ARTÍCULO ORIGINAL

Revista de Investigación de Física **25(2)**, (May-Ago 2022)

Doi: 10.15381/rif.v25i2.22926

eISSN:1728-2977

Solución alternativa para la ecuación dinámica de la cuerda bosónica

Richard Huamani[1] y Fulgencio Villegas [*1]

[1] *Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú*

Recibido 1 Jun 2022 – Aceptado 8 Jul 2022 – Publicado 1 Ago 2022

Resumen

En este artículo, inicialmente, se realiza una revisión de algunos aspectos clásicos de la teoría de cuerdas bosónicas. Además se analiza las coordenadas cono de luz, como un método de cuantización covariante relacionado dichas coordenadas con las coordenadas propias mediante una transformación apropiada. Este trabajo tiene como objetivo mostrar un camino alternativo para deducir las soluciones de la ecuación dinámica de la cuerda. Para ello, se comienza transformando las coordenadas cono de luz por medio de un parámetro variable arbitrario y que al aplicarlo a la acción de Polyakov conduce a soluciones equivalentes a las deducidas mediante el método de las series de Fourier.

Palabras clave: Teoría de cuerdas, acción de Polyakov, coordenadas cono de luz.

Alternative solution for the bosonic string dynamic equation

Abstract

In this article, initially, a review of some classical aspects of bosonic string theory is made. In addition, the light cone coordinates are analyzed, as a covariant quantization method related to these coordinates with the proper coordinates through an appropriate transformation. This work aims to show an alternative way to deduce the solutions of string dynamic equation. For that, it starts transforming the light-cone coordinates by means of an arbitrary variable parameter, and by applying it into the Polyakov's action leads to equivalent solutions to the ones obtained using Fourier's series method.

Keywords: String theory, Polyakov action, light-cone coordinates.

Introducción

La teoría de cuerdas es una teoría cuántica de campos, donde las partículas son reemplazadas por objetos unidimensionales infinitesimales cuya longitud es proporcional a la longitud de Plank (10^{-33}cm), donde los modos vibracionales o modos de Fourier son interpretados como diferentes partículas [1].

Una cuerda cuando se desplaza en el espacio-tiempo traza una superficie bidimencional (hoja de mundo) descrita por dos parámetros $\xi^\alpha = (c\tau, \sigma)[\xi_\alpha = (-c\tau, \sigma)]$ con $\xi^0 = -\xi_0 = c\tau$ y $\xi^1 = \xi_1 = \sigma$, donde τ es una coordenada temporal, σ una coordenada espacial, y c es la velocidad de la luz. A medida que τ varía, la cuerda describe la hoja de mundo en la que muchas de sus propiedades son descritas mediante la teoría conforme de campos [2]. Mapeándose dichas coordenadas en el espacio-tiempo, se observa que existe un campo bosónico libre descrito por $x^\mu = x^\mu(\tau, \sigma)$.

La acción de la cuerda está dada por la acción de Nambu-Goto [3]

$$S_{NG} = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{(\dot{x}.x')^2 + \dot{x}^2.x'^2}, \tag{1}$$

el cual describe la dinámica de la cuerda relativista.

La acción de Nambu-Goto resulta inconveniente cuando se quiere cuantizar la cuerda, de modo que para salvar este incoveniente empleamos la métrica intrínseca $h_{\alpha\beta}$ en la hoja de mundo, siendo de esta manera posible definir la acción de Polyakov (S_P) [4], el cual es equivalente a la acción de Nambu-Goto. La acción adopta la forma [5]

$$S_P = -\frac{T}{2} \int d^2\xi \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu \eta_{\mu\nu}. \tag{2}$$

*fvillegass@unmsm.edu.pe

En el espacio de Minkowski la acción de Polyakov presenta tres simetrias: invariancia ante las transformaciones de Weyl, Poincaré y las reparametrizaciones. Considerando estas simetrias se pueden fijar las componentes de la métrica plana dada por [6]

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

con $h = \det(h_{\alpha\beta})$. Aplicando la métrica plana, la acción de Polyakov se reduce para

$$S_P = \frac{T}{2}\int d^2\xi(\dot{x}^2 - x^{'2}). \tag{4}$$

A partir de esta acción se deducen las ecuaciones dinámicas de la cuerda bosónica

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\Big)x^\mu = 0. \tag{5}$$

Coordenadas cono de luz

El sistema coordenado cono de luz es otro método empleado en la cuantización de la cuerda bosónica. La cuantización cono de luz es similar a la cuantización covariante, donde los corchetes de Poisson y los campos son reemplazados por conmutadores y operadores, respectivamente. Estas coordenadas resultan convenientes, puesto que simplifican la forma de escribir la acción y las ecuaciones dinámicas. Estas coordenadas se definen como [7, 8]

$$\varepsilon^\pm = c\tau \pm \sigma. \tag{6}$$

De igual modo, la métrica hoja de mundo $h_{\alpha\beta}$ se reescribe como g_{mn}, y cuyas componentes son

$$g_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Las derivadas parciales en coordenadas cono de luz son definidas de la siguiente manera

$$\partial_\pm = \frac{1}{2}(\partial_\tau \pm \partial_\sigma). \tag{8}$$

Reescribiendo la acción de Polyakov en términos de las coordenadas cono de luz, se reduce a

$$S_P = 2T\int d^2\xi\eta_{\mu\nu}\partial_+ x^\mu \partial_- x^\nu. \tag{9}$$

Cuando esta acción varía (en realidad el lagrangiano explícito con respecto a x^μ), conduce a la ecuación de onda de la cuerda bosónica

$$\partial_+\partial_- x^\mu = 0 \tag{10}$$

o

$$\partial_-\partial_+ x^\mu = 0, \tag{11}$$

los cuales dependen del orden de la posición en que se apliquen las ecuaciones (5) y (8), por lo que ambos son equivalentes.

Por otro lado, la ecuación de onda de la cuerda es escrita como la superposición de dos soluciones, derecha (x^μ_R) e izquierda (x^μ_L), tal como sigue

$$x^\mu(\tau,\sigma) = x^\mu_L(c\tau+\sigma) + x^\mu_R(c\tau-\sigma). \tag{12}$$

Expandiendo las soluciones en modos de Fourier [7, 9], se derivan

$$\begin{aligned} x^\mu_R(c\tau-\sigma) &= \frac{1}{2}x^\mu_0 + \frac{1}{2\pi T}p^\mu(c\tau-\sigma) + \frac{i}{\sqrt{4\pi T}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha^\mu_n e^{-in(c\tau-\sigma)}, \\ x^\mu_L(c\tau+\sigma) &= \frac{1}{2}x^\mu_0 + \frac{1}{2\pi T}p^\mu(c\tau+\sigma) + \frac{i}{\sqrt{4\pi T}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\tilde{\alpha}^\mu_n e^{-in(c\tau+\sigma)}. \end{aligned} \tag{13}$$

Substituyendo la ecuación (13) en la ecuación (12), se deduce la ecuación de movimiento de la cuerda bosónica

$$x^\mu(\tau,\sigma) = x^\mu_o + \frac{1}{\pi T}p^\mu c\tau + \frac{1}{\sqrt{4\pi T}}\sum_{n\neq 0}\frac{i}{n}\Big[\alpha^\mu_n e^{in\sigma} + \tilde{\alpha}^\mu_n e^{-in\sigma}\Big]e^{-inc\tau}. \tag{14}$$

Transformación lineal paramétrica entre las coordenadas cono de luz y propias

Como se indicó en la sección anterior, las coordenadas cono de luz están relacionadas con las coordenadas propias (τ,σ) mediante la ecuación (6). Para nuestro análisis se considera una transformación apropiada y particular entre dichas coordenadas, el cual toma la forma

$$\begin{aligned} c\tau &= \frac{1}{2}\big(\varepsilon^+ + \varepsilon^-\big) \pm z, \\ \sigma &= \frac{1}{2}\big(\varepsilon^+ - \varepsilon^-\big) \mp z, \end{aligned} \tag{15}$$

donde z es un parámetro arbitrario, variable, y dependiente de las coordenadas propias (τ,σ) e independiente de las coordenadas cono de luz (explícitamente), es decir $z = z(\tau,\sigma) \neq z(\varepsilon^+,\varepsilon^-)$. Los signos $[+,-][(-,+)]z$ implican que el parámetro z puede ser incluido de ambas formas sin afectar la naturaleza de la transformacion. Además, se debe dejar en claro que el fundamento de esta transformación es en principio matemático (este hecho no afecta la interpretación física de los resultados). Los resultados derivados serán un indicativo de la viabilidad y compatibilidad de esta transformación con el sistema físico estudiado.

De igual manera, el objetivo también es observar el comportamiento que genera este nuevo parámetro sobre todas las ecuaciones dinámicas de la cuerda bosónica, y de ese modo relacionarlos con los resultados de la ecuación (14) obtenidas por métodos convencionales [10]

Luego, imponiendo las siguientes características al parámetro z_n :

$$z^\alpha = (z,z) = z_\alpha, \quad \alpha = (0,1), \tag{16}$$

implicando

$$\frac{\partial}{\partial z^\alpha} = \frac{\partial}{\partial z_\alpha} = \partial_z. \tag{17}$$

Estas características son viables, puesto que z es un parámetro simple y arbitrario.

Por otro lado, reemplazando la ecuación (15) en el elemento de superficie $S^2 = \xi_\alpha \xi^\alpha$ [11], se obtiene

$$S^2 = -\frac{1}{2}(\varepsilon^+\varepsilon^- + \varepsilon^-\varepsilon^+) - \{\varepsilon^\pm, z\}, \tag{18}$$

Expandiendo S en funcion de ε^+ y ε^- en su forma matricial $S^2 = g_{mn}\varepsilon^m\varepsilon^n$, donde $(m;n) = (+,-;+,-)$, y comparándola termino a termino con la ecuación (18), se deriva

$$g_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \{\varepsilon^\pm, z\} = 0. \tag{19}$$

El primer resultado de la expresión (19) implica claramente que la métrica de las coordenadas cono de luz g^{mn} permanece invariante bajo esta transformación lineal que fue impuesta; es decir, el parámetro z no altera el aspecto físico del sistema. El segundo resultado de la ecuación (19) está relacionado con la naturaleza del parámetro, y puede interpretarse como el ordenamiento de las coordenadas (el orden en las coordenadas cono de luz es vital para la obtención de las ecuaciones dinámicas de la cuerda [8]). Según se observa, la forma que tiene es anticonmutativo (similar al ordenamiento normal en los operadores fermiónicos). Este resultado indica la importancia del ordenamiento de los parámetros. Para simplicar, solo se considera la transformación $[+,-]z$ en la ecuación (15), sin perder generalidad.

Empleando las ecuaciones (15), (17) y (19) en la ecuación (8), se deducen las derivadas covariantes explícitas en función del parámetro z

$$\begin{aligned} \partial_+ &= \frac{1}{2}\big(\partial_\tau + \partial_\sigma\big) + \frac{1}{4}\partial_z, \\ \partial_- &= \frac{1}{2}\big(\partial_\tau - \partial_\sigma\big). \end{aligned} \tag{20}$$

Reemplazando la ecuación (20) en la ecuación (5) se deriva la ecuación de movimiento modificada de la cuerda en función del parámetro z, el cual está dado por

$$4\partial_-\partial_+ x^\mu - \partial_-\partial_z x^\mu = 0. \tag{21}$$

De este resultado se nota que la ecuación de onda no es invariante, pues surge un término que involucra al parámetro z, tal como era esperado. Además, el primer término no es más que la ecuación de la cuerda sin el parámetro $(z = 0)$; el cual es conveniente, ya que puede ser usado para simplificar la expresión (21) sin alterar el sistema físico. De esta manera, la relación final de la ecuación (21) dependerá solamente del parámetro z, y ello implicará que la posición x^μ dependa explícitamente del parámetro z.
Entonces, considerando

$$\partial_-\partial_+ x^\mu = 0, \tag{22}$$

se obtiene

$$\partial_-\big(\partial_z x^\mu\big) = 0. \tag{23}$$

Integrando dos veces se deriva

$$x^\mu_n(\tau,\sigma) = \mathscr{K}_0{}^\mu z(\tau,\sigma) + \mathscr{K}_1{}^\mu. \tag{24}$$

Esta expresión indica la posición de la cuerda bosónica dependiendo explícitamente de z, y con $[\mathscr{K}_0{}^\mu \neq \mathscr{K}_0{}^\mu(\varepsilon^+,\varepsilon^-)$ y $\mathscr{K}_1{}^\mu \neq \mathscr{K}_1{}^\mu(\varepsilon^+,\varepsilon^-)]$ siendo constantes de movimiento. Además, el último término tiene una particularidad especial, pues puede expresarse como una combinación lineal de cualquiera de los parámetros τ o σ, puesto que la ecuación de Polyakov es de segundo orden (la ecuación de onda (5)). De modo que $\mathscr{K}_1{}^\mu$ pueden tomar las siguientes formas equivalentes

$$\begin{aligned} \mathscr{K}_1{}^\mu &\equiv \mathscr{K}_1{}^\mu(c\tau \pm \sigma) \\ &\equiv \mathscr{K}_1{}^\mu c\tau \\ &\equiv \mathscr{K}_1{}^\mu \sigma \end{aligned} \tag{25}$$

y desde aquí podemos escoger una equivalencia lineal que nos convenga.
Luego de escoger la segunda forma de $\mathscr{K}_1{}^\mu$, la ecuación de movimiento de la cuerda toma la forma

$$x^\mu(\tau,\sigma) = \mathscr{K}_0{}^\mu z(\tau,\sigma) + \mathscr{K}_1{}^\mu c\tau. \tag{26}$$

La razón de escoger la segunda forma es porque se quiere que la cuerda varíe explícitamente con la coordenada temporal, puesto que implícitamente lo hace con la coordenda σ y tambien con τ dentro del parámetro z.

Entonces, reemplazando la ecuación (24) en (5) para la ecuación de la cuerda, se deduce

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\Big) z(\tau,\sigma) = 0. \tag{27}$$

Se observa que el parametro z satisface la ecuación diferencial de movimiento de Polyakov y se comporta como si fuera una cuerda, esto tiene sentido puesto que este parámetro está definido en función de las coordenadas propias y es precisamente su variación la que da forma a la ecuación general de movimiento de la cuerda x^μ.

Solución aproximada del parámetro z

Sea la ecuación diferencial parcial de movimiento en función de z

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\sigma^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\tau^2} = 0. \tag{28}$$

La solución general tiene la siguiente forma

$$z(\tau,\sigma) = f(c\tau+\sigma) + g(c\tau-\sigma). \tag{29}$$

Esta solución en general puede ser armónica o en su defecto cualquier otra forma que satisfaga la ecuación (29). Para nuestro analisis en particular, se considera que las soluciones son ondas armónicas, puesto que es más factible inferir un comportamiento de esta naturaleza para una cerda bosónica. Además, estas ondas deven ser viajeras (las ondas estacionarias son un caso particular). Entonces, la solución toma la siguiente forma

$$z_\lambda(\tau,\sigma) = A_\lambda e^{-i\lambda(c\tau+\sigma)} + B_\lambda e^{-i\lambda(c\tau-\sigma)}, \tag{30}$$

donde λ es un parámetro desconocido e independiente de τ y σ.

A continuación se aplicará esta solución tanto a cuerdas cerradas como abiertas para observar el comportamiento del parámetro λ.

Aplicando a cuerdas abiertas

Para el caso de cuerdas abiertas hay dos condiciones importantes que son las de Neumann y Dirichlet.
Condición de Neumann:

$$\Big(\frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma}\Big)\Big|_{\sigma=0,\pi} = 0.$$

Reemplazando la ecuación (30) en la condición de Neumann para ambos valores de σ, se obtiene

$$\begin{pmatrix} i\lambda & -i\lambda \\ i\lambda e^{i\lambda\pi} & -i\lambda e^{-i\lambda\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\lambda \\ B_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

desde aqui se consigue

$$\mathrm{sen}\lambda\pi = 0$$

entonces $\lambda = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, tal que $\lambda \in \mathbb{Z}^+$; de esta manera se muestra que λ es un entero y no una función.
Se llega a la misma conclusión cuando se utiliza la condición de Dirichlet, $\Big(\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}\Big)\Big|_{\sigma=0,\pi} = 0.$

Aplicando a cuerdas cerradas

En este caso la cuerda satisface la siguiente condición

$$x^\mu(\sigma,\tau) = x^\mu(\sigma+\pi,\tau)$$

Al observar la ecuación (24) se nota que x^μ depende totalmente del parámetro z, por lo que la condición indicada anteriormente puede ser reescrita en forma equivalente como

$$z(\sigma,\tau) = z(\sigma+\pi,\tau)$$

substituyendo la ecuación (30) en la ecuación () para ambos lados e igualando sus componentes, se obtiene

$$\mathrm{sen}\lambda\pi = 0.$$

Nuevamente se deduce que $\lambda = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.
De estos resultados se muestra que el parámetro z es un escalar (número) y es discreto. Justamente esta discretitud permite que el parámetro z sea escrito como una sumatoria, donde se considera $\lambda = n$. La solución general, ecuación (30), es reescrita como

$$z_n(\tau,\sigma) = A_n e^{-in(c\tau+\sigma)} + B_n e^{-in(c\tau-\sigma)}; \tag{31}$$

y desde aquí

$$\mathcal{Z}(\tau,\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big[A_n e^{-in(c\tau+\sigma)} + B_n e^{-in(c\tau-\sigma)}\Big], \tag{32}$$

es la ecuación de movimiento del parámetro z como una sumatoria generalizada para todos los valores de n, con $\mathcal{Z} = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$.

Expandiendo la serie y realizando algunos artificios matemáticos sobre la sumatoria, se deriva

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}(\tau,\sigma) &= \sum_{n=0}^{\infty}\Big[A_n e^{-in(c\tau+\sigma)} + B_n e^{-in(c\tau-\sigma)}\Big] \\ &= \mathbb{C} + \sum_{n\neq0}^{\infty}\frac{i}{n}\Big[(-inA_n)e^{-in(c\tau+\sigma)} + (-inB_n)e^{-in(c\tau-\sigma)}\Big] \\ &= \mathbb{C} + \sum_{n\neq0}^{\infty}\frac{i}{n}\Big[\mathbb{A}_n e^{-in(c\tau+\sigma)} + \mathbb{B}_n e^{-in(c\tau-\sigma)}\Big],\end{aligned} \tag{33}$$

donde $\mathbb{A}_n = -inA_n$, $\mathbb{B}_n = -inB_n$ y $\mathbb{C} = A_0 + B_0$.
Reemplazando la tercera linea de la ecuación (33) en la ecuación (26) para conseguir

$$x^\mu(\tau,\sigma) = \mathbb{C}\mathscr{K}_0^\mu + \sum_{n\neq 0}^{\infty} \frac{i}{n}\left[\mathbb{A}_n\mathscr{K}_0^\mu e^{-in(c\tau+\sigma)} + \mathbb{B}_n\mathscr{K}_0^\mu e^{-in(c\tau-\sigma)}\right] + \mathscr{K}_1^\mu c\tau. \tag{34}$$

Ordenando

$$x^\mu(\tau,\sigma) = \mathcal{K}_0^\mu + \mathscr{K}_1^\mu c\tau + \sum_{n\neq 0}^{\infty} \frac{i}{n}\left[\mathscr{A}_n^\mu e^{-in\sigma} + \mathscr{B}_n^\mu e^{in\sigma}\right] e^{-inc\tau}, \tag{35}$$

donde $\mathcal{K}_0^\mu = \mathbb{C}\mathscr{K}_0^\mu$, $\mathscr{A}_n^\mu = \mathbb{A}_n\mathscr{K}_0^\mu$ y $\mathscr{B}_n^\mu = \mathbb{B}_n\mathscr{K}_0^\mu$.

Se observa que la ecuación (35) es similar a la ecuación de movimiento que se obtiene para la cuerda a partir de aproximaciones por series de Fourier (14), de manera que la solución aquí obtenida es equivalente a ella, puesto que surge a partir de la ecuación de Polyakov. Por lo tanto se deduce la ecuación dinámica de la cuerda transformando las coordenadas cono de luz, luego comparando las componentes de ambas ecuaciones se obtienen

$$\mathscr{A}_n^\mu = \frac{1}{\sqrt{4\pi T}}\tilde{\alpha}_n^\mu, \qquad \mathscr{B}_n^\mu = \frac{1}{\sqrt{4\pi T}}\alpha_n^\mu,$$
$$\mathcal{K}_0^\mu = x_0^\mu, \qquad \mathscr{K}_1^\mu = \frac{p^\mu}{\pi T}. \tag{36}$$

Conclusiones

En este artículo se presenta una forma alternativa de derivar la ecuación de movimiento de la cuerda x^μ a partir de una transformación lineal en las coordenadas cono de luz, y para ello se emplea un parámetro de transformación z variable en función de las coordenadas propias (τ,σ).

Se observa que la transformación impuesta conduce a la invariancia de la métrica de transfromación g^{mn}, ecuacion (19), a la vez que surge un nuevo término $\{\varepsilon^\pm, z\} = 0$, el qual está asociado al ordenamiento de los operadores. Además, se observa que al reemplazar el parámetro en la ecuación de onda de la cuerda, ésta se simplifica a una sola dimensión en lugar de cuatro dimensiones, y ello aunado a la discretitud de z por medio del parámetro $\lambda = n$ computada tanto para cuerdas abierta y cerrada. Esto facilita el cálculo, y de esa manera la acuación de onda es desarrollada fácilmente mediante las series de Fourier de dos variables.

Por otro lado, la solución obtenida tiene la forma equivalente a la ecuación de movimiento de la cuerda deducida mediante procedimientos normales, por lo que es posible igualar los coeficientes de ambas ecuaciones, (14) y (35).

Finalmente, se verifica que la ecuación de movimiento de la cuerda puede ser derivada sin mucho esfuerzo al transformar las coordenadas cono de luz por un parámetro escalar y considerando una relación importante, equación (11), que no es contradictorio sino que está dentro de la teoría misma.

Cabe destacar que, a diferencia del método alternativo, el método normal se basa en el método de Dirac el cual consiste en el cálculo de los momentos canónicos y verificación de la existencia de vínculos de primera clase, cuya combinación lineal de estos conformen un hamiltoniano total del sistema el cual sea nulo. Finalmente se calcula un álgebra de vínculos que son los generadores de simetría de la acción de la cuerda bosónica.

Referencias

[1] L. Ibáñez, A. Uranga, *String Theory and Particle Physics: An Introduction to String Phenomenology.* Cambridge University Press (2012).

[2] P. di Francesco, P. Mathieu, and D. Sénnechal, *Conformal Field Theory*, Chapter 5. Ed. Springer (1997).

[3] M. Green, J. Schwarz, and E. Witten, *Superstring Theory.* Vol 1 and 2, pp. 26-29. Cambridge Monographs on Mathematical Physics (1987).

[4] J. Polchinski, *String Theory.* Vol. 1 and 2, pp. 16-18. Cambridge Monographs on Mathematical Physics (1998).

[5] F. Villegas, R. Negrón, M. Culqui. Dinámica de la cuerda bosónica circular. Revista de Investigación de Física, **12**(1), pp 43-46 (2009). Doi: https://doi.org/10.15381/rif.v12i01.8721

[6] K. Becker, M. Becker and J. Schwarz, *String Theory and M-Theory: A Modern Introducction*, pp. 31. Cambridge University Press (2007).

[7] E. Larrañaga, *Introduction to Bosonic String Theory*, Bogotá, D.C. (2002). [arXiv:gr-qc/0306060v2]. Doi: https://doi.org/10.48550/arXiv.gr-qc/0306060

[8] D. Tong, *String Theory.* Part III Mathematical Tripos, Chapter 1. University of Cambridge (2009).

[9] B. Zwiebach, *A First Course in String Theory*, pp. 175-186. Cambridge University Press (2004).

[10] G. Hooft, *Introduction to String Theory*. Utrecht University, Netherlands (2004).

[11] J. Schwarz, *Introduction to Superstring Theory*. California Institute of Tecnology (2000). Doi: https://doi.org/10.48550/arXiv.hep-ex/0008017