

Sombra del agujero negro de Schwarzschild

 Fulgencio Villegas ^{*1}

¹ *Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú*

Recibido 5 Set 2022 – Aceptado 29 Dic 2022 – Publicado 31 Dic 2022

Resumen

En este trabajo se estudia la sombra del agujero negro de Schwarzschild en forma analítica. Entendiéndose por sombra de un objeto la forma que tiene dicho objeto en el espacio, visto por un observador cuando se considera únicamente las propiedades del espacio-tiempo. Para encontrar la solución analítica se usa la ecuación de Hamilton-Jacobi, el método de separación de variables y la introducción de una cantidad conservada tipo Carter. Para determinar de las órbitas de radio constante se usa los parámetros de impacto y las coordenadas celestes.

Palabras clave: Agujeros negros, sombra, geodésicas nulas.

Shadow of the Schwarzschild black hole

Abstract

In this work the shadow of the Schwarzschild black hole is studied analytically. Understanding the shadow of an object as the shape that said object has in space, seen by an observer when only the properties of space-time are considered. To find the analytical solution, the Hamilton-Jacobi equation, the method of separation of variables and the introduction of a Carter-type conserved quantity are used. To determine constant radius orbits, the impact parameters and celestial coordinates are used.

Keywords: Black holes, shadow, null geodesics.

Introducción

El análisis de la sombra de los agujeros negros es de mucha importancia en el ámbito cosmológico; su observación permite determinar la masa y spin de un agujero negro [1,2]. En el año 1993 Cunningham y Bardeen hicieron uso, por primera vez, del análisis visual de agujeros negros para estudiar el movimiento de una estrella alrededor de un agujero negro [3]. Sin embargo, el primer trabajo de análisis visual de un agujero negro hecho por computadora fue realizada por Luminet en el año 1979 [4], como se muestra en la figura 1.

En el año 2019, mediante el uso del telescopio de horizonte de eventos, se obtuvo la primera imagen del agujero negro supermasivo en el centro de la galaxia Messier 87 (*M87*) ubicada en la constelación de Virgo [5–10], como se muestra en la figura 2. Este agujero es aproximadamente 6500 millones de veces más masivo

que nuestro Sol y se encuentra ubicado a una distancia de 55 millones de años luz de la Tierra. Esta primera imagen constituye un hito importante en la cosmología, por un lado nos muestra la evidencia de la existencia de los agujeros negros, y por otro lado nos permite entender la sombra de un agujero negro. Estos resultados nos revela una estructura fina cerca del horizonte del agujero negro.

La sombra de un agujero negro viene a ser una región oscura bidimensional respecto al cielo de un observador y es causada por los rayos de luz que caen en el horizonte de eventos debido a la intensa gravedad del agujero negro. La sombra de un agujero negro fue estudiado por primera vez en el año 1966 por Synge [11]. En general, la sombra que proyecta un agujero negro que no gira tiene la forma circular estándar, mientras que un agujero negro giratorio presenta una sombra de forma circular deformada, alargada en la dirección del eje de giro [12,13].

*fvillegass@unmsm.edu.pe

© Los autores. Este es un artículo de acceso abierto, distribuido bajo los términos de la licencia Creative Commons Atribución 4.0 Internacional (CC BY 4.0) que permite el uso, distribución y reproducción en cualquier medio, siempre que la obra original sea debidamente citada de su fuente original.



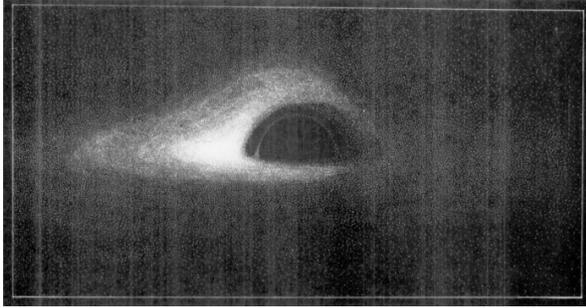


Figura 1: Imágen simulada de un agujero negro rodeado por un fino disco de acreción [4].

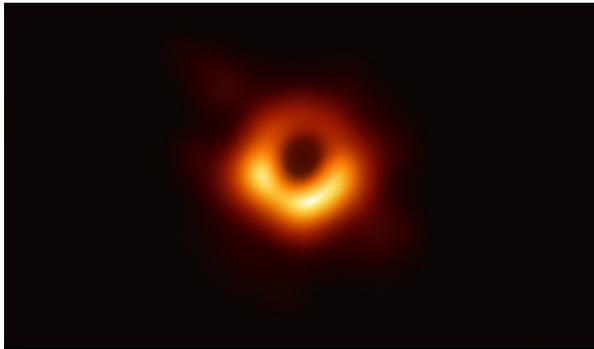


Figura 2: Primera imagen de un agujero negro situado en el centro de la galaxia M87. Se observa el disco de acreción como una región luminosa que rodea al agujero negro [14].

Un agujero negro está descrito por su masa, momento angular y carga eléctrica. En el caso de agujeros negros supermasivos su campo gravitacional esta descrito básicamente por su masa y momento angular ya que suelen ser electricamente neutros. La sombra de un agujero negro se presenta como una region oscura la cual esta rodeada por una esfera de fotones [15] la cual es concéntrica con el objeto gravitante. La intensidad de campo gravitacional del agujero negro desvía los rayos de luz. Si proyectamos un rayo de luz hacia un agujero negro, éste se curva, inclinándose hacia el agujero negro y formando parte de la superficie esférica sobre el horizonte de eventos.

Ecuaciones de campo de Einstein

Las ecuaciones de campo de Einstein se pueden deducir a partir del formalismo lagrangiano el cual se basa en el principio de mínima acción. A partir del cálculo variacional se relaciona la acción con el campo gravitacional; además se sabe que para el mínimo dicha acción debe ser estacionaria. Esta proposición viene representada por

$$\delta S = 0. \quad (1)$$

La acción para la relatividad general fue formulada por Hilbert en 1915 y se denomina acción de Einstein-Hilbert, la cual esta dada por [16]

$$S_G = \frac{1}{2k} \int_M \mathcal{L}(g_{\mu\nu}) \sqrt{-g} d^4x, \quad (2)$$

donde M es el espacio-tiempo que es cubierto en su totalidad por la integral; $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico con determinante g ; y k es una constante que se elige de tal manera que el límite de campo débil reproduzca la gravedad newtoniana.

Proponiendo una densidad lagrangiana definida como

$$\mathcal{L}(g_{\mu\nu}) = R, \quad (3)$$

donde R es el escalar de Ricci. Por lo tanto, la acción viene dada por

$$S_G = \frac{1}{2k} \int_M (R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-g}) d^4x. \quad (4)$$

Considerando la variación de la acción respecto de la métrica, la ecuación (4) resulta

$$\delta S_G = \frac{1}{2k} \int_M [\delta(R_{\mu\nu}) g^{\mu\nu} \sqrt{-g} + R_{\mu\nu} \delta(g^{\mu\nu} \sqrt{-g})] d^4x. \quad (5)$$

Teniendo en cuenta las siguientes relaciones [18]

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (6)$$

$$\int_M \delta(R_{\mu\nu}) g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = 0. \quad (7)$$

Reemplazando las ecuaciones (6) y (7) en (5) obtenemos

$$\delta S_G = \frac{1}{2k} \int (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (8)$$

Esta integral es nula para cualquier variación $\delta g^{\mu\nu}$. Esto indica que el integrando es cero, por lo tanto se deduce que [17]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0. \quad (9)$$

Estas son las ecuaciones de Einstein en el vacío. Para un espacio-tiempo con presencia de materia o energía se puede demostrar que las ecuaciones de Einstein toman la siguiente forma [18]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (10)$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento.

Métrica de Schwarzschild

La primera solución exacta para las ecuaciones de campo de Einstein fueron obtenidas por Karl Schwarzschild [19] poco después de que Einstein publicara su teoría de la Relatividad General (TRG) [20]. Esta solución es para un sistema estático, dotado de simetría esférica y en el vacío, presenta una singularidad irremovible conocida como agujero negro de Schwarzschild. Por lo tanto es un buen modelo para describir el campo gravitatorio causado por cuerpos masivos con simetría esférica como planetas y estrellas.

La métrica de Schwarzschild se obtiene al resolver las ecuaciones de campo de Einstein, siendo su expresión más común la siguiente

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (11)$$

donde m es una constante que está relacionada con la masa del cuerpo que genera campo gravitatorio.

La métrica de Schwarzschild es la solución del agujero negro más simple para la ecuación de Einstein. La ecuación (11) presenta singularidades en $r = 0$ y $r = 2m$; sin embargo, si se calculan las componentes del tensor de Riemann se encuentra que para $r = 0$ no están bien definidas, mientras que para $r = 2m$ sí lo están. Esto indica que la singularidad asociada al valor $r = 2m$ es ficticia, denominada como singularidad removible, mientras que para el valor $r = 0$ es una singularidad esencial. La elección de coordenadas adecuadas puede hacer desaparecer la singularidad en $r = 2m$. Sin embargo, en la definición de las coordenadas que elegimos, la singularidad corresponde al horizonte de eventos. Es decir: $r_{horizonte} = 2m$. También se observa que en el límite $r \rightarrow 0$ la ecuación (11) se reduce a la métrica de Minkowski en coordenadas esféricas, por esta razón la métrica de Schwarzschild es una solución asintóticamente plana.

Sombra del agujero negro de Schwarzschild

Para determinar la sombra del agujero negro de Schwarzschild se usa el formalismo de Hamilton-Jacobi. La Lagrangiana viene dada por [21]

$$L(x^\mu, \dot{x}^\mu) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \quad \mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\} = \{t, r, \theta, \phi\} \quad (12)$$

donde $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico y $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ siendo λ el parámetro afin [22]. El Hamiltoniano $H(x^\mu, p_\mu)$ viene definido por [23]

$$H(x^\mu, p_\mu) = \dot{x}^\mu p_\mu - L(x^\mu, \dot{x}^\mu), \quad (13)$$

donde p_μ está dado por

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = g_{\alpha\mu} \dot{x}^\mu. \quad (14)$$

Reemplazando (12) en (13) se obtiene

$$H(x^\mu, p_\mu) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} p_\mu p_\nu. \quad (15)$$

Debido a que $H(x^\mu, p_\mu)$ es una constante de movimiento es posible hacer la normalización $H(x^\mu, p_\mu) = -m^2$, siendo m la masa de la partícula en reposo.

La ecuación de Hamilton-Jacobi tiene la forma [23]

$$H(x^\mu, p_\mu) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} = -m^2, \quad p_\mu = \frac{\partial S}{\partial x^\mu}, \quad (16)$$

donde S es la función principal de Hamilton llamada también acción. Haciendo uso de la ecuación (16) se obtiene

$$\frac{1}{2} \left[g^{tt} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 + g^{rr} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + g^{\phi\phi} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 \right] = -m^2. \quad (17)$$

Como se trata de la métrica de Schwarzschild, siendo esta esféricamente simétrica y estática, cualquier partícula dentro de este espacio-tiempo presenta una conservación de su energía E y su momento angular L . Para resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi dada por la ecuación (17) se usa el método de separación de variables, para ello, se propone una función principal de Hamilton de la forma

$$S(x^\mu) = -Et + L\phi + S_r(r) + S_\theta(\theta) + \frac{1}{2} m^2 \lambda. \quad (18)$$

Como nuestro interés es analizar la sombra del agujero negro de Schwarzschild, es decir, nos interesa la trayectoria de las partículas de luz o fotones. Por lo tanto, se considera $m = 0$ en las ecuaciones anteriores. Reemplazando la ecuación (18) en la ecuación (17) se obtiene

$$\left(-\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \right) E^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(\frac{dS_r}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 + \frac{L^2}{r^2 \sin^2 \theta} = 0. \quad (19)$$

Realizando la separación de la variable radial y angular se deduce

$$\left(-\frac{r^2}{1 - \frac{2M}{r}} \right) E^2 + r^2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(\frac{dS_r}{dr} \right)^2 = C, \quad (20)$$

$$\left(\frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 + \frac{L^2}{\sin^2 \theta} = C, \quad (21)$$

donde C es la constante de Carter [24]. Con el fin de reducir el número de variables en la determinación de la trayectoria de los fotones, en las proximidades del agujero negro de Schwarzschild, definimos las siguientes variables denominadas variables de impacto, las cuales vienen expresadas por

$$\gamma = \frac{L}{E}, \quad \sigma = \frac{C}{E^2}, \quad \bar{\lambda} = E\lambda. \quad (22)$$

Por otro lado, las ecuaciones anteriores son posibles escribirlas en función de $\frac{dr}{d\lambda}$ y $\frac{d\theta}{d\lambda}$ y en términos de los parámetros de impacto obteniéndose

$$\frac{dt}{d\lambda} = -\frac{\gamma}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}, \quad (23)$$

$$r^2 \frac{dr}{d\lambda} = \sqrt{R}, \quad (24)$$

$$r^2 \frac{d\theta}{d\lambda} = \sqrt{\Theta}, \quad (25)$$

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{\gamma}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (26)$$

Como las órbitas son de radios constantes, conducen a considerar valores críticos en los parámetros de impacto lo que conlleva a considerar $R = 0$ y $\frac{dR}{dr} = 0$, obteniéndose

$$2r^3 - r\sigma + M\sigma = 0, \quad (27)$$

$$r^3 - r\sigma + 2M\sigma = 0. \quad (28)$$

Resolviendo las ecuaciones (27) y (28) se obtiene

$$r = 3M, \quad (29)$$

reemplazando la ecuación (29) en las ecuaciones (27) o (28) se obtiene

$$\sigma = 27M^2. \quad (30)$$

Usando coordenadas celestes, las cuales están definidas por [25]

$$\alpha = -r_0^2 \sin \theta_0 \frac{d\phi}{dr} \Big|_{r_0 \rightarrow \infty}, \quad (31)$$

$$\beta = r_0^2 \frac{d\theta}{dr} \Big|_{r_0 \rightarrow \infty}. \quad (32)$$

Reemplazando en las ecuaciones (31) y (32) las relaciones $\frac{d\theta}{d\lambda}$ y $\frac{d\phi}{d\lambda}$ correspondientes a las trayectorias de los fotones o geodésicas, se obtiene

$$\alpha = -\frac{\gamma}{\sin \theta}, \quad (33)$$

$$\beta = \sqrt{\sigma - \frac{\gamma^2}{\sin^2 \theta}}. \quad (34)$$

Eliminando el término γ de las ecuaciones (33) y (34) se encuentra la siguiente relación

$$\alpha^2 + \beta^2 = 27M^2. \quad (35)$$

La ecuación (35) representa la expresión de la sombra del agujero negro de Schwarzschild, la cual puede graficarse para diferentes valores de M , tal como se muestra en la figura 3.

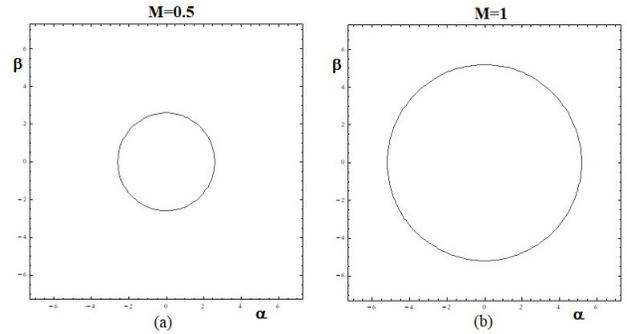


Figura 3: Sombra del agujero negro de Schwarzschild. Se ha considerado $M=0.5$ en la figura (a) y $M=1$ en la figura (b).

A partir de la ecuación (35) podemos notar que la sombra del agujero negro es proporcional a su masa y está representada, en el espacio $\alpha - \beta$, por una circunferencia de radio $\sqrt{27M}$.

Conclusiones

Se ha estudiado la sombra del agujero negro de Schwarzschild mediante el movimiento de una partícula de prueba y se han derivado las ecuaciones geodésicas nulas aplicando la ecuación de Hamilton-Jacobi y el método de separación de variables.

Nuestro resultado indica que la sombra del agujero negro de Schwarzschild tiene forma circular, de radio $\sqrt{27M}$. De tal manera que el tamaño de la sombra aumenta con su masa.

Debido a que la métrica de Schwarzschild es esféricamente simétrica, cualquier partícula de prueba dentro de este espacio-tiempo tiene conservadas su energía y su momento angular. También debido a esta simetría, de la ecuación (35) se deduce que la sombra del agujero negro de Schwarzschild es independiente del ángulo de observación.

Referencias

- [1] C. Bambi and K. Freese, *Apparent shape of super-spinning black holes*, Phys. Rev. D **79**, 043002, (2009).
- [2] R. Takahashi, *Shapes and Positions of Black Hole Shadows in Accretion Disks and Spin Parameters of Black Holes*, Astrophys. J. **611** 996, (2004).
- [3] C. Cunningham, J. Bardeen, *The Optical Appearance of a Star Orbiting an Extreme Kerr Black Hole*, Astrophys. J. **183**, 237 (1973).
- [4] J. Luminet, *Image of a spherical black hole with thin accretion disk*, Astronomy and Astrophysics **75**, 228 (1979).
- [5] The Event Horizon Telescope Collaboration, First M87 event horizon telescope results. I. The shadow of the supermassive black hole. Astrophys. J. Lett. 875, L1 (2019)
- [6] The Event Horizon Telescope Collaboration, First M87 event horizon telescope results. II. Array and instrumentation. Astrophys. J. Lett. 875, L2 (2019)
- [7] The Event Horizon Telescope Collaboration, First M87 event horizon telescope results. III. Data processing and calibration. Astrophys. J. Lett. 875, L3 (2019)
- [8] The Event Horizon Telescope Collaboration, First M87 event horizon telescope results. IV. Imaging the central supermassive black hole. Astrophys. J. Lett. 875, L4 (2019)
- [9] The Event Horizon Telescope Collaboration, First M87 event horizon telescope results. V. Physical origin of the asymmetric ring. Astrophys. J. Lett. 875, L5 (2019)
- [10] The Event Horizon Telescope Collaboration, First M87 event horizon telescope results. VI. The shadow and mass of the central black hole. Astrophys. J. Lett. 875, L6 (2019)
- [11] J. L. Synge, *The escape of photons from gravitationally intense stars*, MNRAS, **131**, 463 (1966).
- [12] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, Oxford University Press, New York, (1992).
- [13] J. M. Bardeen, *Timelike and null geodesics in the Kerr metric*, Les Astres Occlus, (1973).
- [14] <https://eventhorizontelescope.org>.
- [15] A. K. Mishra, S. Chakraborty, and S. Sarkar, *Understanding photon sphere and black hole shadow in dynamically evolving spacetimes*, Phys. Rev. D **99**,10 (2019).
- [16] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou, A. N. Lasenby. *General relativity: an introduction for physicists*. Cambridge University press, (2006).
- [17] L. Ryder. *Introduction to General Relativity*. Cambridge University press, (2009).
- [18] F. Villegas. *Ecuaciones de Friedmann en las teorías de gravedad modificada $f(R)$* . Revista de Investigación de Física **24(3)**, (2021). Doi: <https://doi.org/10.15381/rif.v24i3.21161>
- [19] K. Schwarzschild. *On the gravitational field of a mass point according to einstein's theory*. *ArXiv preprint physics/9905030*, (1999). Translation and foreword by S. Antoci and A. Loinger.
- [20] A. Einstein, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 844 (1915).
- [21] B. Cosino, *Introduction to General Relativity: A course for Undergraduate Student of Physics*, Springer, (2018).
- [22] L. de la Torre. *Elementos de relatividad*, Universidad de Antioquia, Medellín, (2008).
- [23] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko *Classical Mechanics*. H. Goldstein, Addison-Wesley, New York, (2002).
- [24] B. Carter, *Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields*, Phys. Rev. **174**, (1968).
- [25] S.E. Vazquez, E.P. Esteban, *Strong Field Gravitational Lensing by a Kerr Black Hole*, Nuovo Cim. **B119**, (2003).