ARTÍCULO ORIGINAL

Revista de Investigación de Física **25(1)**, (Ene-Abr 2022)
**Doi:** 10.15381/rif.v25i1.21966

eISSN:1728-2977

# Agujeros negros en el espacio-tiempo anti-de Sitter $(AdS)$

Fulgencio Villegas *

*Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú*

Recibido 4 Ene 2022 – Aceptado 30 Mar 2022 – Publicado 04 Abr 2022

**Resumen**
Se determinará la métrica del espacio-tiempo $AdS$ y en base a ella se calculará la cosntante cosmológica en función del radio del espacio $AdS$, usando esta constante cosmológica se resolverán las ecuaciones de Einstein con el objetivo de encontrar una métrica en función de la coordenada radial del horizonte de eventos, luego se calcularán algunas propiedades termodinámicas de los agujeros negros en el espacio-tiempo $AdS$ como temperatura, área y entropía.

**Palabras clave**: Agujeros negros, anti de Sitter, temperatura de Hawking.

## Black holes in anti-de Sitter $(AdS)$ spacetime

**Abstract**
The space-time metric $AdS$ will be determined and based on it the cosmological constant will be calculated as a function of the radius of the space $AdS$, using this cosmological constant the Einstein equations will be solved in order to find a metric based on from the radial coordinate of the event horizon, then some thermodynamic properties of black holes in spacetime $AdS$ such as temperature, area and entropy will be calculated.

**Keywords**: Black holes, anti de Sitter, Hawking temperature.

## Introducción

La relatividad general es una teoría gravitacional y una de las mas estudiadas y mejor comprendidas. Esta teoría fue enunciada en 1915 por Albert Einstein [1] e inmediatamente cambió la perspectiva del espacio y del tiempo. La relatividad general describe a la gravedad como una propiedad geométrica no solo del espacio, sino también del tiempo. La relatividad general se sustenta en la ecuación de Einstein, que relaciona la curvatura geométrica del espacio-tiempo con la materia o energía [2].

El espacio-tiempo de Sitter $(dS)$ [3] y Anti de Sitter $(AdS)$ [4] son soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein en ausencia de materia o energía. Por un lado, el espacio de Sitter considera una constante cosmológica $(\Lambda)$ positiva; por lo tanto, cumple un papel fundamental en la cosmología moderna aproximándose al fenómeno de expansión exponencial del universo primordial en la época de inflación [5]. Tambien se considera un modelo de referencia ante el fenómeno de expansión acelerada del universo [6]. Por otro lado, el espacio-tiempo anti-De Sitter considera una constante cosmológica negativa, y es un componente fundamental en la formulación de la conjetura de $AdS/CFT$ [7]. El estudio del espacio-tiempo AdS es de mucha importancia ya que se presenta como un laboratorio interesante para el estudio de los agujeros negros de forma no asintótica [8].

La correspondencia $AdS/CFT$ es una dualidad que relaciona la teoría cuántica de campos $(QFT)$ y la gravedad, es decir el espacio-tiempo AdS es una teoría clásica de la gravedad; mientras que la teoría conforme es una teoría cuántica. Por tanto, la correspondencia $AdS/CFT$ es de mucha importancia ya que puede ser una posibilidad para cuantizar la gravedad.

## Ecuaciones de campo de Einstein

Las ecuaciones de campo de Einstein pueden ser derivadas a partir del formalismo lagrangiano el cual se basa

*fvillegass@unmsm.edu.pe

en el principio de mínima acción. A partir del cálculo variacional se relaciona la acción la acción con el campo gravitacional; ademas se sabe que para el mínimo dicha acción debe ser estacionaria. Esta proposición viene representada por

$$\delta S = 0. \tag{1}$$

La acción para la relatividad general fue formulada por Hilbert en 1915 y se denomina acción de Einstein-Hilbert, la cual esta dada por [9]

$$S_G = \frac{1}{2k}\int_M \mathcal{L}(g_\mu \nu)\sqrt{-g}d^4x, \tag{2}$$

donde $M$ es el espacio-tiempo que es cubierto en su totalidad por la integral; $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico con determinante $g$; y $k$ es una constante que se elige de tal manera que el límite de campo débil reproduzca la gravedad newtoniana.

Proponiendo una densidad lagrangiana definida como

$$\mathcal{L}(g_\mu \nu) = R + 2\Lambda, \tag{3}$$

donde $R$ es el escalar de Ricci y $\Lambda$ es la constante cosmológica.Por lo tanto, la acción viene dada por

$$S_G = \frac{1}{2k}\int_M (R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{-g} + 2\Lambda\sqrt{-g})d^4x. \tag{4}$$

Considerando la variación de la acción respecto de la métrica, la ecuación (4) resulta

$$\delta S_G = \frac{1}{2k}\int_M \left[\delta(R_{\mu\nu})g^{\mu\nu}\sqrt{-g} + R_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}) \right. \\ \left. + 2\Lambda\delta\sqrt{-g}\right] d^4x. \tag{5}$$

Teniendo en cuenta las siguientes relaciones

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \tag{6}$$

$$\int_M \delta(R_{\mu\nu})g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x = 0. \tag{7}$$

Reemplazando las ecuaciones (6) y (7) en (5) obtenemos

$$\delta S_G = \frac{1}{2k}\int (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu})\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}d^4x. \tag{8}$$

Esta integral es nula para cualquier variación $\delta g^{\mu\nu}$. Esto indica que el integrando es cero, por lo tanto se deduce que [10]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = 0. \tag{9}$$

Estas son las ecuaciones de Einstein en el vacío. Para un espacio-tiempo con presencia de materia o energía se puede demostrar que las ecuaciones de Einstein toman la siguiente forma [11]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{10}$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento.

## Espacio-tiempo de de Sitter

El espacio-tiempo de de Sitter es una solución local de las ecuaciones de campo de Einstein, fue planteado por Wilhem de Sitter en 1917 considerando un Universo sin masa y con constante cosmológica positiva, por lo tanto, es uno de los primeros modelos cosmológicos que indica la expansión del Universo.

El espacio-tiempo de de Sitter viene definido por la siguiente métrica [12]

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)dt^2 + \left(\frac{1}{1 - \frac{\Lambda r^2}{3}}\right)dr^2 \\ + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2, \tag{11}$$

La expresión (11) se conoce como la métrica de de Sitter en coordenadas estáticas y no representa una solución geodésicamente completa, es decir, esta solución no representa toda la variedad.
Para construir la solución global vamos a considerar una variedad tetradimensional $V$ en $R^5$ que satisface la siguiente expresión

$$-(X^0)^2 + (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 + (X^4)^2 = L^2, \tag{12}$$

dende $V$ es un hiper hiperboloide tetradimensional en $R^5$.

Considerando la siguiente parametrización

$$\begin{aligned} X^i &= L\cosh\frac{\tau}{L}\xi^i, \quad i = 1,2,3,4 \\ X^0 &= L\operatorname{senh}\frac{\tau}{L}, \end{aligned} \tag{13}$$

donde $\xi^i$ es la parametrización espacial de la 3-esfera para $X^0$ constante.

Con estas variables se construye la métrica, la cual tiene la siguiente forma

$$ds^2 = -d\tau^2 + L^2\cosh^2(\frac{\tau}{L})d\Omega_3^2, \tag{14}$$

donde $d\Omega_3^2$ es el diferencial de volúmen de la 3-esfera.
La ecuación (14) es una métrica lorentziana válida para el vacío y con constante cosmológica positiva.

## El espacio-tiempo de Anti-de Sitter ($AdS$)

El espacio-tiempo $AdS$ es una solución de las ecuaciones de campo de Einstein en ausencia de materia y considerando una constante cosmológica negativa; en términos más específicos podriamos decir que es una solución máximamente simétrica. Entendiéndose por espacio máximamente simétrico aquel que presenta un máximo número de isometrías, lo que es lo mismo decir que este espacio presenta el máximo número de vectores de Killing.
El espacio-tiempo $AdS$ en $(d+1)$ dimensiones se puede definir geométricamente como un tipo de hiper hiperboloide en $(d+2)$ dimensiones, que satisface el elemento de línea dado por

$$ds^2 = -dX_0^2 - dX_{d+1}^2 + \sum_{i=1}^{d} dX_i^2. \tag{15}$$

Siendo el hiper hiperboloide de la forma

$$-X_0^2 - X_{d+1}^2 + \sum_{i=1}^{d} X_i^2 = -L^2, \tag{16}$$

donde $L$ es el radio del espacio $AdS$.

Un tipo de coordenadas que cubre completamente el espacio-tiempo $AdS$ viene dadas por las coordenadas globales

$$\begin{aligned} X_{d+1} &= L\cosh\rho \operatorname{sen}\tau, \\ X_i &= L\Omega_i \operatorname{sen}\rho, \\ X_0 &= L\cosh\rho\cos\tau, \end{aligned} \tag{17}$$

donde $i = 1, ..., d$.
De esta manera, el elemento de línea (15) viene dado por

$$ds^2 = L^2(-\cosh^2\rho d\tau^2 + d\rho^2 + \operatorname{senh}^2\rho d\Omega_{d-1}^2), \tag{18}$$

donde $d\Omega_{d-1}^2$ es la métrica en $S^{d-1}$.
Haciendo la siguiente transformación de coordenadas: $r = L\ senh\rho$ y $t = L\tau$; es posible obtener una métrica equivalente a (18) en coordenadas globales, para $AdS_{d+1}$, de la forma [13]

$$ds^2 = -(1+\frac{r^2}{L^2})dt^2 + (1+\frac{r^2}{L^2})^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2. \tag{19}$$

Otro tipo de transformación se puede hacer mediante las coordenadas de Poincaré llamadas también parche de Poincaré, las cuales están dadas por

$$\begin{aligned} X_{-1} &= \frac{Z}{1}\left(1 + \frac{1}{Z^2}(1 + x^i x^i - t^2)\right), \\ X_0 &= \frac{L}{z}t, X^i = \frac{L}{z}x^i, \\ X_d &= \frac{Z}{1}\left(1 - \frac{1}{Z^2}(1 + x^i x^i - t^2)\right), \end{aligned} \tag{20}$$

donde: i=1,...,d.
Entonces el elemento de línea de $AdS$ en $(d+1)$ dimensiones lo podemos escribir del siguiente modo

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2}(\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dz^2). \tag{21}$$

La métrica anterior también puede escribirse en forma explícita de la siguiente manera

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2}\left(-dt^2 + dz^2 + \sum_{i=1}^{d-1} dx_i^2\right), \tag{22}$$

donde $z$ son conocidas como coordenadas holográficas.

Haciendo uso de la ecuación de Einstein para la Relatividad General con $d+1$ dimensiones calcularemos la condición que debe cumplir $\Lambda$ para que AdS sea una solución de la ecuación de Einstein. Para los espacios máximamente simétricos el tensor de Riemann podemos escribirlo como

$$R_{abcd} = k(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}), \tag{23}$$

donde $k$ es una constante que es función del escalar de curvatura y para el espacio AdS consideramos $k = -1/L^2$, siendo $L$ el radio del espacio $AdS$. El tensor de Ricci viene dado por $R_{ac} = g^{bd}R_{abcd}$, de donde obtenemos que

$$R_{ac} = -\frac{1}{L^2}(d)g_{ac}, \tag{24}$$

siendo $d+1$ el número de dimensiones del espacio AdS.
El escalar de Ricci o escalar de curvatura viene dado por [14]

$$R = g^{ac}R_{ac} = -\frac{d(d+1)}{L^2}. \tag{25}$$

Reemplazando las ecuaciones (24) y (25) en la ecuación (9), se tiene

$$\begin{aligned} -\frac{1}{L^2}(d)g_{ac} + \frac{1}{2}g_{ac}\frac{d(d+1)}{L^2} + \Lambda g_{ac} = 0, \\ \frac{(d)}{L^2}g_{ac}\left(-1 + \frac{d+1}{2}\right) = -\Lambda g_{ac}, \end{aligned}$$

de donde obtenemos que

$$\Lambda = -\frac{(d)(d-1)}{2L^2}, \tag{26}$$

esta relación es la condición que debe satisfacer $\Lambda$ para que $AdS$ sea una solución de la ecuación de Einstein.

## Agujeros negros en el espacio-tiempo AdS

La teoría de la relatividad general de Einstein relaciona la curvatura geométrica del espacio-tiempo con la materia. Un año después que Einstein publicó su teoría Karl Schwarzschild propuso una solución, esféricamente simétrica y en el vacío, a las ecuaciones de campo de Einstein. Asume que la carga eléctrica y el momento angular del objeto central es nula y que la constante cosmológica desaparece. La solución de Schwarzschild presenta una singularidad irremobible conocida como el agujero negro de Schwarzschild. Posteriormente a la solución de Schwarzschild se presentó una solución más general conocida como la métrica de Reissner-Nordströ̈m; la cual depende, no solo de la masa, sino de la carga eléctrica del objeto. Esta solución también presenta la existencia de un agujero negro estático y esféricamente simétrico. Una solución más general a la ecuación de campo de Einstein es la solución de Kerr; la cual describe el campo gravitacional de un objeto en rotación. La solución de Kerr extendida para agujeros negros cargados se conoce como la solución de Kerr- Newman.
La solución de Schwarzschild es un buen modelo para describir el campo gravitatorio causado por cuerpos masivos con simetría esférica como planetas y estrellas; su métrica se obtiene al resolver las ecuaciones de campo de Einstein, siendo su expresión más común la siguiente

$$ds^2 = -(1-\frac{2m}{r})dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}} + r^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2), \tag{27}$$

donde $m$ es una constante que está relacionada con la masa del cuerpo que genera campo gravitatorio.
La métrica de Schwarzschild es la solución de agujero negro más simple para la ecuación de Einstein. Las coordenadas de Schwarzschild presentan dos singularidades: $r=0$ y $r=2m$; sin embargo, si se calculan las componentes del tensor de Riemann se encuentra que para $r=0$ no están bien definidas, mientras que para $r=2m$ si lo están. Esto indica que la singularidad asociada al valor $r=2m$ es ficticia, denominada como singularidad removible, mientras que para el valor $r=0$ es una singularidad esencial. La elección de coordenadas adecuadas puede hacer desaparecer la singularidad en $r=2m$ . Sin embargo, en la definición de las coordenadas que elegimos, la singularidad corresponde al horizonte de eventos. Es decir: $r_{horizonte}=2m$.

Para estudiar los agujeros negros en el espacio-tiempo $AdS$ es necesario encontrar una métrica que nos permita analizar su existencia. Pariendo de la acción de Hilbert en $(d+1)$ dimensiones

$$S = \frac{1}{16\pi G^{d+1}} \int d^dx\sqrt{-g}\left[R + \frac{d(d+1)}{L^2}\right], \tag{28}$$

donde $R$ es el escalar de Ricci, $l$ es el radio del espacio-tiempo $AdS$ y en el segundo término de la acción se ha introducido el valor de la constante cosmológica dado por la ecuación (26).
Resolviendo la ecuación de Eintein en el vació, se obtiene la siguiente métrica

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2}\left[-f(z)dt^2 + \frac{dz^2}{f(z)} + dr^2 + r^2 d\Omega^2_{d-2}\right], \tag{29}$$

donde $f(z)$ es una función de la coordenada holográfica $z$.

La métrica anterior (29) se puede escribir en forma equivalente mediante el uso de las coordenadas de Poincaré $(t, z, x^i)$, presentando la siguiente forma [15]

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2}\left[-\left(1-\frac{z^d}{z_h^d}\right)dt^2 + \frac{dz^2}{1-\frac{z^d}{z_h^d}} + \sum_{i=0}^{d-1} dx_i^2\right], \tag{30}$$

donde $z_h$ es el radio vector o coordenada radial del horizonte plano del agujero negro. Notamos la similitud de la ecuación (30) con la métrica de Schwarzschild dada por (27).

Ahora calcularemos algunas propiedades termodinámicas de los agujeros negros en el espacio-tiempo $AdS$. Consideremos una métrica de la forma

$$ds^2 = g(r)\left[f(r)dt^2 + \sum_{i=0}^{d-1} dx_i^2\right] + \frac{1}{h(r)}dr^2. \tag{31}$$

La temperaruta $T$ de Hawking viene dada por [16]

$$T = \frac{\sqrt{g(r_h)f'(r_h)h'(r_h)}}{4\pi}, \tag{32}$$

donde $r=r_h$ es la posición del horizonte de eventos.
Para la métrica (30) tenemos

$$f(z) = 1-\frac{z^d}{z_h^d}, \quad g(z) = \frac{l^2}{z^2}, \quad h(z) = \frac{z^2}{L^2}f(z), \tag{33}$$

de donde tenemos que

$$f'(z_h) = -\frac{d}{z_h}, \qquad h'(z_h) = -\frac{dz_h}{L^2}, \tag{34}$$

reemplazando en (32) obtenemos

$$T = \frac{d}{4\pi Z_h}. \tag{35}$$

El área del horizonte de eventos viene dado por

$$A_h = \left(\frac{L}{z_h}\right)^{d-1}\int \prod_i^{d-1} dx^i, \tag{36}$$

$$A_h = \left(\frac{L}{z_h}\right)^{d-1} V_{d-1}, \tag{37}$$

donde $V_{d-1}$ viene a ser el volúmen a lo largo de las direcciones especiales de Minkowski.
Haciendo uso de la ecuación (35) se puede escribir el área del horizonte de eventos en función de la temperatura, obteniendose

$$A_h = \left(\frac{4\pi LT}{d}\right)^{d-1} V_{d-1}. \tag{38}$$

La entropía viene dada por la fórmula de Bekenstein-Hawking

$$S = \frac{A_h}{4G_{d+1}}, \tag{39}$$

$$S = \frac{1}{4G_{d+1}}\left(\frac{4\pi LT}{d}\right)^{d-1} V_{d-1}, \tag{40}$$

siendo su densidad de entropía

$$s = \frac{S}{V_{d-1}} = \frac{1}{4G_{d+1}}\left(\frac{4\pi LT}{d}\right)^{d-1}. \tag{41}$$

## Conclusiones

Se ha realizado, en primera instancia, un estudio del espacio- tiempo $dS$, partiendo de la métrica en coordenadas estáticas y considerando una variedad tetradimensoional se determina una métrica con caracteristicas globales, es decir, que cubra toda la variedad. Seguidamente se analiza el espacio-tiempo $AdS$ y se determina su métrica en coordenadas globales, mediante el uso de las coordenas de Pöincaré se determina una métrica en función de las coordenadas holográficas, luego, mediante el uso de las ecuaciones de Einstein se calcula el escalar de Ricci y la constante cosmológica en función del radio del espacio $AdS$. Finalmente, se resuelve la ecuación de Einstein considerando la constante cosmológica del espacio $AdS$ y se determina una métrica en función de las coordenadas holográficas y del radio vector o posición del horizonte de eventos del agujero negro. Por lo tanto se determina la existencia de agujeros negros en el espacio $AdS$. Cabe resaltar que la métrica del espacio-tiempo $AdS$ presenta una similitud con la métrica de Schwarzschild. Luego se calcula la temperatura, el área del horizonte de eventos y la entropía del agujero negro en el espacio-tiempo $AdS$, encontrándose que la temperatura es inversamente proporcional al radio vector o posición del horizonte de eventos, mientras que el área y la entropía son directamente proporcionales a la temperatura.

---

## Referencias


[1] A. Einstein, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., (1915) 778 [Addendum ibid., (1915) 799]; Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., (1915) 844 [English translations in *"The collected papers of Albert Einstein. Vol. 6"* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1997) pp. 98-107, 108-110, 117-120].

[2] A. A. Coley and D. L. Wiltshire. *What is general relativity?*. Phys. Scr. **92** 053001, (2017).

[3] Y. Kim, C. Young Oh, N. Park. *Classical Geometry of De Sitter Spacetime : An Introductory Review.* arXiv preprint physics/0212326v1, (2002).

[4] I. Bengtsson, P. Sandin. *Anti-de Sitter space, squashed and stretched.* arXiv preprint physics/0509076v2, (2005).

[5] N. G. Sanchez. *New quantum phase of the Universe before inflation and its cosmological and dark energy implications* Int. J. Mod. Phys. A **34** 1950155 (2019).

[6] S. Bahamonde, M. Marciu, P. Rudra. *Dynamical system analysis of generalized energy-momentum-squared gravity* Phys. Rev. D **100**, 083511 (2019).

[7] J. Maldacena. *The Large-N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity.* Int. Jour. Theor. Phys. **38**, 1113-1133 (1998).

[8] S. Hawking and D. Page. *Thermodynamics of Black Holes in Anti- de Sitter Space.* Comm. Math. Phys. **87**, 577-588 (1983).

[9] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou, A. N. Lasenby. General relativity: an introduction for physicists. Cambridge University press, (2006).

[10] L. Ryder. *Introduction to General Relativity.* Cambridge University press, (2009).

[11] F. Villegas. *Ecuaciones de Friedmann en las teorías de gravedad modicada $f(R)$.* Revista de Investigación de Física **24(3)**,(2021). Doi: https://doi.org/10.15381/rif.v24i3.21161

[12] K. Takizawa, H. Asada. *Gravitational lens on de-Sitter background.* arXiv preprint physics/2112.00311v1, (2021).

[13] M. Natsuume. *AdS/CFT Duality User Guide*,Springer-Verlag, Lecture Notes in Physics 903, (2015).

[14] S. M. Carroll *Spacetime and Geometry, An Introduction to General Relativity*. Pearson (Addison-Wesley), (2004)

[15] J. Bhattacharya, M. Nozaki, T. Takayanagi and T. Ugajin. *Thermodynamical Property of Entanglement Entropy for Excited States*. Phys. Rev. Lett. **110**, (2013).

[16] A. V. Ramallo. *Introduction to the AdS/CFT correspondence*. arXiv preprint physics/1310.4319v3, (2013).