ARTÍCULO ORIGINAL

Revista de Investigación de Física **24(2)**, (Jul-Dic 2021)
Doi: https://doi.org/10.15381/rif.v24i1.20413

eISSN:1728-2977

Espacio-tiempo de Schwarzschild con quintaesencia

Fulgencio Villegas*[1]

[1] *Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú*

Recibido 16 May 2021 – Aceptado 15 Jul 2021 – Publicado 16 Jul 2021

Resumen
Descubrimientos recientes determinan que el universo se expande aceleradamente. Con el objetivo de dar explicación a dicha aceleración se ha propuesto un componente de energía oscura denominado quintaesencia. En este artículo se propone introducir la quintaesencia en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Se resuelven las ecuaciones de campo de Einstein para la métrica de Schwarzschild con un tensor de energía-momento, cuyas componentes son las variables que definen el modelo de quintaesencia.

Palabras clave: Relatividad general, cosmología, energía oscura, quintaesencia.

Quintessential Schwarzschild space-time

Abstract
Recent discoveries determine that the universe is expanding rapidly. In order to explain this acceleration, a component of dark energy called quintessence has been proposed. In this article it is proposed to introduce quintessence in Schwarzschild space-time. The Einstein field equations for the Schwarzschild metric are solved with an energy-moment tensor, whose components are the variables that define the quintessence model.

Keywords: General relativity, cosmology, dark energy, quintessence.

Introducción

En cosmología las propiedades dinámicas del espacio-tiempo, de acuerdo a la Relatividad General, están dadas por el contenido de materia y energía. Según observaciones astronómicas actuales, otro tipo de materia y energía desconocidas denominadas materia oscura y energía oscura estarían gobernando las propiedades dinámicas del Universo [1].

Para dar respuesta a una serie de preguntas acerca de la naturaleza e interacciones de la materia oscura y energía oscura se han propuesto una serie de modelos, entre ellos el modelo de quintaesencia [2], el cual tiene un perfil de generar una presión lo suficientemente negativa capaz de acelerar la expansión del universo.

El modelo de la constante cosmológica, como modelo de energía oscura, es independiente del tiempo y espacialmente homogénea; a diferencia de la constante cosmológica, el modelo de quintaesencia es dinámico en el tiempo y espacialmente no homogéneo.

Por esta razón la quintaesencia ha sido, recientemente, considerada como una alternativa ventajosa respecto al modelo de la constante cosmológica para explicar la expansión acelerada del Universo. Otra de las razones es que el campo escalar aparece de forma natural en las ecuaciones de campo de muchas teorías alternativas a la Relatividad General. Desde luego, la teoría de la inflación primordial usa tambien un campo escalar denominado inflatón [3].

El estudio de los modelos cosmológicos en presencia de materia oscura tienen una especial importancia en la cosmología moderna [4], nos permiten analizar su comportamiento frente a una expansión acelerada del universo. Siendo el espacio-tiempode Schwarzschild la solución más sencilla de las ecuaciones de campo de Einstein es de particular importancia su estudio relacionado con el modelo de quintaesencia.

*fvillegass@unmsm.edu.pe

Métrica de Schwarzschild

La primera solucón exacta para las ecuaciones de campo de Einstein fueron obtenidas por Karl Schwarzschild [5] poco después de que Eistein publicara su teoría de la Relatividad General (TRG) [6]. Esta solución es para un sistema estático, dotado de simetría esférica y en el vacío. Por lo tanto es un buen modelo para describir el campo gravitatorio causado por cuerpos masivos con simetría esférica como planetas y estrellas.
La métrica Scshwarzschild se obtiene al resolver las ecuaciones de de campo de Einstein, siendo su expresión más común la siguiente

$$ds^2 = (1-\frac{2m}{r})dt^2 - \frac{dr^2}{1-\dfrac{2m}{r}} - r^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (1)$$

donde m es una constante que esta relacionada con la masa del cuerpo que genera campo gravitatorio.
La ecuación (1) presenta singularidades en $r = 0$ y $r = 2m$; sin embargo, si se calculan las componentes del tensor de Riemann se encuentra que para $r = 0$ no estan bien definidas, mientras que para $r = 2m$ si lo están. Esto indica que la singularidad asociada al valor $r = 2m$ es ficticia, denominada como singularidad removible, mientras que para el valor $r = 0$ es una singularidad esencial. Tambien se observa que en el límite $r \to 0$ la ecuación (1) se reduce a la métrica de Minkowski en coordenadas esféricas, por esta razón la métrica de Schwarzschild es una solución asintóticamente plana.

Quintaesencia

La quintaesencia es un posible modelo de energía oscura cuya presión debe ser lo suficientemente negativa como para acelerar la expansión del Universo [7].
En los modelos de quintaesencia se considera un campo escalar ϕ dependiente del tiempo con un término canónico y espacialmente homogéneo, que evolucionan progresivamente con un potencial $V(\phi)$, cuya masa y acoplos con otros campos son despreciables y donde este modelo puede ser interpretado como un fluido perfecto con presión negativa dado por

$$-1 \leq w < -\frac{1}{3}. \quad (2)$$

La acción para el modelo de quintaesencia viene dada por

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}(g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi) + V(\phi)\right], \quad (3)$$

donde $V(\phi)$ es la densidad de energía potencial asociada al campo. La variación suave de $V(\phi)$ conduce a una expansión acelerada del Universo [8].
El tensor de energía-momento asociado a este campo es

$$\rho_\phi = T^{00} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi),\ p_\phi = T^{ii} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (4)$$

utilizando la ecuación de campo de Einstein con la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2d\theta^2 + r^2\operatorname{sen}^2\theta d\varphi^2\right], \quad (5)$$

donde $a(t)$ es el factor de escala y k es un parámetro que indica la geometría del Universo, obtenemos las ecuaciones

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_\phi = \frac{8\pi G}{3}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right], \quad (6)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_\phi + 3p_\phi) = -\frac{8\pi G}{3}\left[\dot{\phi}^2 - V(\phi)\right]. \quad (7)$$

Además la variación de la ecuación (3) con respecto a ϕ da

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0. \quad (8)$$

Las cantidades p_ϕ y ρ_ϕ pueden relacionarse mediante la ecuación de estado $w_\phi = p_\phi/\rho_\phi$ de modo que

$$w_\phi = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)}. \quad (9)$$

De la ecuación (8) notamos que para que sea posible la expansión acelerada del universo es necesario que el parámetro w_ϕ este dentro del intervalo de valores (-1,-1/3) [8].

Métrica de Schwarzschild con quintaesencia

La solución de las ecuaciones de campo de Einstein para el caso estático en coordenadas esféricas está dado por un modelo de la forma [9]

$$ds^2 = e^{\nu(r)}dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\phi^2), \quad (10)$$

donde $\nu(r)$ y $\lambda(r)$ son funciones a determinar.
Consideremos un espacio-tiempo lleno de quintaesencia, cuyo contenido de materia y energía está dado por el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ cuyas componentes son

$$T_{tt} = T_{rr} = \rho_\phi, \quad (11)$$

$$T_{\theta\theta} = T_{\phi\phi} = -\frac{1}{2}\rho_\phi(3w_\phi + 1), \quad (12)$$

donde w_ϕ es el término de quintaesencia y ρ_ϕ la densidad de energía.
Usando la ecuación de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (13)$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, R es el escalar de Ricci, $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico, $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento y G la constante gravitacional de Newton.

Considerando $4\pi G = 1$ las ecuaciones de Einstein toman la forma

$$e^{-\lambda}(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r}\frac{d\lambda}{dr}) - \frac{1}{r^2} = -2\rho_\phi, \quad (14)$$

$$e^{-\lambda}(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{d\nu}{dr}) - \frac{1}{r^2} = 2\rho_\phi, \quad (15)$$

$$\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\frac{d^2\nu}{dr^2} + \frac{1}{2}(\frac{d\nu}{dr})^2 + \frac{1}{r}(\frac{d\nu}{dr} - \frac{d\lambda}{dr}) - \frac{1}{2}\frac{d\nu}{dr}\frac{d\lambda}{dr}\right) = \rho_\phi(3w_\phi + 1). \quad (16)$$

Resolviendo las ecuaciones (14) y (15) se deduce que

$$\lambda = -\nu. \quad (17)$$

Haciendo la sustitución

$$\lambda = -ln(1+f), \quad (18)$$

donde f es una funcion de r, reemplazando en las ecuaciones (14) y (16) tenemos

$$\frac{1}{2r^2}(f + r\frac{df}{dr}) = \rho_\phi, \quad (19)$$

$$\frac{1}{4r}(2\frac{df}{dr} + r\frac{d^2f}{dr^2}) = -\frac{1}{2}\rho_\phi(3w_\phi + 1), \quad (20)$$

Sumando las ecuaciones (19) y (20) obtenemos

$$(3w_\phi + 1)f + 3(1 + w_\phi)r\frac{df}{dr} + r^2\frac{d^2f}{dr^2} = 0, \quad (21)$$

resolviendo la ecuación diferencial (21), obtenemos como solución

$$f = -(\frac{2m}{r} + \frac{\alpha}{r^{3w_\phi+1}}), \quad (22)$$

donde m y α son constantes. Reemplazando las ecuaciones (17),(18) y (22) en la expresión (10), la métrica toma la forma [10]

$$ds^2 = (1+f)dt^2 - \frac{1}{1+f}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2, \quad (23)$$

o en su forma explícita

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\alpha}{r^{3w_\phi+1}}\right)dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\alpha}{r^{3w_\phi+1}}\right)}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2. \quad (24)$$

La ecuación (24) corresponde a la métrica de Schwarzschild con quintaesencia cuya densidad puede calcularse de la ecuación (19), siendo su expresión

$$\rho_\phi = -\frac{\alpha}{2}\frac{3w_\phi}{r^{3(w_\phi+1)}}. \quad (25)$$

Se puede notar que en ausencia del término α la métrica (24) se reduce a la métrica de Schwarzschild.

Conclusiones

El término de quintaesencia ha modificado la métrica original de Schwarzschild, la nueva métrica contiene un término adicional que depende del comportamiento del campo escalar. Sin embargo, la nueva métrica, sigue presentando las singularidades real y removible que dan origen al concepto de agujero negro de Schwarzschild. Como consecuencia del cambio en la geometría del espacio-tiempo de Schwarzschild, debido a la quintaesencia, las geodésicas de las partículas tambien serán modificadas, ya que sus trayectorias dependen de los parámetros de la métrica y del parámetro de quintaesencia.

Referencias

[1] E. J. Copeland, M. Sami and S. Tsujikawa. Dynamics of dark energy. Int. J. Mod. Phys. **D15**, 1753 (2006).

[2] S. Capozziello, V. F. Cardone, E. Piedipalumbo and C. Rubano. Dark energy exponential potential models as curvature quintessence. Class. Quant. Grav. **23**, 1205 (2006).

[3] V. Mukhanov. Physical foundations of cosmology. Cambridge university press, (2005).

[4] O. Avsajanishvili. Cosmological models of dark energy: theory and observations.*ArXiv preprint physics/1909.00366*, (2019).

[5] K. Schwarzschild. On the gravitational field of a mass point according to einstein's theory. *ArXiv preprint physics/9905030*, (1999).Translation and foreword by S.Antoci and A.Loinger.

[6] A. Einstein. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 844 (1915).

[7] R. R. Caldwell, R. Dave, and P. J. Steinhardt. Cosmological imprint of an energy component with general equation-of-state. Phys. Rev. Lett. 80 (1998).

[8] S. Tsujkawa. Quintessence: a review. Classical and Quantum Gravity, IOP Publishing, **V30**, 21 (2013).

[9] L. Ryder. Introduction to General Relativity. Cambridge University Press, (2009).

[10] V. Kiselev. Quintessence and black holes. Classical and Quantum Gravity, IOP Publishing, **20**6, 1187 (2003).