, [Tom81].

4. Metodología

El trabajo de investigación es experimental, porque se trabajó con un lenguaje de programación que nos permitió simular los espectros de rayos X, para ello hemos trabajado según las siguientes etapas:

1.- Recolección de los datos de las medidas de atenuación de los materiales, como el Aluminio (Al) con una fuente de rayos X a voltajes constante de 100 keV y por el

Cobre (Cu) a un voltaje constante de 140 keV, se utilizaran 34 filtros, El metodo hace uso de la variación del coeficiente de atenuación con la energía de ciertos materiales como el Aluminio y el Cobre, para el equipo utilizado es simple en comparacion al metodo espectrometrico, consistente de una camara de ionizacion y un numero de laminas metalicas o filtros que se intercalan entre la cámara de ionización y el tubo de rayos X.

2.- Se diseñó un programa en un lenguaje de programación, se trabajó el algoritmo en base de las operaciones matriciales, luego se dividieron los voltajes en intervalos de 5 keV para el Aluminio y 20 keV para el Cobre, se trabajaron las matrices respuestas, considerando para cada material un parámetro de corrección α para los elementos. Además se diseñara una interfaz para el programa del cálculo de dosimetría en un programa visual. Aquí desarrollaremos la prueba piloto.

3.- Los calculos numéricos seran trabajados con softwares como Fortran, Pascal y C, mientras que los calculos matematicos seran trabajados con paquetes como el Matematica y el Matlab, los resultados seran comparados con el espectro obtenido por Tominaga (1981) [Tom81].

4.- Se procesó la información de los datos recolectados, para ello hemos utilizado programas estadísticos como el SPSS, base de datos como el Visual Fox y Visual Basic.

5.- Se construyó el espectro obtenido en base a los puntos obtenidos, para luego realizar las comparaciones entre la parte teorica de Tominaga (1981) [Tom81] y lo obtenido en forma experimental.

6.- Se ha obtenido los Resultados.

7.- Elaboración y redacción del artículo de investigación para su publicación.

Descripción del funcionamiento del programa

A continuación damos una descripción del programa de cálculo que presentamos en este trabajo.

4.1. Aplicación del algoritmo

El algoritmo ha sido elaborado en lenguaje de programación primero en Turbo Pascal y luego actualizado a lenguaje C, para los dos siguientes elementos, cuyas características mencionamos a continuación:

1.- El algoritmo se basa en la fórmula de recurrencia.

$$X_{k+1} = X_k + 2\alpha R^T W^{-1} (Y - REx_k) \quad (7)$$

Donde

k = número de iteraciones

α = parámetro de corrección

$W^{-1}(Y(t_i))^{-2}$ = matriz diagonal de orden $m \times m$, donde t es el espesor y m es el número de filtro

$(Y(t_i))$ = Matriz columna de $1 \times m$, donde $Y(t_i)$ es la tasa de exposición de i -ésimo espesor.

R = matriz de $m \times n$, donde m es el número de filtros y n son los intervalos de energía en que se ha dividido la energía total.

Asimismo se ha usado la matriz $R_{ij}e^{-\mu(E)t\rho}$.
Donde

$\mu(E)$ = Es el coeficiente de absorción que depende de cada energía,

t = Es el espesor del filtro

ρ = Es la densidad del material

2.- Los datos que ingresamos para el caso de nuestro problema están dados por las Matrices R , W y E calculadas previamente. El programa asume un valor Inicial de $X_k = 0$ y ejecuta los cálculos iterativos con la fórmula de recurrencia. Al final, el programa da como resultado los valores respectivos de X_k .

Funcionamiento del programa principal

Nuestro Programa principal funciona de la siguiente manera:

1. Ingresamos el orden de la Matriz $R(K \times L)$.
2. El programa solicita el nombre del archivo donde se encuentra $R(K \times L)$. Luego lee desde el editor cada elemento, estos elementos son los coeficientes del sistema lineal de la matriz $R(K \times L)$.
3. Ingresamos el Incremento de Energía ΔE .
4. Luego pide el nombre del archivo donde se encuentra $W(K \times K)$ (matriz diagonal). Luego lee el archivo desde el editor la matriz $W[K \times K]$ que tiene la forma de la ecuación (7):

$$W_{ii} = \left(\frac{i}{Y(i)} \frac{i}{y(i)} \right) \quad (8)$$

5. Ingresamos el nombre del archivo donde se encuentra $Y[K * 1]$ (matriz columna). Luego lee el archivo desde el editor la matriz $Y[K * 1]$.
6. Pide el parámetro de corrección α .
7. Pide el número de iteraciones.
8. Realiza las iteraciones respectivas.
9. Concluidas las iteraciones, finalmente proporciona los resultados respectivos. Previamente a los resultados, el programa realiza una serie de operaciones matriciales internas como:

Previamente a los resultados, el programa realiza una serie de operaciones matriciales internas como:

1. Cálculo de la Transpuesta de una matriz.
2. Cálculo de la matriz inversa.
3. Multiplicación de una Matriz por un Escalar.
4. Resta de Matrices.
5. Multiplicación de Matrices.
6. Multiplicación de una matriz de orden $m \times n$ por una matriz columna de orden $n \times 1$ para generar otra matriz de orden $m \times 1$.

Cabe destacar que, además del programa principal, hemos usado otro programa para Diagonalizar Matrices cuyos resultados han sido verificados con software como Matematica y Matlab

■ Para el Aluminio (Al)

El generador fue operado a un voltaje constante de $V = 100$ kV y una corriente continua $I = 10$ mA; fueron usados filtros de Al.

Dividimos en intervalos de 10 - 100 keV. $\Delta E_i = 5$ keV y construimos una matriz respuesta $R(28 \times 26)$ para usar el coeficiente de atenuación para la energía central de cada ΔE_i , luego el algoritmo iterativo es ejecutado con un valor estimado de $x_o = 0$ y un parámetro de corrección $\alpha = 7.8 \times 10^{-2}$ que satisface la condición del problema.

Los cálculos numéricos fueron trabajados en un Pentium, con Software de Programación como Turbo Pascal y Lenguaje C, además con los paquetes de Cálculo matemático como Matemáticas y Matlab. Las distribuciones estimadas para las iteraciones como: $k = 1900$ y 2000 , que son mostradas en el Resultado Experimental 1, para hacer luego hacer una comparación con el gráfico original [Tom81].

■ Para el cobre (Cu)

Usamos una energía constante de 140 keV, dividimos en intervalos de 20-140 keV. $\Delta E_i = 6$ ($i = 1, 2, 3, \dots, 20$) y construimos una matriz respuesta $R(34 \times 20)$ para usar el coeficiente de atenuación para la energía central de cada ΔE_i , luego el algoritmo iterativo de la ecuación anterior es ejecutado con un valor estimado de $x_o = 0$ y un parámetro de corrección $\alpha = 9.6 \times 10^{-5}$ satisface la condición mostrada anteriormente. Los cálculos numéricos fueron trabajados en un computadora Pentium, con lenguaje de programación como Turbo Pascal y Lenguaje C, como programas de Cálculo matemático como Matemáticas y Matlab.

Las distribuciones estimadas para las iteraciones son $k = 600; 5000; 10000$ y es mostrada en el resultado experimental 2, para luego hacer una comparación con el gráfico original [Tom81].

Planteamiento de hipótesis

Si para la estimación de la distribución espectral de los haces de rayos X por calculo iterativo computacional utilizando datos de atenuación, empleamos un programa en un lenguaje de programación, **Entonces** se mejorará la precisión y rapidez de la determinación espectral de los haces de rayos X y la dosimetría de radiación de rayos X en cada paciente.

5. Resultados y discusión

**Resultado experimental 1
Para el Aluminio (Al)**

La Tabla 1: Representa el resumen de los datos que han sido empleados para aplicar el programa, podemos observar: El valor total de la energía ($E=10-100$ keV), la corriente empleada ($I=10$ mA), el intervalo de las energías ($\Delta E = 5keV$), la matriz R de $m \times n$, m es el número de Filtros y n son los intervalos de energía en que se ha dividido la energía total, el valor inicial ($X_o = 0$), el parámetro de corrección $\alpha = 7,8 \times 10^{-2}$ empleado y el número de iteraciones (K) para cada solución 1 y 2 (1,900 y 2,000 iteraciones).

La Tabla 2: Tenemos los datos de los intervalos de energías y los valores obtenidos luego de haber ejecutado el programa con las dos iteraciones de 1900 y 2000 (Tasas de Exposiciones).

La Figura 1: Es la gráfica del Aluminio, las dos soluciones obtenidas (Tasas de Exposiciones) han sido tabuladas con cada intervalo de energía.

Para el Aluminio	
Energía	100 keV
I	10 mA
ΔE	5 keV
Matriz R	28×26
X_o	0
Parámetro de correccion α	$7,8 \times 10^{-2}$
Número de iteraciones	1900 (Sol 1)-2000(Sol 2)

Tabla 1: Datos iniciales trabajados para las soluciones.

N	Energía (keV)	Solución 1	Solución 2
1	10	0.2237199	0.0613063
2	15	7.6061439	7.5074
3	20	18.4674435	18.540731
4	25	23.7870702	23.9192929
5	30	22.3019114	22.368265
6	35	18.4373308	18.4299
7	40	14.8519172	14.8046
8	45	12.1234876	12.06394
9	50	10.135975	10.07964
10	55	8.6824133	8.6366
11	60	7.6035956	7.5712
12	65	6.7947359	6.7765
13	70	6.189187	6.1838
14	75	5.7405865	5.7465
15	80	5.4138607	5.429
16	85	5.1758493	5.1983
17	90	4.9890436	5.0176
18	95	4.8055015	4.84039
19	100	4.5640395	4.6079

Tabla 2: Datos como los intervalos de energía y las soluciones 1 y 2 (Tasas de Exposiciones).

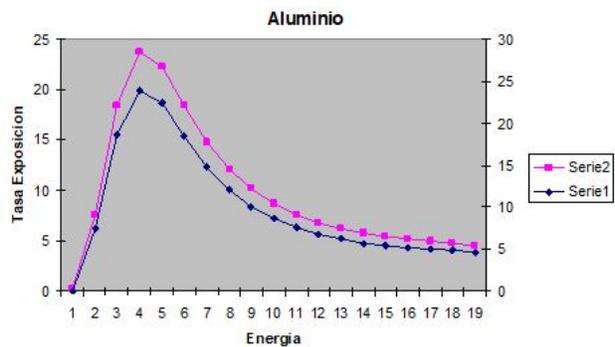


Figura 1: La gráfica del aluminio de acuerdo a la Tabla 2 son las soluciones 1 y 2. (Energía y tasa de exposiciones).

**Resultado experimental 2
Para el Cobre (Cu)**

La Tabla 3: Representa el resumen de los datos que han sido empleados para aplicar el programa, podemos observar: El valor total de la energía ($E = 20-140$ keV), la corriente empleada ($I=10$ mA), el intervalo de las energías ($\Delta E=6$ keV), la matriz R de $m \times n$, donde m es el número de filtros y n son los intervalos de energía en que se ha dividido la energía total, el valor inicial ($X_o = 0$), el parámetro de corrección $\alpha = 9,6 \times 10^{-5}$ empleado y el número de iteraciones ($K = 600; 5000; 10000$).

La Tabla 4: Nos muestra los datos de los intervalos de energía, los valores obtenidos luego de haber ejecutado el programa con el número de iteraciones (600; 5000; 10000), donde se obtiene las seis Tasas de Exposiciones.

La Figura 2: Es la gráfica del Cobre, las seis soluciones obtenidas (Tasas de Exposiciones) han sido tabuladas con cada intervalo de Energía.

Para el Cobre	
Energía	140 keV
I	10 mA
ΔE	6 keV
Matriz R	34×20
X_o	0
Parámetro de corrección α	$9,6 \times 10^{-5}$
Número de iteraciones	600; 5000; 10000

Tabla 3: Datos iniciales trabajados para las soluciones.

N	Energía (keV)	Solución1	Solución2	Solución3	Solución4	Solución5	Solución6
1	26	0.213279	0.0420722	0.0804934	0.990387	0.1090231	0.1206764
2	32	0.0282077	0.0390456	0.061565	0.728182	0.078903	0.0860053
3	38	0.1255076	0.1233424	0.1248106	0.1264085	0.1273383	0.1284351
4	44	0.40122117	0.3873944	0.3698516	0.3627526	0.3590557	0.35478
5	50	0.9126311	0.8927558	0.8651434	0.8534731	0.84737	0.8403295
6	56	1.6385605	1.6203416	1.5950076	1.5844519	1.579	1.5727642
7	62	2.4962379	2.4855784	2.4717624	2.4664822	2.4636	2.4610288
8	68	3.3107227	3.3089687	3.3083379	3.3088935	3.3093	3.3101661
9	74	3.9715486	3.9767441	3.9856265	3.9900989	3.9926	3.995682
10	80	4.3679762	4.3765644	4.3891043	4.3946962	4.3977	4.4012335
11	86	4.4907499	4.4997253	4.5113543	4.5160087	4.5184	4.5211095
12	92	4.3716632	4.3791566	4.3874245	4.3901717	4.3914	4.3927952
13	96	4.0373904	4.0424075	4.0463749	4.0469844	4.04707	4.0469841
14	104	3.627693	3.6304897	3.6311919	3.6303508	3.6297	3.6286663
15	110	3.1134124	3.1141271	3.1123053	3.1105244	3.10934	3.1078605
16	116	2.5511511	2.5502309	2.5470114	2.5449481	2.5437	2.5421629
17	122	1.9419766	1.9398735	1.9363534	1.9346305	1.9337	1.9325506
18	128	1.4220221	1.4193117	1.4163502	1.4153682	1.4149	1.4144248
19	134	0.8792329	0.8762315	0.8745402	0.8746881	0.875	0.8753979
20	140	0.3566812	0.3536953	0.353814	0.35536	0.3565	0.358051

Tabla 4: Datos como los intervalos de energía y los obtenidos para las soluciones 1, 2, 3, 4, 5 y 6 (Tasas de Exposiciones).

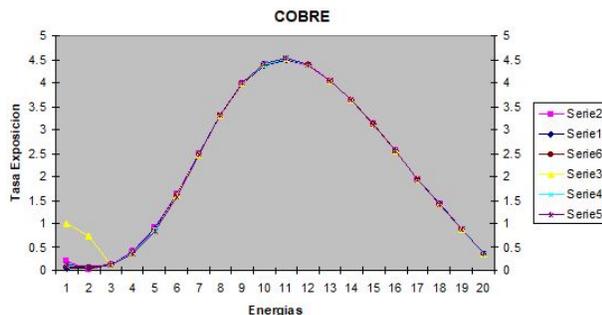


Figura 2: La gráfica del cobre de acuerdo a la Tabla 2 son las soluciones 1, 2, 3, 4, 5 y 6 (Energía y Tasas de Exposiciones)

Resultados 3: Espectros teóricos de Kramers obtenidos por Tominaga (1981)

Para el Aluminio (Al)

En 1981, Tominaga empleando la fórmula teórica de Kulenkampff-Kramers o la técnica de simulación de Monte Carlo, asumiendo que las mediciones de atenuación de la tasa de exposición son realizadas con un haz suficientemente colimado, tal que los fotones dispersados no son detectados. Tominaga (1981) aplicó el método iterativo de cálculo para estimar la distribución espectral en tasa de exposición a partir de datos de atenuación [Tom81].

La Tabla 5, muestra los datos obtenidos por Tominaga (1981), podemos observar los intervalos de energías, las Tasas de Exposiciones y las Fluencias de Fotones.

La Figura 3: Es el Espectro obtenidos de Aluminio, podemos observar los datos de las Energías y las Tasas de Exposiciones.

Energía (keV)	Exposición	Fluencia
10	1.07E-06	2.02E-05
12	3.28E-05	0.001046
14	0.000162	0.008278
16	0.000354	0.02783
18	0.000512	0.05935
20	0.000598	0.09828
22	0.000617	0.139
24	0.000594	0.1779
26	0.000547	0.2117
28	0.000495	0.2415
30	0.000441	0.2652
32	0.000393	0.2849
34	0.000348	0.2999
36	0.00031	0.3112
38	0.000276	0.3191
40	0.000248	0.3244
42	0.000223	0.327
44	0.000201	0.3281
46	0.000183	0.3281
48	0.000167	0.3262
50	0.000153	0.3237
52	0.000141	0.3193
54	0.00013	0.3149
56	0.00012	0.3081
58	0.000111	0.3011
60	1.03E-04	0.2917
62	9.52E-05	0.2814
64	8.78E-05	0.2667
66	8.05E-05	0.2556
68	6.67E-05	0.2401
70	6.67E-05	0.2236
72	6.00E-05	0.2056
74	5.35E-05	0.1865
76	4.72E-05	0.1669
78	4.11E-05	0.1467
80	3.45E-05	0.1276
82	2.98E-05	0.108
84	2.54E-05	0.9202
86	2.07E-05	0.07542
88	1.62E-05	0.05878
90	1.24E-05	0.04518
92	8.41E-06	0.03063
94	5.63E-06	0.02052
96	1.39E-06	0.005072
98	9.20E-08	0.00034

Tabla 5: Datos obtenidos para el espectro de Aluminio, los intervalos de energías, la tasa de exposición ($\mu\text{C}/\text{kg min keV}$) y la fluencia de fotones ($\text{fotones}/\text{cm}^2$).

Para el Cobre (Cu)

En 1981, Tominaga, realizó una comparación de datos empleando, el método teórico y su propio método iterativo

de cálculo para estimar la distribución espectral en tasa de exposición a partir de datos de atenuación.

La Tabla 6: Muestra los datos como los intervalos de Energía, los datos obtenidos con el método experimental computacional de Tominaga (1981) [Tom81] y finalmente los datos teóricos conocidos.

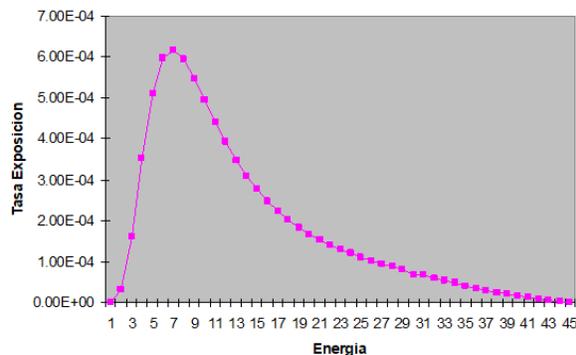


Figura 3: Espectro obtenidos de Aluminio con los datos de la Tabla 5 (Intervalos de energía y tasa de Exposición)

La Figura 4: Es el espectro obtenido del Cobre, se puede observar los datos de las energías y los datos del método experimental y los datos teóricos conocidos.

Energía (keV)	Método	Teórico
30	0.00	6.00E-06
35	0.0003	0.0007
40	0.0071	0.0102
45	0.0445	0.0052
50	0.1483	0.1483
55	0.3148	0.294
60	0.5114	0.4649
65	0.687	0.6319
70	0.8438	0.7843
75	0.9414	0.8954
80	0.9991	0.9723
85	1	1.013
90	0.9791	1.021
95	0.9415	0.9983
100	0.8931	0.9499
105	0.8365	0.8786
110	0.7764	0.789
115	0.7064	0.6842
120	0.6218	0.5668
125	0.509	0.4372
130	0.337	0.2992
135	0.0998	0.1527

Tabla 6: Datos obtenidos para el espectro de Cobre, los intervalos de Energía, los datos del Método Experimental y los Datos Teóricos.

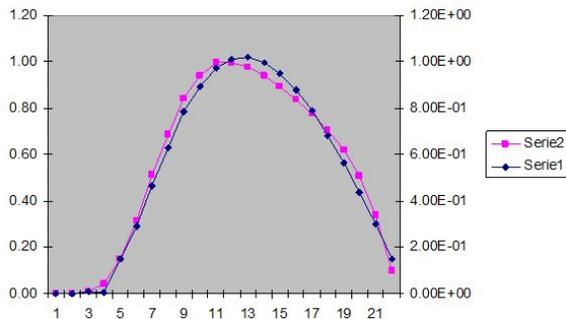


Figura 4: Espectros obtenidos de Cobre con los datos de los intervalos de Energía, del Método Experimental y los Datos Teóricos.

6. Análisis y discusión

Análisis Los Espectros obtenidos, luego de aplicar nuestro Programa a base de Matrices con los datos de Atenuación del Cobre y Aluminio, van a corresponder a las siguientes gráficas de los Resultados Experimentales 1 y 2, muy similares a los Espectros Teóricos obtenidos por Kramers según las gráficas de los espectros 3 y 4 de los Resultados Teóricos.

Las soluciones van a representar los puntos de la curva de simulación del espectro de aluminio o cobre, dependiendo de los parámetros introducidos. Al respecto, Tominaga (1981) recomienda incluir datos como el número de iteraciones y el Parámetro de Corrección. Con este propósito hemos usado un programa para diagonalizar una Matriz de Orden $W \times W$ de tal manera de obtener valores de alta precisión para el Parámetro de Corrección. El número de iteraciones dependerá del material utilizado [Tom81].

Covalidación del método El método de atenuación empleado en el presente trabajo fue convalidado con los datos de atenuación dados por Tominaga (1981), los cuales siguen la distribución teórica de Kramers [Tom81].

En el presente trabajo fueron usadas condiciones similares a las empleadas por Tominaga (1981) [Tom81] en términos de filtración y los diversos parámetros de simulación del espectro, obteniéndose resultados similares al obtenido por el referido autor, con lo cual se convalida el método de determinación espectral con datos de atenuación formulado por nosotros.

Conclusiones

El método iterativo de cálculo ha sido descrito para estimar la distribución espectral en tasa de exposición a partir de datos de atenuación. Para resolver el problema hemos usado un esquema heurística para encontrar la solución de este problema de estimación y, desde el punto de vista teórico nos da una prueba de convergencia del algoritmo.

La factibilidad del método fue mostrada en una simulación teórica usando un espectro hipotético basado en la teoría de Kramers. El estudio de la simulación muestra que un incremento del número de iteraciones no necesariamente conduce a una mejor estimación de la distribución espectral cuando el problema es mal condicionado; en este caso un criterio adicional para detener el proceso iterativo es dado. De esta forma es posible encontrar la estimación más probable de una secuencia de distribuciones estimadas.

La aplicación práctica fue realizada con medidas de atenuación para filtros de Aluminio (Al) de una fuente de rayos X a voltaje constante de 100 keV y para el Cobre (Cu) a un voltaje constante de 140 keV. En lo concerniente a la radiación característica, la cantidad es difícil de determinar solamente sobre la base de los presentes resultados aunque se supone que esta es muy pequeña.

Finalmente, el presente trabajo tiene una gran ventaja para encontrar los espectros continuos de rayos X, por los costos económicos, ya que el método directo o espectrométrico, requiere de sofisticadas y costosas máquinas, que están lejos del alcance de las instituciones que requieran emplearla, mientras que el presente método iterativo solo requiere del presente programa, sus datos y una computadora donde corre y obtener los resultados esperados.

Agradecimientos

1. Al Instituto Peruano de Energía Nuclear (IPEN) por facilitar los datos para el desarrollo del presente trabajo.
2. Al Lic. Tony Benavente, que en vida fue, por su invaluable aporte y ayuda en el presente trabajo.

Referencias

[Ben92] Benavente T. (1992). Tesis Licenciatura Determinación de espectro continuo de rayos X por método de absorción y transformada de Laplace. UNMSM-FCF. Lima-Perú.

[Bro99] Broll, N. (1999). Distribución Espectral de la ventana final tubo de Rayos X. JCPs-ICDD 41-46(393).

[Joy96] Joyanes L. (1996). Lenguaje de programación Pascal. Editorial McGraw-Hill.

[Mul87] Mulkay, J. y Gutierrez, C. (1987), Rayos-X, Edi-

torial Pueblo y Educación, La Habana - Cuba.

[Nak97] Nakamura, S. (1997). Análisis Numérico y Visualización Gráfica con Matlab. Editorial Prentice Hall. México. Código ISBN 9688808601, 978968808603

[Ram05] Ramos N. (2005). Cálculo por el Método Monte Carlo de un Co de Terapia utilizando el Código FO-TELP. Revista de Investigación de Física, vol 8, No. 1, pp 34-40.

[Sag71] Sage A. y Melsa J. (1971). Estimation theory with

application to communication and control. McGraw-Hill, New York, pp 237.

[Tom81] Tominaga, S. (1981). The estimation of X-Ray spectral distributions from attenuation data by means of iterative computation. University of Osaka, Japan.

[Twi70] Twidell, J. (1970). The determination of X-ray spectra using attenuation measurements and a computer program. Phys. Med. Biol. vol 15, No. 3, pp 529-540.

