ARTÍCULO ORIGINAL

Revista de Investigación de Física **24(3)**, (Set-Dic 2021)
Doi: https://doi.org/10.15381/rif.v24i3.21161

eISSN:1728-2977

Ecuaciones de Friedmann en las teorías de gravedad modificada $f(R)$

Fulgencio Villegas [*1]

[1] *Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú*

Recibido 04 Set 2021 – Aceptado 23 Oct 2021 – Publicado 07 Dic 2021

Resumen
En este trabajo, se presenta la deducción de las ecuaciones de Friedmann en el contexto de las teorías de gravedad modificada $f(R)$; se ha considerado presentarlas en función de la constante k asociada a la curvatura de la hipersuperficie. Para su deducción, se hace previamente una revisión de la formulación lagrangiana de la Relatividad General y de las teorías de gravedad modificada $f(R)$ asi como de la dedución de la ecuación de campo en el entorno de las teorías $f(R)$.

Palabras clave: Relatividad general, gravedad $f(R)$, ecuaciones de Friedmann.

Friedmann equations in modified gravity theories $f(R)$

Abstract
In this work, the deduction of Friedmann's equations is presented in the context of modified gravity theories $f(R)$; it has been considered to present them as a function of the constant k associated with the curvature of the hypersurface. To deduce it, a revision of the Lagrangian formulation of General Relativity and the modified gravity theories $f(R)$ as well as the deduction of the field equation in the environment of the theories $f(R)$ is previously conducted.

Keywords: General relativy, $f(R)$ gravity, Friedmann equations.

Introducción

La relatividad General es una teoría gravitacional y una de las teorías más aceptadas en la actualidad debido a que describe, con precisión, fenómenos físicos macroscópicos [1]. Sin embargo, con el desarrollo de la cosmología moderna se han encontrado algunos fenómenos que no son explicados satisfactoriamente por la Relatividad General como: el problema de la planitud [2], el problema del horizonte [3],y entre otros, el problema del monopolo [4]. Por otro lado, la Teoría de supercuerdas y la teoría de Cosmología Cuántica hacen necesario el surgimiento de una teoría cuántica de la gravedad [5]. Para conseguir este cometido se han planteado una serie de teorías que buscan, unas, generalizar la Relatividad General, otras, modificarla. Es asi como surgen estudios y teorías alternativas de la gravitación como por ejemplo el de Utiyama [6] en 1962 y el de Stelle [7].

Las teorías para modificar la Relatividad General ha tenido mucho interés, en el ámbito científico, en los últimos tiempos; muchos de ellos impulsados por el descubrimiento de la expansión acelerada del Universo [8], de la materia oscura y de la energía oscura [9]. En el ámbito de la física teórica, la búsqueda de teorías modificadas de la gravedad tiene especial importancia para entender la naturaleza de la Relatividad General y para hacer una descripción adecuada de la gravedad cuántica [10].

Las teorías $f(R)$ se construyen mediante una generalización de la acción de Einstein-Hilbert, en la cual se reemplaza el escalar de curvatura o escalar de Ricci R por una función que dependa de R. Una consideración importante de las teorías $f(R)$ es que por medio de ellas se puede explicar la expansión acelerada del universo dentro del modelo cosmológico de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) sin la necesidad de considerar la existencia de campos relacionados con materia exótica. Las consecuencias de una generalización de ésta índole fueron consideradas inicialmente por H. Buchdahl [11].

[*] fvillegass@unmsm.edu.pe

Existen básicamente tres formas distintas de teorías $f(R)$ [12]. La primera forma, llamada forma estándar o métrica, consiste en variar la acción con respecto a la métrica. La segunda forma consiste en utilizar el formalismo de Palatini, en el cual se considera la conexión independiente de la métrica para luego tomar la variación respecto a la métrica y la conexión. La tercera forma es más general y se le conoce como la gravedad métrica-afin, en la cual se usa el método de Palatini sin considerar que la acción de la materia es independiente de la conexión. En este trabajo se considera solamente el formalismo métrico por ser más conún dentro de la literatura.

Formulación lagrangiana de la relatividad general

Una forma de determinar las ecuaciones de Einstein a partir del principio variacional consiste en tener una acción asociada al campo gravitacional. Esta formulación la desarrolló D. Hilbert en 1915 considerando una acción estacionaria S denominada acción de Einstein-Hilbert que en unidades naturales está dada por [13].

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}(R+2\Lambda) + S_M(g_{\mu\nu}+\psi), \tag{1}$$

donde S_M es la acción correspondiente a la materia, ψ denota los campos de materia y g es el determinate del tensor métrico $g_{\mu\nu}$, R el tensor de curvatura de Ricci y Λ la constante cosmológica. La acción y el tensor energía-momento [14] correspondiente a la materia vienen dados por

$$S_M = \int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}_M(g_{\mu\nu}+\psi), \tag{2}$$

$$T_{\mu\nu} = \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}}\frac{-2}{\sqrt{-g}}, \tag{3}$$

donde $\mathcal{L}_M$ es la densidad lagrangiana correspondiente a la materia.
Considerando la variacion de la acción, con respecto a la métrica, en la ecuación (1); se tiene

$$\delta S = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x(\delta\sqrt{-g}(R+2\Lambda) + \sqrt{-g}\delta R) + \delta S_M. \tag{4}$$

Usando la relación

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}, \tag{5}$$

reemplazando en (4) se obtiene

$$\delta S = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x[-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}(R+2\Lambda) + \sqrt{-g}\delta R] + \delta S_M. \tag{6}$$

Haciendo uso de la relación

$$\delta R = \delta((g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}, \tag{7}$$

y reemplazando en (6),la variación de la acción toma la forma

$$\delta S = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x + [\sqrt{-g}(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R+2\Lambda) + R_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}] + \delta S_M. \tag{8}$$

Teniendo presente que

$$\int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta(R_{\mu\nu}) = 0, \tag{9}$$

y además considerando la relación (3); la ecuación (8) toma la forma

$$\delta S = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\left[(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R+2\Lambda) + R_{\mu\nu}) + \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}}\frac{16\pi G}{\sqrt{-g}}\right]\delta g^{\mu\nu} \tag{10}$$

$$\delta S = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} - 8\pi G T_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu}. \tag{11}$$

por el principio de la acción estacionaria $\delta S = 0$ y debido a que el término $\delta g^{\mu\nu}$ es arbitrario, de la ecuación (11) se obtiene

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{12}$$

que es la ecuación de campo gravitacional de Einstein.

Ecuaciones de Friedmann

Las ecuaciones de Friedmann se basan en el modelo de un Universo homogéneo e isotrópico descrito por el modelo de FLRW representado por la siguiente métrica [15,16]

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2\operatorname{sen}^2\theta d\varphi^2\right], \tag{13}$$

donde $a(t)$ es el factor de escala y k es la curvatura del espacio. A partir de esta métrica se determinan las componentes temporal y espacial del escalar de Ricci, dados por [17]

$$R_{tt} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \tag{14}$$

$$R_{rr} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a} + 2k}{1-kr^2}, \tag{15}$$

el escalar de curvatura o de Ricci viene dado por [17]

$$R = 6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + (\frac{\dot{a}}{a})^2 + \frac{k}{a}\right], \tag{16}$$

y el tensor de energía-momento se define por [15]

$$T_{tt} = \rho,\, T_{ij} = g_{ij}p. \tag{17}$$

Usando la ecuación (12) con $\Lambda = 0$ se tiene para la parte temporal

$$R_{tt} - \frac{1}{2}g_{tt}R - \Lambda g_{tt} = 8\pi G T_{tt}, \tag{18}$$

usando la ecuación (13), obtenemos [8]

$$(\frac{\dot{a}}{a})^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho, \tag{19}$$

a esta ecuación se la conoce como la primera ecuación de Friedmann o la ecuación temporal de Friedmann. Similarmente, usando la ecuación (12) con $\Lambda = 0$ se tiene para la parte espacial

$$R_{rr} - \frac{1}{2}g_{rr}R - \Lambda g_{rr} = 8\pi G T_{rr}, \tag{20}$$

usando la ecuación (13), obtenemos

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -8\pi G p, \tag{21}$$

a esta ecuación se le denomina la segunda ecuación de Friedmann.

Teoría $f(R)$ de la gravedad

La teoría de la gravedad modificada $f(R)$ es una teoría alternativa a la Relatividad General y considera funciones no lineales del escalar de Ricci o escalar de curvatura R . La teoría de gravedad modificada $f(R)$ se obtiene mediante la generalización de la acción de Einstein-Hilbert, en la cual se sustituye el escalar de curvatura R de la ecuación de Einstein-Hilbert por una función de R denotada por $f(R)$ [18].
La acción (1) con $\Lambda = 0$ se reescribe como

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}f(R) + S_M(g_{\mu\nu}, \psi), \tag{22}$$

donde S_M es la densidad lagrangiana de materia.
Variando la acción respecto a la métrica, tenemos

$$\delta S = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\left[\delta(\sqrt{-g})f(R) + \sqrt{-g}\delta f(R)\right] + \delta S_M(g_{\mu\nu}, \psi). \tag{23}$$

El primer término se ha calculado en la ecuación (5). El segundo término se puede escribir como $\delta f(R) = f'(R)\delta R$ donde $f'(R) = df(R)/dR$, además considerando la relación (7) ; la variación de la acción resulta

$$\begin{aligned}\delta S &= \frac{-1}{16\pi G}\int d^4x[\sqrt{-g}(\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) - f'(R)R_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu} \\ &- \sqrt{-g}f'(R)g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}] + \delta S_M(g_{\mu\nu}, \psi).\end{aligned} \tag{24}$$

Analizando el término $\delta R\mu\nu$, se tiene que

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\rho\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \nabla_\nu\delta\Gamma^\rho_{\mu\rho}, \tag{25}$$

haciendo uso de las relaciones

$$\delta\Gamma^{\nu\mu}_{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}[\bigtriangledown_\nu\delta g_{\mu\lambda} + \bigtriangledown_\mu\delta g_{\nu\lambda} - \bigtriangledown_\lambda\delta g_{\nu\mu}], \tag{26}$$

$$\bigtriangledown_\rho \bigtriangledown \sigma X_{\mu\nu} - \bigtriangledown_\sigma \bigtriangledown \rho X_{\mu\nu} = -R^\eta_{\mu\rho\sigma}X_{\eta\nu} - R^\eta_{\nu\rho\sigma}X_{\mu\eta}, \tag{27}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}\delta R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\left[g^{\rho\sigma}(\bigtriangledown_\rho\bigtriangledown_\mu\delta g_{\nu\sigma} + \bigtriangledown_\sigma\bigtriangledown_\nu\delta g_{\mu\rho})\right] \\ &+ \frac{1}{2}\left[-g^{\rho\sigma}R^\alpha_{\mu\rho\nu}\delta g_{\alpha\sigma} - g^{\rho\sigma}R^\alpha_{\sigma\rho\nu}\delta g_{\mu\alpha} - \Box\delta g_{\mu\nu}\right] \\ &+ \frac{1}{2}\left[-g^{\rho\sigma}\bigtriangledown_\nu\bigtriangledown_\mu\delta g_{\rho\sigma} - g^{\rho\sigma}R^\alpha_{\mu\rho\alpha}\delta g_{\alpha\rho}\right] \\ &+ \frac{1}{2}\left[-g^{\rho\sigma}R^\alpha_{\rho\nu\sigma}\delta g_{\mu\alpha}\right],\end{aligned} \tag{28}$$

donde $\Box = \nabla_\mu\nabla^\mu$ es el operador de d'Alembert.
Haciendo uso de las siguientes relaciones

$$-g^{\rho\sigma}\nabla_\nu\nabla_\mu\delta g_{\rho\sigma} = g_{\rho\sigma}\nabla_\nu\nabla_\mu\delta g^{\rho\sigma}, \tag{29}$$

$$g^{\rho\sigma}R^\alpha_{\rho\nu\sigma}\delta g_{\mu\alpha} = -g^{\rho\sigma}R^\alpha_{\sigma\rho\nu}\delta g_{\mu\alpha}, \tag{30}$$

$$g^{\rho\sigma}R^\alpha_{\mu\rho\nu}\delta g_{\alpha\sigma} = -g^{\rho\sigma}R^\alpha_{\mu\nu\sigma}\delta g_{\alpha\rho}, \tag{31}$$

$$\delta g_{\alpha\beta} = -g_{\mu\beta}g_{\alpha\nu}\delta g^{\mu\nu}, \tag{32}$$

se escribe $\delta R_{\mu\nu}$ en función de $\delta g^{\alpha\beta}$, obteniendose la expresión

$$\begin{aligned}\delta R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\left[-\nabla_\alpha\nabla_\mu g_{\beta\nu}\delta g^{\alpha\beta} - \nabla_\alpha\nabla_\nu g_{\beta\mu}\delta g^{\alpha\beta}\right] \\ &+ \frac{1}{2}\left[\Box g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}\delta g^{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}\nabla_\nu\nabla_\mu\delta g^{\alpha\beta}\right].\end{aligned} \tag{33}$$

Entonces

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta}\Box\delta g^{\alpha\beta} - \nabla_\alpha\nabla_\beta\delta g^{\alpha\beta}. \tag{34}$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación (24), se obtiene

$$\begin{aligned}\delta S = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}[&-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}f(R) \\ &+ f'(R)(R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Box\delta g^{\mu\nu} \\ &- \nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu})] + \delta S_M.\end{aligned} \tag{35}$$

Integrando por partes el tercer y cuarto término de la expresión (35), obtenemos

$$\sqrt{-g}f'(R)g_{\mu\nu}\Box\delta g^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\Box f'(R)g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{36}$$

$$\sqrt{-g}f'(R)\nabla_\mu\nabla_\nu(\delta g^{\mu\nu}) = \sqrt{-g}\nabla_\mu\nabla_\nu(f'(R))\delta g^{\mu\nu}. \tag{37}$$

Sustituyendo las expresiones (3), (37) y (37) en la ecuación (35), obtenemos

$$\begin{aligned}\delta S = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}[&-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + f'(R)R_{\mu\nu} \\ &+ \Box(f'(R)g_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu(f'(R))) - 8\pi G T_{\mu\nu}]\delta g^{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{38}$$

Haciendo uso del principio de mínima acción $\delta S = 0$ y debido a que el término $\delta g^{\mu\nu}$ es arbitrario, se obtiene la relación

$$-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + f'(R)R_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu f'(R) + g_{\mu\nu}\Box f'(R) = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (39)$$

La relación (39) expresa la ecuacion de campo en el formalismo métrico $f(R)$.

Ecuaciones de Friedmann en Teorías $f(R)$

Para obtener las ecuaciones de Friedmann, en la teoría unificada $f(R)$, se considera la métrica de FLRW dada por la expresión (13) y la ecuación de la gravedad modificada $f(R)$ dada por la relación (39).

Cálculo del término temporal

Considerando la parte temporal en la ecuación (39).

$$f'(R)R_{tt} - \frac{1}{2}f(R)g_{tt} - \partial_t\partial_t f'(R) + g_{tt}\Box f'(R) = 8\pi G T_{tt}, \quad (40)$$

considerando la notación $\partial_t\partial_t f'(R) = \partial_t^2 f'(R) = \ddot{f}'(R)$, se obtiene

$$f'(R)R_{tt} - \frac{1}{2}f(R)g_{tt} - \partial_t^2 f'(R) + g_{tt}\Box f'(R) = 8\pi G T_{tt}. \quad (41)$$

Partiendo de la relación

$$\Box f'(R) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu f'(R)\right], \quad (42)$$

se obtiene

$$\Box f'(R) = -3\frac{\dot{a}}{a}\dot{f}'(R) - \ddot{f}'(R). \quad (43)$$

Por tanto

$$g_{tt}f'(R) = 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{f}'(R) + \ddot{f}'(R), \quad (44)$$

$$g_{tt}f'(R) = 3\frac{\dot{a}}{a}f''\dot{R} + \ddot{f}'(R), \quad (45)$$

donde $\partial_t R = \dot{R}$ y $\partial_r f(R) = f'(R)$.
Reemplazando en (41) las expresiones anteiores, se obtiene

$$f'(R)R_{tt} - \frac{1}{2}f(R)g_{tt} - \partial_t^2 f'(R) + 3\frac{\dot{a}}{a}f''\dot{R} + \ddot{f}'(R) = 8\pi G\rho. \quad (46)$$

Teniendo en cuenta la relacion (14), se tiene

$$-3\frac{\ddot{a}}{a}f'(R) + \frac{1}{2}f(R) + 3\frac{\dot{a}}{a}f''(R)\dot{R} = 8\pi G\rho, \quad (47)$$

dividiendo (47) por f'(R)

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{f(R)}{2f'(R)} + 3\frac{\dot{a}}{a}\frac{f''(R)\dot{R}}{f'(R)} = \frac{8\pi G\rho}{f'(R)}. \quad (48)$$

De la métrica de FLRW se tiene que

$$R = 6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + (\frac{\dot{a}}{a})^2 - \frac{k}{a^2}\right], \quad (49)$$

reemplazando en (48), se obtiene

$$-\frac{R}{2} + 3(\frac{\dot{a}}{a})^2 + \frac{3k}{a^2} + \frac{f(R)}{2f'(R)} + 3\frac{\dot{a}}{a}\frac{f''(R)\dot{R}}{f'(R)} = \frac{8\pi G\rho}{f'(R)}. \quad (50)$$

Teniendo en cuenta el parámetro de Hubble $H = \dot{a}/a$, se obtiene la siguiente relación

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{1}{3f'(R)}\left[k\rho + \frac{1}{2}(f(R) - Rf'(R)) - 3H\dot{R}f''(R)\right]. \quad (51)$$

La expresión (51) corresponde a la versión de la primera ecuacion de Friedmann en el contexto de las teorías $f(R)$.

Cálculo del término espacial

En la ecuación (39) se considera el término espacial, obteniéndose la expresión

$$f'(R)R_{rr} - \frac{1}{2}f(R)g_{rr} - \nabla_r\nabla_r f'(R) + g_{rr}\Box f'(R) = 8\pi G T_{rr}. \quad (52)$$

Usando el término g_{rr} correspondiente a la métrica de FLRW dada por la ecuación (13), se tiene que

$$g_{rr}\Box f'(R) = \frac{1}{1-kr^2}\left(-3a\dot{a}\dot{f}'(R) - a^2\ddot{f}'(R)\right). \quad (53)$$

Reemplazando (53) en (52), obtenemos

$$f'(R)R_{rr} - \frac{1}{2}f(R)g_{rr} - \nabla_r\nabla_r f'(R) - \frac{1}{1-kr^2}\left(3a\dot{a}\dot{f}'(R) + a^2\ddot{f}'(R)\right) = 8\pi G a^2 p. \quad (54)$$

Analizando el término $\nabla_r\nabla_r f'(R)$

$$\nabla_r\nabla_r f'(R) = \partial_r\partial_r f'(R) - \Gamma^\alpha_{rr}\partial_\alpha f'(R) = -\frac{a\dot{a}\dot{f}'(R)}{1-kr^2}. \quad (55)$$

Reemplazando (55) en la ecuación (54) se obtiene

$$f'(R)R_{rr} - \frac{1}{2}f(R)g_{rr} - \frac{1}{1-kr^2}\Big(2a\dot{a}\dot{f}'(R) + a^2\ddot{f}'(R)\Big) = 8\pi G a^2 p. \quad (56)$$

Haciendo uso de las relaciones

$$\dot{f}' = f''(R)\dot{R}, \quad (57)$$

$$\ddot{f}'(R) = f'''(R)(\dot{R})^2 + f''(R)\ddot{R}, \quad (58)$$

y reemplazándolas en (56) se encuentra que

$$f'(R)(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) - \frac{1}{2}f(R)a^2 - (2a\dot{a}f''(R)\dot{R} + a^2(f'''(R)(\dot{R})^2 + f''(R)\ddot{R})) = 8\pi G a^2 p, \quad (59)$$

dividiendo la expresión anterior por $a^2 f'(R)$ se obtiene

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2} - \frac{1}{2}\frac{f(R)}{f'(R)} - 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{f''(R)\dot{R}}{f'(R)} - \frac{f'''(R)\dot{R}^2}{f'(R)} + \frac{f''(R)\ddot{R}}{f'(R)} = 8\pi G\frac{p}{f'(R)}. \quad (60)$$

Haciendo uso de la relación

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - (\frac{\dot{a}}{a})^2 = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2, \quad (61)$$

donde H es el parámetro de Hubble y reemplazando en la ecuación (60) se encuentra que

$$2\dot{H} + 3H^2 + \frac{k}{a^2} = -\frac{1}{f'(R)}\Big[kp + 2H\dot{R}f''(R) + \frac{1}{2}(f(R) - Rf'(R)) + \ddot{R}f''(R) + \dot{R}^2 f'''(R)\Big]. \quad (62)$$

La expresión (62) compete a la versión de la segunda ecuación de Friedmann en el contexto de las teorías $f(R)$. Se verifica que las ecuaciones (51) y (62) reproducen las ecuaciones de Friedmann, en el contexto de Einstein-Hilbert, cuando se reemplaza $f(R) = R$.

Conclusiones

En este trabajo se ha mostrado la posibilidad de modificar el lagrangiano de la acción de Einstein-Hilbert que conduce a la obtención de la Relatividad General mediante una función del escalar de curvatura $f(R)$. De igual manera, se ha presentado un análisis acerca de las generalidades de la teoría $f(R)$, se ha deducido las ecuaciones de Friedmann en el contexto de la teoría $f(R)$ y se ha verificado que para el caso $f(R) = R$ se recupera las ecuaciones en el ámbito de la Relatividad general.
Observaciones astrofísicas recientes nos conducen a mostrar cierto interés en buscar modificaciones de la relatividad general. Una de las alternativas son las teorías de gravedad modificada $f(R)$ ya que permite plantear una serie de modelos en función del escalar de curvatura o escalar de Ricci R siendo un posible modelo para explicar la expansión acelerada del Universo.

Referencias

[1] G.M. Tinoa, L. Cacciapuoti, S. Capozzielloc, G. Lambiasee and F. Sorrentino. Precision gravity tests and the Einstein Equivalence Principle. Progress in Particle and Nuclear Physics, 112 (2020).

[2] W.H. Kinney, K. Tzirakis. Quantum modes in dbi inflation: exact solutions and constraints from vacuum selection. Physical Review D, v. 77, n. 10, p. 103517, (2008).

[3] M. Novello, S. D. Jorda. Does there exist a Cosmological horizon problem? Modern Physics Letters A, 04(19), 1809–1813, (1989).

[4] J. Alberto Vázquez, Luis E. Padilla and Tonatiuh Matos. Inflationary Cosmology: From Theory to Observations. *ArXiv preprint physics*/1810.09934, (2018).

[5] K. S. Stelle. String Theory, Unification and Quantum Gravity. Lecture Notes in Physics, 3–30. (2013).

[6] R. Utiyama and B. S. Dewitt. Renormalization of a classical gravitational field interacting with quantized matter fields. J. Math. Phys. 3, 608 (1962).

[7] K. S. Stelle. Renormalization of higher-derivative quantum gravity. Phys. Rev. D 16, 953, (1977).

[8] F. Villegas. La energía oscura en la cosmología estándar. Revista de Investigación de Física 24(2), (2021). Doi: https://doi.org/10.15381/rif.v24i2.20359

[9] V. Sahni. Dark matter and Dark energy. Lecture notes in Physics, 141-179 (2004).

[10] S.Capozziello, V. Faroni. Beyond Einstein gravity: A Survey of gravitational theories for cosmology and astrophysics. Springer Science & Business Media, v. 170, (2010).

[11] H. A. Buchdahl. Non-linear lagrangians and cosmological theory. Monthly Notices of the Royal Astro-

nomical Society, Oxford University Press Oxford, UK, v. 150, n. 1, p. 1–8, (1970).

[12] S. E. Perez Bergliaffa. Proceedings of the XIV Brazilian School of Cosmology and Gravitation. Cambridge University Press. (2010).

[13] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou, A. N. Lasenby. General relativity: an introduction for physicists. Cambridge University press, (2006).

[14] A. de la Cruz-Dombriz, A. Dobado and A. L. Maroto. Black Holes in $f(R)$ theories. *ArXiv preprint physics*/0907.3872, (2009).

[15] S. Carroll. Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity. Addison Wesley, (2004).

[16] F. Villegas. Espacio-tiempo de Schwarzschild con quinta esencia. Revista de Investigación de Física 24(2), (2021). Doi: https://doi.org/10.15381/rif.v24i2.20413

[17] F. Villegas. Formulación hamiltoniana de la métrica de Friedmann. Revista de Investigación de Física 21(2), (2018). Doi: https://doi.org/10.15381/rif.v21i2.20234

[18] A. De Felice, S.Tsujikawa. $f(R)$ theories. *ArXiv preprint physics*/1002.4928, (2010).