

Propiedades geométricas y potencial gravitacional del espacio-tiempo de Reissner-Nordstrom-De Sitter

Franco Villata¹ y  Teófilo Vargas*¹

¹ *Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú*

Recibido 20 Dic 2022 – Aceptado 11 Abr 2023 – Publicado 20 Abr 2023

Resumen

En este trabajo se busca dar una descripción de la geometría del espacio-tiempo y de sus propiedades fundamentales en el exterior del agujero negro de Reissner-Nordstrom-De Sitter (RNdS) en relación a sus respectivos horizontes de sucesos. Para este fin, efectuamos la correspondiente transformación a las coordenadas de Kruskal, lo que nos permite analizar de manera plena y consistente desde el punto de vista físico el comportamiento de la estructura causal en torno a los horizontes mencionados y en todo el continuo del espacio-tiempo referido. Posteriormente, empleando las ecuaciones de campo de Einstein y conjuntamente las que rigen el comportamiento de los campos gravitatorios en el límite Newtoniano no relativista, se logra obtener la forma exacta del potencial gravitacional de RNdS. Por último, con esta última expresión, podemos analizar de manera tanto cualitativa como cuantitativamente la verdadera influencia que puede presentar una constante cosmológica positiva dentro del campo gravitacional producido por una distribución de masa cargada, esféricamente simétrica y en reposo.

Palabras clave: Agujero negro de RNdS, coordenadas de Eddington-Finkelstein, coordenadas de Kruskal, estructura causal, potencial gravitacional, límite Newtoniano, potencial Newtoniano, potencial no-Newtoniano.

Geometric properties and gravitational potential of Reissner-Nordstrom-De Sitter space-time

Abstract

This paper seeks to give a description of the geometry of space-time and its fundamental properties outside the Reissner-Nordstrom-De Sitter (RNdS) black hole in relation to their respective event horizons. For this purpose, we carry out the corresponding transformation to the Kruskal coordinates, which allows us to fully and consistently analyze from the physical point of view the behavior of the causal structure around the mentioned horizons and throughout the continuum of the referred space-time. Subsequently, using Einstein's field equations and jointly those that govern the behavior of gravitational fields in the non-relativistic Newtonian limit, it is possible to obtain the exact form of the gravitational potential of RNdS. Finally, with this last expression, we can analyze both qualitatively and quantitatively the true influence that a positive cosmological constant can have within the gravitational field produced by a charged mass distribution, spherically symmetric and at rest.

Keywords: RNdS black hole, Eddington-Finkelstein coordinates, Kruskal coordinates, causal structure, gravitational potential, Newtonian limit, Newtonian potential, non-Newtonian potential.

* tvargasa@unmsm.edu.pe

© Los autores. Este es un artículo de acceso abierto, distribuido bajo los términos de la licencia Creative Commons Atribución 4.0 Internacional (CC BY 4.0) que permite el uso, distribución y reproducción en cualquier medio, siempre que la obra original sea debidamente citada de su fuente original.



1. Introducción

El estudio del comportamiento de la estructura causal en el exterior de agujeros negros carentes de todo tipo de movimiento y esféricamente simétricos acoplados a la influencia de una constante cosmológica positiva, no es un tema nuevo dentro de la física teórica. Durante décadas los trabajos relativos a esta área específica de investigación, dentro del marco de la teoría clásica de campos relativista, se han venido desarrollando en su mayoría sobre la base de un enfoque preferentemente y casi exclusivamente geométrico [1–6]. En tal sentido, la transformación al sistema de las coordenadas de Kruskal nos permite llevar a cabo dicha descripción en todo el espacio-tiempo *infinito* posible, incluso en los propios horizontes y con ello, como es sabido, evadir las llamadas *singularidades coordenadas*. Posteriormente, la aplicación de la técnica de compactificación conforme nos permite *llevar ese infinito* a un nuevo formalismo y con esto proyectarlo dentro de una estructura geométrica finita, lo cual nos permite poder analizar de manera exacta y precisa la relación existente entre los puntos pertenecientes a las distintas regiones comprendidas en el exterior de todo agujero negro y obtener con esto los diagramas de Carter-Penrose [7, 8, 13, 16].

El método descrito, reproducido de manera casi idéntica por numerosos investigadores a lo largo de las últimas décadas, ha permitido la descripción detallada de las propiedades geométricas de estructuras espacio-temporales estáticas y esféricamente simétricas tales como los agujeros negros de Schwarzschild, Reissner-Nordstrom (RN) sub-extremal, extremal, sobre-extremal, Schwarzschild-De Sitter, Reissner-Nordstrom-De Sitter (RNdS) y así como sus correspondientes casos anti-De Sitter (AdS) [3, 9, 14]. No obstante, en los últimos años numerosos autores han experimentado otros métodos alternativos, tales como la aplicación de métodos perturbativos en torno a las métricas de RN y RNdS -lo cual ha permitido la linealización de las ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell- [15], logrando con ello la obtención más sencilla de soluciones. Por otro lado, empleando las propiedades geométricas del vacío esféricamente simétrico, impuestas por el espacio-tiempo de De Sitter, así como las propiedades de simetría de su tensor de energía-momento -el cual es como sabemos, proporcional al tensor métrico mediante una densidad de energía que resulta siendo constante y positiva de acuerdo con lo establecido por el modelo de la materia oscura fría incluyendo la constante cosmológica (Λ CDM)- es posible obtener la solución de Schwarzschild-De Sitter y con estas mismas ecuaciones describir la geometría de este tipo de espacio-tiempo, tanto fuera, como dentro de dicha distribución esféricamente simétrica en términos de su correspondiente densidad y presión isotrópicas [12].

El estudio de la estructura causal no solamente se

limita y orienta a la descripción del aspecto puramente geométrico *en sí mismo* alrededor de una determinada singularidad, sino en ocasiones se suele abordar para entender tanto la dinámica como la termodinámica relacionadas con los agujeros negros. Así tenemos que, en la descripción de las propiedades termodinámicas de multiagujeros, en el límite de los llamados *agujeros negros extremos* (en los cuales se satisface en particular que $M = |Q|$, para casos tales como los de RN y RNdS, y en general, que $M = |\sqrt{Q^2 + P^2}|$, donde P viene a ser la carga magnética de la distribución, consecuencia del momento angular de la misma), las soluciones de Majumdar-Papapetrou ofrecen una muy útil herramienta de descripción [18]. Adicionalmente sabemos que, un correcto uso de las técnicas de transformación nos permite conocer cómo cambian los parámetros ópticos (tales como el índice de refracción y el ángulo de deflexión) de las lentes gravitacionales en los espacios-tiempos curvos de Schwarzschild y de RN bajo el efecto e influencia de una constante cosmológica positiva [10, 11].

Como hemos podido notar la cosmología física, en el marco de la teoría clásica de campos, dispone de una gran variedad de métodos y enfoques distintos para abordar el análisis de la estructura causal en torno a los horizontes de distintos tipos de agujeros negros estáticos y esféricamente simétricos, acoplados a la influencia de un parámetro cosmológico tanto positivo como negativo, con el objetivo de lograr la descripción no sólo de sus propiedades geométricas, sino además en base a éstas mismas, la de sus correspondientes propiedades tanto dinámicas como inclusive termodinámicas. En tal dirección, en la tercera sección del presente trabajo de investigación se desarrolla un análisis pormenorizado del comportamiento de la estructura causal en torno a los distintos horizontes que envuelven la singularidad de RNdS sobre la base de un enfoque preferentemente algebraico, más que geométrico. La razón de ello radica en la necesidad de obtener nuevas herramientas precisas de descripción, que nos permita interpretar de forma más directa tanto en el aspecto cuantitativo como cualitativo, en particular, lo referente a los problemas específicos concernientes con el intercambio de la información con los distintos horizontes que envuelven a dicha singularidad (para lo cual, en la segunda sección efectuamos previamente las transformaciones requeridas de la solución obtenida de RNdS en coordenadas esféricas al sistema de las coordenadas de Eddington-Finkelstein y posteriormente al sistema de las coordenadas de Kruskal señaladas); asimismo, en la cuarta sección se desarrolla el estudio del comportamiento del potencial gravitacional en el exterior de la misma, incluyendo en él la influencia de una constante cosmológica positiva [13, 17]. Finalmente, en la sección referente a las conclusiones, enfatizamos los principales alcances e implicancias derivadas de los resultados obtenidos en este trabajo de investigación.

2. La solución de RNdS en las coordenadas de Kruskal

Partimos del elemento de línea ds^2 que nos describe la métrica del espacio-tiempo en el exterior de un agujero negro de RNdS expresada en coordenadas esféricas:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2 \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1)$$

donde $\Lambda = cte$, $\Lambda \neq 0$, $\Lambda > 0$.

A continuación extraemos de (1) la correspondiente función métrica $f(r)$, la cual se encuentra igualmente definida en coordenadas esféricas como:

$$f(r) = \frac{r^2 - 2Mr + Q^2 - \frac{\Lambda}{3}r^4}{r^2}. \quad (2)$$

Como se puede observar, al encontrarse dicha función métrica definida en términos de un polinomio de cuarto grado, esto implica que existen 4 raíces reales que la hacen nula, y con ello, en cada una de las cuales se obtiene como resultado una singularidad coordenada en la métrica (es decir, $ds^2 \rightarrow \infty$). No obstante, no todas las cuatro raíces que satisfacen la nulidad de la función métrica $f(r)$ mencionadas corresponden a los radios físicos de los respectivos horizontes de sucesos que envuelven a la singularidad de RNdS.

Así tenemos que, como bien lo señalan de manera enfática C. González y B. Koch [21], una de estas 4 raíces resulta siendo negativa, con lo cual no logra satisfacer (a pesar de ser real) el carácter positivo requerido para definir el radio de un horizonte físico. Por otro lado, se tiene que su valor absoluto nos define el radio de una *esfera de fotones*: esto es, una superficie sobre la cual (debido a la inmensa gravedad existente en dicha región) los fotones se encuentran confinados a describir orbitas circulares de caída libre alrededor de la singularidad. Debido a la permanente inestabilidad de las orbitas, tanto dentro como fuera de la esfera, se descarta a dicha superficie como un horizonte físico (M. Mokdad [22]).

De modo tal que en el caso de RNdS sólo se consideran 3 horizontes a saber: el horizonte interior de radio r_- también llamado horizonte de Cauchy, el horizonte exterior de radio r_+ y un horizonte cosmológico de radio r'_+ . Con tales cambios, la función métrica se reescribe ahora como:

$$f(r) = \frac{(r - r_+)(r - r_-)(r - r'_+)}{r^2}, \quad (3)$$

donde en general se asume:

$$\begin{aligned} r_+, r_-, r'_+ &\in R, \\ r_+, r_-, r'_+ &= ctes, \\ r_+ &\neq r_- \neq r'_+, \\ r_+, r_-, r'_+ &\neq 0, \\ r_+, r_-, r'_+ &> 0. \end{aligned}$$

Puesto que el elemento de línea que estamos definiendo corresponde al caso de un agujero negro estático y con altas propiedades de simetría esférica, entonces la métrica es de la forma genérica:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (4)$$

Con esto de (3) tenemos:

$$ds^2 = - \frac{(r - r_+)(r - r_-)(r - r'_+)}{r^2} dt^2 + \frac{r^2}{(r - r_+)(r - r_-)(r - r'_+)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (5)$$

Considerando ahora el caso especial de las partículas carentes de masa en reposo, al encontrarse éstas gobernadas por el intervalo tipo-luz, y omitiendo sin perder generalidad la parte angular de la métrica dada en (5), podemos obtener:

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{r^2}{(r - r_+)(r - r_-)(r - r'_+)}, \quad (6)$$

integrando obtenemos la forma exacta de las geodésicas radiales nulas en coordenadas esféricas:

$$t = \pm \int \frac{r^2}{(r - r_+)(r - r_-)(r - r'_+)} dr,$$

$$t = \pm (\kappa_+ \ln |r - r_+| - \kappa_- \ln |r - r_-| + \kappa'_+ \ln |r - r'_+|) + CTE. \quad (7)$$

En (7) el signo (+) denota a las geodésicas radiales nulas salientes (aquellas trayectorias luminosas que parten de los puntos de intersección y que se extienden hacia el infinito), mientras que el signo (-) nos denota a las geodésicas entrantes (aquellas trayectorias de luz que provienen del infinito y que concluyen en los puntos de intersección señalados). Donde como sabemos, en dichos puntos de intersección se forman los llamados *conos de luz*.

De la expresión (7) es fácil deducir que a medida que nos alejamos de los horizontes los conos de luz se abren, en cambio, a medida que la distancia hacia cualquiera de estos distintos horizontes se reduce los conos comienzan a comprimirse hasta finalmente cerrarse por completo al llegar finalmente a la superficie de dichos horizontes. Lo cual significa que en los horizontes (es decir, cuando $r = r_+, r_-, r'_+$) dichas geodésicas no pueden escapar de los conos. Con ello, la luz -a pesar de ser lo más rápido que existe en el universo- no posee la capacidad

de comunicarse con ningún punto arbitrario del espacio-tiempo exterior a cada uno de los 3 horizontes de sucesos señalados. Esto implica que la información pierde toda capacidad y posibilidad de comunicación y por lo tanto de *conexión causal* fuera de cualesquiera de los 3 horizontes que *envuelven* a la singularidad de RNdS cuando es enviada desde estos mismos horizontes.

Consistentemente con esto, toda señal de periodo propio $\Delta\tau$ finito que se propaga a la velocidad de la luz que es enviada desde alguno de estos 3 horizontes presenta un corrimiento infinito al rojo para cualquier observador arbitrariamente lejano, puesto que dicho observador no puede recibir tal señal al cabo de un tiempo finito, sino que más bien dicho periodo $\Delta t \rightarrow \infty$.

Tal último resultado viene a ser la estructura causal del agujero negro de RNdS expresada en coordenadas esféricas, expresión que se puede derivar directamente de la métrica dada en (5) al considerar ahora dentro de ella a la distancia r como constante y volviendo a prescindir de la parte angular de la misma, así tenemos:

$$ds^2 = -\frac{(r-r_+)(r-r_-)(r-r'_+)}{r^2} dt^2.$$

Con esto:

$$d\tau = \frac{\sqrt{(r-r_+)(r-r_-)(r-r'_+)}}{r} dt.$$

Integrando se logra obtener:

$$\Delta t = \frac{r}{\sqrt{(r-r_+)(r-r_-)(r-r'_+)}} \Delta\tau, \quad (8)$$

donde, como se señaló, asumimos en general que el periodo propio $\Delta\tau$ de la señal enviada siempre será finito. De (8) podemos observar que dicho periodo propio $\Delta\tau$ no puede ser eventualmente nulo, puesto que este hecho implica que la señal electromagnética (y con esto la información) que es enviada desde cualquiera de los 3 horizontes señalados, llega instantáneamente a cualquier punto arbitrario del espacio-tiempo exterior al horizonte, sin importar cuán distante pueda encontrarse respecto a este (caso como sabemos correspondiente a un periodo Δt igualmente nulo). De modo tal que, asimismo, tenemos necesariamente que asumir en general: $\Delta\tau \neq 0$.

Hasta aquí podemos observar la singularidad de la métrica de RNdS dada por (5) y con ello el colapso de la propia estructura causal y, como consecuencia de esto último, la imposibilidad del intercambio de información hacia el exterior del horizonte del agujero negro de RNdS definida por las expresiones (6), (7) y (8) al evaluar estas ecuaciones en cada uno de los respectivos horizontes de sucesos. Dichos resultados, como es fácil de deducir, son la consecuencia directa del tipo de sistema de coordenadas empleado para describir el comportamiento de

la estructura causal relativa a dichos horizontes referidos; por lo que podemos concluir que el análisis de dicha estructura causal empleando el sistema esférico sólo nos arroja *singularidades coordenadas*, mas no verdaderas singularidades de naturaleza física. En este punto es claro, entonces, que debemos necesariamente efectuar la respectiva transformación de coordenadas que nos permita pasar del sistema de coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) al sistema de las coordenadas de Kruskal (V, U, θ, ϕ) relativo a cada horizonte específico y con esto, poder dar esta vez una descripción física que sea realmente coherente en todo el *continuo* del espacio-tiempo.

Para esto, efectuamos primero la transición del sistema esférico al de las coordenadas de Eddington-Finkelstein (E-F) las cuales vienen definidas mediante:

$$\begin{aligned} v &= t + \xi(r) \\ \mu &= t - \xi(r), \end{aligned} \quad (9)$$

donde $\xi(r)$ es la coordenada de Regge-Wheeler, también conocida como *coordenada tortuga*. Diferenciando v y μ , tras efectuar el respectivo producto y luego reemplazarlo en la forma general dada en (4) se obtiene:

$$ds^2 = -f(r)dv d\mu - f(r)\xi'^2 dr^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (10)$$

Imponiendo ahora la siguiente condición coordenada:

$$\xi'(r) = \frac{1}{f(r)}. \quad (11)$$

Reemplazando (11) en (10) obtenemos:

$$ds^2 = -f(r)dv d\mu + r^2 d\Omega^2 \quad (12)$$

y luego sustituyendo (3) en (12) finalmente se logra obtener la forma de la métrica de RNdS en las coordenadas de (E-F):

$$ds^2 = -\frac{(r-r_+)(r-r_-)(r-r'_+)}{r^2} dv d\mu + r^2 d\Omega^2. \quad (13)$$

Empleamos ahora la condición dada en (11). Sustituyendo en ella la función métrica $f(r)$, despejando e integrando obtenemos:

$$\xi(r) = \int \frac{r^2}{(r-r_+)(r-r_-)(r-r'_+)} dr, \quad (14)$$

efectuando:

$$\xi(r) = \kappa_+ \ln|r-r_+| - \kappa_- \ln|r-r_-| + \kappa'_+ \ln|r-r'_+| + CTE, \quad (15)$$

donde aquí:

$$\begin{aligned} \kappa_+ &= \frac{r_+^2}{(r_+-r_-)(r_+-r'_+)}, \\ \kappa_- &= \frac{r_-^2}{(r_+-r_-)(r_+-r'_+)}, \\ \kappa'_+ &= \frac{r_+^{\prime 2}}{(r_+-r'_+)(r_+-r'_+)}, \end{aligned}$$

con $\kappa_+, \kappa_-, \kappa'_+ = ctes.$

Ajustamos de manera adecuada la constante de integración a la forma:

$$CTE = -\kappa_+ \ln |r_+| + \kappa_- \ln |r_-| - \kappa_+ \ln |r'_+|.$$

La introducimos en la expresión (15), con esto la *coordenada tortuga* se reescribe entonces como:

$$\xi(r) = \kappa_+ \ln \left| \frac{r-r_+}{r_+} \right| - \kappa_- \ln \left| \frac{r-r_-}{r_-} \right| + \kappa_+ \ln \left| \frac{r-r'_+}{r'_+} \right|. \quad (16)$$

Por otra parte, recordando:

$$\xi(r) = \frac{1}{2}(v - \mu).$$

Comparando ambas expresiones tenemos:

$$v - \mu = 2\kappa_+ \ln \left| \frac{r-r_+}{r_+} \right| - 2\kappa_- \ln \left| \frac{r-r_-}{r_-} \right| + 2\kappa_+ \ln \left| \frac{r-r'_+}{r'_+} \right|. \quad (17)$$

A partir de aquí efectuamos la requerida transformación a las coordenadas de Kruskal (V, U, θ, ϕ) correspondiente a la métrica de RNdS, obtenida en coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ), relativa a cada uno de los 3 horizontes hallados. Así tenemos:

Para el horizonte exterior de radio r_+ :

Partimos de la relación general dada por (17), dividiéndola entre $2\kappa_+$, agrupando y despejando tenemos:

$$\frac{\left| \frac{r-r_+}{r_+} \right| \left| \frac{r-r'_+}{r'_+} \right|^{\frac{\kappa_+}{\kappa_+}}}{\left| \frac{r-r_-}{r_-} \right|^{\frac{\kappa_-}{\kappa_+}}} = e^{\frac{1}{2\kappa_+}(v-\mu)}. \quad (18)$$

Puesto que, lo que buscamos es analizar el comportamiento de la métrica del agujero negro de RNdS fuera de cada horizonte y no dentro o detrás de estos, entonces esto implica necesariamente:

$$\begin{aligned} r > r_+ &\rightarrow \left| \frac{r-r_+}{r_+} \right| = \frac{r-r_+}{r_+}, \\ r > r_- &\rightarrow \left| \frac{r-r_-}{r_-} \right| = \frac{r-r_-}{r_-}, \\ r > r'_+ &\rightarrow \left| \frac{r-r'_+}{r'_+} \right| = \frac{r-r'_+}{r'_+}. \end{aligned}$$

Reemplazando esto y efectuando se obtiene:

$$\frac{\left(\frac{r-r_+}{r_+} \right) \left(\frac{r-r'_+}{r'_+} \right)^{\frac{\kappa_+}{\kappa_+}}}{\left(\frac{r-r_-}{r_-} \right)^{\frac{\kappa_-}{\kappa_+}}} = e^{\frac{1}{2\kappa_+}v} e^{-\frac{1}{2\kappa_+}\mu}. \quad (19)$$

Con esto, las respectivas coordenadas de Kruskal relativas a este horizonte específico (V^+, U^+, θ, ϕ) vienen dadas por:

$$V^+ = e^{\frac{1}{2\kappa_+}v}, \quad (20)$$

$$U^+ = -e^{-\frac{1}{2\kappa_+}\mu}. \quad (21)$$

Con lo cual podemos asimismo expresar, recíprocamente, las coordenadas de Eddington-Finkelstein v y μ en términos de las respectivas coordenadas de Kruskal V^+ y U^+ como:

$$v = 2\kappa_+ \ln |V^+|, \quad (22)$$

$$\mu = -2\kappa_+ \ln |U^+|. \quad (23)$$

Sustituyendo (20) y (21) en la expresión (19) se obtiene:

$$V^+ U^+ = - \frac{\left(\frac{r-r_+}{r_+} \right) \left(\frac{r-r'_+}{r'_+} \right)^{\frac{\kappa_+}{\kappa_+}}}{\left(\frac{r-r_-}{r_-} \right)^{\frac{\kappa_-}{\kappa_+}}}. \quad (24)$$

Invirtiendo dicha expresión:

$$\frac{1}{V^+ U^+} = - \frac{\left(\frac{r-r_-}{r_-} \right)^{\frac{\kappa_-}{\kappa_+}}}{\left(\frac{r-r_+}{r_+} \right) \left(\frac{r-r'_+}{r'_+} \right)^{\frac{\kappa_+}{\kappa_+}}}. \quad (25)$$

Diferenciando ahora las coordenadas de Kruskal podemos obtener:

$$dvd\mu = - \frac{4\kappa_+^2}{V^+ U^+} dV^+ dU^+. \quad (26)$$

Sustituyendo luego el resultado (25) en la expresión (26) obtenemos:

$$dvd\mu = 4\kappa_+^2 \frac{(r-r_-)^{\frac{\kappa_-}{\kappa_+}} r_+ r'_+ \frac{\kappa_+}{\kappa_+}}{(r-r_+)(r-r'_+)^{\frac{\kappa_+}{\kappa_+}} r_-^{\frac{\kappa_-}{\kappa_+}}} dV^+ dU^+. \quad (27)$$

Finalmente, reemplazando el resultado (27) en la expresión (13), se obtiene el elemento de línea ds^2 que nos describe la geometría del espacio-tiempo en el exterior al horizonte de sucesos externo de radio r_+ en términos de las coordenadas de Kruskal relativas a dicho horizonte (V^+, U^+, θ, ϕ), el cual viene dado por:

$$ds^2 = -4\kappa_+^2 \frac{(r-r_-)^{1+\frac{\kappa_-}{\kappa_+}} (r-r'_+)^{1-\frac{\kappa_+}{\kappa_+}} r_+ r'_+ \frac{\kappa_+}{\kappa_+}}{r_-^{\frac{\kappa_-}{\kappa_+}} r_+^2} \times dV^+ dU^+ + r^2 d\Omega^2. \quad (28)$$

Proponiendo ahora las siguientes coordenadas de Kruskal relativas a los restantes horizontes de radios r_- y r_+ tenemos:

$$\begin{aligned} V^- &= e^{-\frac{1}{2\kappa_-}v} \\ U^- &= -e^{\frac{1}{2\kappa_-}\mu}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} V^{+'} &= e^{\frac{1}{2\kappa_+}v} \\ U^{+'} &= -e^{-\frac{1}{2\kappa_+}\mu}, \end{aligned} \quad (30)$$

y empleando el mismo procedimiento anteriormente descrito para el primer horizonte, podemos hallar la forma exacta de la métrica correspondiente a los horizontes restantes, expresada en el sistema de las coordenadas de Kruskal relativas a cada uno de ellos:

$$ds^2 = -4\kappa_-^2 \frac{(r-r_+)^{1+\frac{\kappa_+}{\kappa_-}} (r-r'_+)^{1+\frac{\kappa_+}{\kappa_-}} r_-^{\frac{\kappa_+}{\kappa_-}}}{r_+^{\frac{\kappa_+}{\kappa_-}} r'_+{}^{\frac{\kappa_+}{\kappa_-}} r^2} dV^- dU^- + r^2 d\Omega^2, \quad (31)$$

$$ds^2 = -4\kappa_+^2 \frac{(r-r_+)^{1-\frac{\kappa_+}{\kappa_+}} (r-r_-)^{1+\frac{\kappa_-}{\kappa_+}} r_+^{\frac{\kappa_-}{\kappa_+}} r'_+{}^{\frac{\kappa_-}{\kappa_+}}}{r_-^{\frac{\kappa_-}{\kappa_+}} r^2} dV^{+'} dU^{+'} + r^2 d\Omega^2. \quad (32)$$

En ciertos casos es bastante conveniente y útil expresar las coordenadas de Kruskal (V, U, θ, ϕ) empleando para este fin un nuevo sistema de coordenadas (T, X) , en donde T venga a ser la *coordenada como de tiempo* y X sea la *coordenada como de espacio*. Esta nueva forma de representar a las coordenadas de Kruskal nos permitirá trazar los diagramas de Kruskal, con el objeto de estudiar los diferentes tipos de trayectorias geodésicas que podrían ser descritas en el espacio-tiempo. Así tenemos que tales coordenadas se definen como:

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}(V+U) \\ T &= \frac{1}{2}(V-U). \end{aligned} \quad (33)$$

Con esto, las *antiguas* coordenadas de Kruskal (V, U) quedan ahora definidas en términos de este *nuevo* tipo de coordenadas (T, X) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} V &= X+T \\ U &= X-T. \end{aligned} \quad (34)$$

Con esto obtenemos:

$$dVdU = dX^2 - dT^2. \quad (35)$$

Así tenemos que, para el horizonte exterior cuyo radio es r_+ , no se pierde generalidad alguna si ahora hacemos el cambio de (V, U) por (V^+, U^+) :

$$\begin{aligned} V^+ &= X+T \\ U^+ &= X-T. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} dV^+ &= dX + dT \\ dU^+ &= dX - dT, \\ dV^+ dU^+ &= dX^2 - dT^2. \end{aligned} \quad (36)$$

Asimismo:

$$V^+ U^+ = X^2 - T^2 \quad (37)$$

y sustituyendo los resultados (36) y (37) en las expresiones (28) y (24), respectivamente, obtenemos:

$$ds^2 = -4\kappa_+^2 \frac{(r-r_-)^{1+\frac{\kappa_-}{\kappa_+}} (r-r'_+)^{1-\frac{\kappa_+}{\kappa_+}} r_+ r'_+{}^{\frac{\kappa_+}{\kappa_+}}}{r_+^{\frac{\kappa_-}{\kappa_+}} r^2} \times (-dT^2 + dX^2) + r^2 d\Omega^2, \quad (38)$$

$$T^2 - X^2 = \frac{\left(\frac{r-r_+}{r_+}\right)^{\frac{\kappa_+}{\kappa_+}} \left(\frac{r-r'_+}{r'_+}\right)^{\frac{\kappa_+}{\kappa_+}}}{\left(\frac{r-r_-}{r_-}\right)^{\frac{\kappa_-}{\kappa_+}}}. \quad (39)$$

De igual forma, empleando el mismo procedimiento señalado, las ecuaciones para el resto de los horizontes vendrán dadas por las siguientes expresiones:

Para el horizonte de Cauchy, cuyo radio es r_- :

$$ds^2 = -4\kappa_-^2 \frac{(r-r_+)^{1+\frac{\kappa_+}{\kappa_-}} (r-r'_+)^{1+\frac{\kappa_+}{\kappa_-}} r_-^{\frac{\kappa_+}{\kappa_-}}}{r_+^{\frac{\kappa_+}{\kappa_-}} r'_+{}^{\frac{\kappa_+}{\kappa_-}} r^2} \times (-dT^2 + dX^2) + r^2 d\Omega^2, \quad (40)$$

$$T^2 - X^2 = \frac{\left(\frac{r-r_-}{r_-}\right)^{\frac{\kappa_-}{\kappa_+}}}{\left(\frac{r-r_+}{r_+}\right)^{\frac{\kappa_+}{\kappa_-}} \left(\frac{r-r'_+}{r'_+}\right)^{\frac{\kappa_+}{\kappa_-}}}. \quad (41)$$

Para el horizonte cosmológico de radio r'_+ :

$$ds^2 = -4\kappa_+^2 \frac{(r-r_+)^{1-\frac{\kappa_+}{\kappa_+}} (r-r_-)^{1+\frac{\kappa_-}{\kappa_+}} r_+ r'_+{}^{\frac{\kappa_-}{\kappa_+}}}{r_-^{\frac{\kappa_-}{\kappa_+}} r^2} \times (-dT^2 + dX^2) + r^2 d\Omega^2, \quad (42)$$

$$T^2 - X^2 = \frac{\left(\frac{r-r_+}{r_+}\right)^{\frac{\kappa_+}{\kappa_+}} \left(\frac{r-r'_+}{r'_+}\right)^{\frac{\kappa_+}{\kappa_+}}}{\left(\frac{r-r_-}{r_-}\right)^{\frac{\kappa_-}{\kappa_+}}}. \quad (43)$$

Habiendo efectuado la transformación requerida de la solución exacta del agujero negro de RNdS obtenida en coordenadas esféricas al sistema de las coordenadas de Kruskal, en relación a los horizontes que envuelven a dicha singularidad, estamos listos ahora para analizar las propiedades más importantes de su estructura causal en torno a cada uno de los horizontes mencionados mediante el empleo de las coordenadas de Kruskal.

3. Estructura causal del agujero negro de RNdS en las coordenadas de Kruskal

Puesto que nos disponemos a describir la clase de trayectoria que describen las partículas sin masa en reposo sobre el espacio-tiempo, esto es la forma exacta de las geodésicas radiales nulas, debemos considerar al intervalo tipo luz en la métrica relativa al horizonte exterior de radio r_+ dada en (38) omitiendo, sin perder con ello generalidad, su respectiva parte angular. Así tenemos:

$$dT = \pm dX.$$

Integrando:

$$T = \pm X + cte, \tag{44}$$

que viene a ser la forma más general de las geodésicas radiales nulas, que nos definen la forma de las trayectorias de la luz en el espacio-tiempo curvo de RNdS en torno a su horizonte exterior de radio r_+ , expresadas en las coordenadas de Kruskal del tipo (T, X) . Luego, evaluando la relación dada por (39) en el horizonte de radio r_+ tenemos:

En el horizonte exterior: $r = r_+$

$$\begin{aligned} T^2 - X^2 &= 0, \\ T &= \pm X. \end{aligned} \tag{45}$$

Con esto tenemos que, las superficies con $r = r_+$ vienen a ser geodésicas radiales nulas cuya forma exacta, expresada en las coordenadas de Kruskal del tipo (T, X) , es dada por la expresión (45). Asimismo, aquellas superficies en las cuales la distancia r es constante y distinta al horizonte dado corresponden a hipérbolas. Esto se obtiene considerando que $r = r_0 = cte$, tal que:

$$\begin{aligned} r_0 &\neq r_+ \\ r_0 &> r_+. \end{aligned}$$

Aquí sólo se estudia el comportamiento de la métrica fuera de los horizontes y no detrás de estos. Y reemplazando esto en la expresión (39) se obtiene la ecuación de la siguiente hipérbola:

$$T^2 - X^2 = \sigma_+. \tag{46}$$

Con $\sigma_+ = cte$

$$\sigma_+ = \frac{\left(\frac{r_0 - r_+}{r_+}\right) \left(\frac{r_0 - r'_+}{r'_+}\right)^{\frac{\kappa_+}{\kappa_+}}}{\left(\frac{r_0 - r_-}{r_-}\right)^{\frac{\kappa_-}{\kappa_+}}}, \tag{47}$$

donde es fácil observar que las geodésicas radiales nulas dadas por la ecuación (45) vendrán a ser las asíntotas a estas hipérbolas en los respectivos diagramas de Kruskal.

De las relaciones dadas en (33) dividiendo ahora X y T y a continuación haciendo el cambio $(V, U) \rightarrow (V^+, U^+)$ tenemos:

$$\frac{X}{T} = \frac{V^+ + U^+}{V^+ - U^+}.$$

Reemplazando las respectivas coordenadas de Kruskal V^+ y U^+ dadas por (20) y (21), respectivamente y sustituyendo a continuación las correspondientes coordenadas de Eddington-Finkelstein dadas por (9) se obtiene:

$$\frac{X}{T} = \frac{e^{\frac{1}{2\kappa_+}t} - e^{-\frac{1}{2\kappa_+}t}}{e^{\frac{1}{2\kappa_+}t} + e^{-\frac{1}{2\kappa_+}t}},$$

de donde se obtiene directamente:

$$\frac{X}{T} = \tanh\left(\frac{1}{2\kappa_+}t\right). \tag{48}$$

Esta última expresión es la relación general para el caso específico relativo al horizonte exterior cuyo radio es r_+ .

Por otro lado, ya sabemos que las geodésicas radiales nulas descritas por aquellas señales luminosas que sean enviadas exactamente desde este mismo horizonte vienen dadas por la expresión (45):

$$T = \pm X \Leftrightarrow r = r_+.$$

Esta última relación puede ser reescrita como:

$$\frac{X}{T} = \pm 1. \tag{49}$$

Con esto, proponiendo ahora el empleo del siguiente *ansatz* de igualación entre las expresiones (48) y (49) llegamos a obtener:

$$\tanh\left(\frac{1}{2\kappa_+}t\right) = \pm 1. \tag{50}$$

Por lo tanto, la expresión (50) sólo es válida únicamente para el caso especial de aquellas señales luminosas que son enviadas o emitidas desde el horizonte de sucesos exterior de radio r_+ . Diferenciando:

$$sech^2\left(\frac{1}{2\kappa_+}t\right) dt = 0. \tag{51}$$

Al encontrarnos tratando el caso particular de las señales luminosas, recordemos que éstas se encuentran gobernadas por el intervalo *tipo-luz*, así tenemos:

$$d\tau = 0. \tag{52}$$

Luego, comparando (51) y (52) se obtiene:

$$sech^2\left(\frac{1}{2\kappa_+}t\right) dt = d\tau.$$

Integrando este resultado:

$$\int_0^{\Delta t} sech^2\left(\frac{1}{2\kappa_+}t\right) dt = \int_0^{\Delta\tau} d\tau,$$

entonces con esto:

$$\tanh\left(\frac{1}{2\kappa_+}\Delta t\right) = \frac{1}{2\kappa_+}\Delta\tau. \quad (53)$$

Aplicando ahora la respectiva función hiperbólica inversa, esto resulta finalmente:

$$\Delta t = 2\kappa_+ \tanh^{-1}\left(\frac{1}{2\kappa_+}\Delta\tau\right). \quad (54)$$

De esta última expresión podemos concluir que es posible recibir una señal que se propaga a la velocidad de la luz -de *periodo propio* $\Delta\tau$ finito y no nulo- que es enviada desde el horizonte de eventos exterior de radio r_+ al cabo de un tiempo Δt finito, sin importar cuán lejos nos encontremos de dicho horizonte específico. En consecuencia, dicha señal luminosa no presenta para tal observador lejano al horizonte desde donde fue enviada un corrimiento infinito al rojo, al resultar ser el periodo medido por este observador lejano Δt finito. Este resultado sólo es posible de obtenerse al estudiar la estructura causal asociada al horizonte exterior r_+ empleando las coordenadas de Kruskal (V^+, U^+) y (T, X) relativas a este horizonte. A diferencia del sistema esférico (t, r, θ, ϕ) en el cual -para el mismo caso físico en el que la señal es enviada desde el mismo horizonte r_+ - tan sólo se obtienen *singularidades coordenadas*, en el sistema de Kruskal, en cambio, podemos ser capaces de obtener valores regulares y finitos en todo el *continuo* del espacio-tiempo, incluyendo los propios horizontes. Esta forma de comportamiento descrita de la estructura causal Δt relativa al horizonte exterior de radio r_+ es extrapolable y se cumple de la misma manera para los demás horizontes que envuelven a la singularidad de RNdS, así tenemos:

Relativo al horizonte interior o de Cauchy de radio r_- :

$$\frac{X}{T} = -\tanh\left(\frac{1}{2\kappa_-}t\right), \quad (55)$$

si la señal es enviada desde este mismo horizonte:

$$\Delta t = 2\kappa_- \tanh^{-1}\left(\frac{1}{2\kappa_-}\Delta\tau\right). \quad (56)$$

Relativo al horizonte cosmológico de radio r'_+ :

$$\frac{X}{T} = \tanh\left(\frac{1}{2\kappa'_+}t\right), \quad (57)$$

si la señal es enviada desde el horizonte cosmológico:

$$\Delta t = 2\kappa'_+ \tanh^{-1}\left(\frac{1}{2\kappa'_+}\Delta\tau\right), \quad (58)$$

donde $\Delta\tau$ se asume en general como finito y no nulo.

De todo lo expuesto hasta aquí podemos concluir que el agujero negro de RNdS puede enviar información desde

su horizonte, capaz de ser recibida al cabo de un tiempo Δt finito por cualquier observador que se encuentre fuera de él, sin importar su lejanía espacial y por lo tanto, el estudio de su capacidad para intercambiar información con su entorno o exterior dependerá de manera crucial y fundamental del sistema de coordenadas que se emplee en dicha descripción. Siendo en tal sentido, el sistema de Kruskal el más idóneo para describir de forma consistente y coherente el comportamiento de su estructura causal.

Finalmente, de igual modo se cumple en relación a los horizontes restantes que la forma general de las geodésicas radiales nulas expresadas en las coordenadas de Kruskal del tipo (T, X) son de la forma dada por la relación (44):

$$T = \pm X + cte.$$

Mientras que, en particular, las geodésicas radiales nulas correspondientes a las superficies en las cuales se tiene que la distancia $r = r_-, r'_+$ son de la forma dada por (45):

$$T = \pm X$$

y por otro lado, análogamente a lo que teníamos para el horizonte exterior r_+ , las superficies en las cuales tenemos que la distancia r es constante y distinta a los restantes horizontes corresponden a trayectorias hiperbólicas en el espacio-tiempo de Kruskal dadas por:

$$T^2 - X^2 = \sigma_- \quad (59)$$

con

$$\sigma_- = \frac{\left(\frac{r_0 - r_-}{r_-}\right)^{\frac{\kappa_+}{\kappa_-}}}{\left(\frac{r_0 - r_+}{r_+}\right)^{\frac{\kappa_+}{\kappa_-}} \left(\frac{r_0 - r'_+}{r'_+}\right)^{\frac{\kappa'_+}{\kappa_-}}}, \quad (60)$$

$$T^2 - X^2 = \sigma'_+, \quad (61)$$

donde $\sigma_-, \sigma'_+ = ctes.$

Habiendo detallado el comportamiento de la estructura geométrica del espacio-tiempo en la vecindad del agujero negro de RNdS, podemos comenzar a estudiar el efecto que puede tener la inclusión de la constante cosmológica positiva dentro del campo gravitatorio producido por esta singularidad, mediante el estudio del comportamiento de su respectivo potencial gravitacional.

4. Potencial gravitacional

Empezamos haciendo uso de la ecuación de la geodésica que, en general, para todo espacio cuatridimensional de estructura geométrica arbitraria viene definida como:

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \mu^\mu \mu^\nu = 0,$$

con $\lambda, \mu, \nu = 0, 1, 2, 3.$

Haciendo $\lambda = i$ y $\mu = \nu = 0$ con $i = 1, 2, 3$, esto se reescribe como:

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^i (\mu^0)^2 = 0.$$

Con esto:

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + c^2 \Gamma_{00}^i \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0, \quad (62)$$

por otra parte:

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{d^2 x^i}{dt^2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right) \left(\frac{dt}{d\tau} \right) + \frac{dx^i}{dt} \frac{d^2 t}{d\tau^2},$$

pero:

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0,$$

entonces:

$$\frac{dt}{d\tau} = cte,$$

con esto:

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \vec{a}, \quad (63)$$

sustituyendo (63) en (62):

$$\left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \vec{a} + c^2 \Gamma_{00}^i \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0.$$

Dividiendo entre $\left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2$:

$$\vec{a} = -c^2 \Gamma_{00}^i. \quad (64)$$

Por otro lado:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U_g,$$

donde:

$$\begin{aligned} \phi_g &= \frac{U_g}{m}, \\ \vec{a} &= -\vec{\nabla} \phi_g, \end{aligned} \quad (65)$$

y sustituyendo (65) en (64):

$$\vec{\nabla} \phi_g = c^2 \Gamma_{00}^i, \quad (66)$$

donde esta última expresión nos muestra de manera muy elocuente y clara la equivalencia entre lo que llamamos el *potencial gravitacional* y la deformación en la geometría del espacio-tiempo, cuando nos encontramos en el caso correspondiente a la topología de un espacio *curvo*. Ahora, restringiendo i sólo a la coordenada radial r tenemos que:

Con $i = 1$:

$$\partial_1 \phi_g = c^2 \Gamma_{00}^1.$$

Puesto que ϕ_g es el potencial de un campo central:

$$\phi_g = \phi_g(r).$$

Con esto logramos deducir que:

$$\phi'_g = c^2 \Gamma_{00}^1. \quad (67)$$

Debemos observar, de manera no trivial, que si hubiésemos considerado dentro de la ecuación de la geodésica inicial las respectivas componentes tridimensionales de la cuadrivelocidad μ^μ y μ^ν la expresión (67) adoptaría la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \phi'_g &= c^2 \Gamma_{00}^1 + v^j v^k \Gamma_{jk}^1 \\ j, k &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

De tal manera que la ecuación del potencial gravitatorio ϕ_g quedaría sujeta a la expansión de las distintas componentes de la tri-velocidad v^j y v^k -que incluirían además de la velocidad radial, adicionalmente el aporte de las velocidades angulares en θ y ϕ - lo que traería como consecuencia la dependencia angular del potencial gravitacional. Sin embargo como sabemos, dado que dicho potencial viene definido por un campo de *fuerza* central, este hecho implica que sólo depende de la coordenada radial r . Siendo esta la razón física por la que se omite el aporte de la tri-velocidad en la ecuación de la geodésica.

El campo es estacionario y además la métrica de RNdS es diagonal, con esto la conexión afín se reduce tan sólo a la forma:

$$\Gamma_{00}^1 = -\frac{1}{2} g^{11} \partial_1 g_{00}.$$

Ahora bien, sabemos que en el límite Newtoniano el campo gravitatorio es débil [19,23], lo cual implica que:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \\ |h_{\mu\nu}| &\ll 1, \\ \nabla^2 \phi_g &= 4\pi G\rho \\ G_{00} &\approx \nabla^2 g_{00}, \\ |\mu^i| &= |\vec{\mu}| \ll c \\ i &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta:

$$\begin{aligned} g^{11} &= \eta^{11} + h^{11} \\ |h^{11}| &\ll 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{00} &= \eta_{00} + h_{00} \\ |h_{00}| &\ll 1, \end{aligned}$$

obtenemos:

$$\Gamma_{00}^1 = -\frac{1}{2} \eta^{11} \partial_1 h_{00}. \quad (68)$$

Asumiendo signatura $(+, -, -, -)$ en la métrica:

$$\begin{aligned} \eta^{00} &= \eta_{00} = 1 \\ \eta^{ii} &= \eta_{ii} = -1, \end{aligned}$$

tenemos:

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} \partial_1 h_{00}. \quad (69)$$

Debido a que el campo es central, entonces:

$$h_{00} = h_{00}(r),$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2}h'_{00}. \quad (70)$$

Sustituyendo (70) en (67):

$$\phi'_g(r) = \frac{1}{2}c^2 h'_{00},$$

con esto:

$$d\phi_g = \frac{1}{2}c^2 dh_{00},$$

integrando obtenemos:

$$\phi_g(r) = \frac{1}{2}c^2 h_{00} + cte.$$

Puesto que en $r \rightarrow \infty$ el potencial se anula localmente en la región asintóticamente plana del espacio-tiempo, en donde por ser la componente temporal de la perturbación h_{00} sobre la métrica de Minkowski despreciable, esto implica necesariamente la anulación de la constante de integración:

Para $r \rightarrow \infty$:

$$\phi_g(r)|_{r \rightarrow \infty} = h_{00}(r)|_{r \rightarrow \infty} \approx 0,$$

por tanto:

$$cte \approx 0,$$

con esto:

$$\phi_g(r) = \frac{1}{2}c^2 h_{00}.$$

Es decir:

$$h_{00} = \frac{2\phi_g(r)}{c^2}, \quad (71)$$

pero:

$$h_{00} = g_{00} - 1, \quad (72)$$

sustituyendo (72) en (71):

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi_g(r)}{c^2}. \quad (73)$$

Notar que si adoptamos en esta última expresión el potencial de Newton, la componente temporal de la métrica g_{00} resulta siendo la correspondiente a la del caso de Schwarzschild. No obstante, la expresión dada en (73) constituye una definición bastante general, extrapolable a todo campo gravitatorio que, siendo producido por una distribución estática y esféricamente simétrica, se defina como un campo débil y estacionario [19, 23]. Empleando luego la solución de RNdS con la misma signatura (+, -, -, -):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) dt^2 + g_{ii}(dx^i)^2. \quad (74)$$

Por otro lado, expandiendo el elemento de línea ds^2 , en unidades naturales, sabemos que:

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{ii}(dx^i)^2. \quad (75)$$

Comparando (74) con (75) despejamos la componente temporal de la métrica:

$$g_{00} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2. \quad (76)$$

Reemplazando la expresión (76) en (73) (expresandola ahora en unidades naturales con $c = 1$), obtenemos finalmente:

$$\phi_g(r) = -\frac{M}{r} + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{6}r^2. \quad (77)$$

Invirtiendo ahora la signatura y considerando en cambio (-, +, +, +), tenemos que:

$$\eta^{00} = \eta_{00} = -1 \\ \eta^{ii} = \eta_{ii} = 1,$$

reemplazando esto en (68):

$$\Gamma_{00}^1 = -\frac{1}{2}h'_{00},$$

reemplazando esto en (67):

$$\phi'_g(r) = -\frac{1}{2}c^2 h'_{00},$$

integrando:

$$\phi_g(r) = -\frac{1}{2}c^2 h_{00} + cte.$$

Del mismo modo, en el infinito se tiene que satisfacer que:

$$\phi_g = h_{00} \approx 0,$$

entonces $cte \approx 0$. Con esto:

$$\phi_g(r) = -\frac{1}{2}c^2 h_{00}.$$

Despejando h_{00} :

$$h_{00} = -\frac{2\phi_g(r)}{c^2},$$

donde ahora:

$$h_{00} = g_{00} + 1,$$

reemplazando este resultado en la expresión anterior:

$$g_{00} = -(1 + 2\phi_g(r)). \quad (78)$$

Luego, con la misma convención de signatura (-, +, +, +) expresamos el elemento de línea ds^2 correspondiente a RNdS:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) dt^2 + g_{ii}(dx^i)^2,$$

análogamente al caso anterior, comparando esta última expresión con la expansión del elemento de línea:

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{ii}(dx^i)^2,$$

se obtiene:

$$g_{00} = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right),$$

sustituyendo este resultado en la ecuación (78) obtenemos nuevamente el potencial gravitacional de RNdS $\phi_g(r)$ deducido en la expresión (77):

$$\phi_g(r) = -\frac{M}{r} + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{6} r^2.$$

Por lo tanto, el potencial gravitacional en el exterior del agujero negro de RNdS obtenido es invariante y por tanto independiente de la convención de signatura que se adopte. Se obtiene el mismo resultado dado por la expresión (77), tanto empleando la convención $(+, -, -, -)$ correspondiente a una contracción par del tensor de Riemann que da como resultado ecuaciones de campo de la forma $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$ (M. P. Hobson, pag 180, [19]), como utilizando la convención $(-, +, +, +)$ correspondiente a una contracción impar del tensor de Riemann que da como resultado, por el contrario, ecuaciones de campo cuya forma es $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$ (J. B. Hartle, pag 480, [20]).

Si ahora derivamos $\phi_g(r)$ tenemos que:

$$\phi'_g = \frac{M}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3} - \frac{\Lambda}{3} r,$$

con esto:

$$d\phi_g = \left(\frac{M}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3} - \frac{\Lambda}{3} r \right) dr,$$

integrando:

$$\phi_g(r) = -\frac{M}{r} + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{6} r^2 + cte. \quad (79)$$

Con lo cual restituimos la expresión (77) anteriormente obtenida, pero incluyendo esta vez adicionalmente una constante de integración arbitraria, la cual podemos *calibrar* o escoger a conveniencia del siguiente modo:

Haciendo:

$$cte = \frac{\Lambda}{6} M^2. \quad (80)$$

Finalmente, sustituyendo (80) en (79) obtenemos:

$$\phi_g(r)^{(RNdS)} = -\frac{M}{r} + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{r^2} + \frac{\Lambda}{6} (M^2 - r^2). \quad (81)$$

5. Resultados y discusión

Se muestran dos formas distintas de diagramas de Penrose para el espacio-tiempo curvo en el exterior de la singularidad de RNdS obtenidas mediante compactificación conforme (figura 1 y 2):

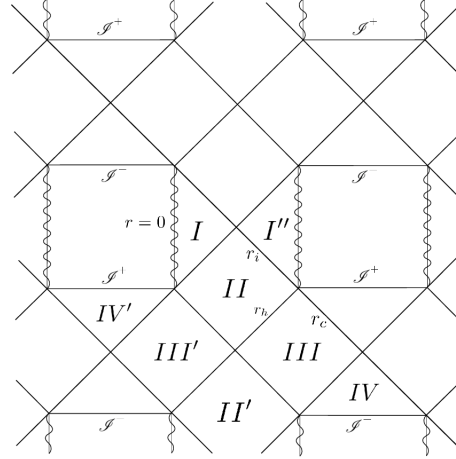


Figura 1: Diagrama de Carter-Penrose para el agujero negro de RNdS no extremal, obtenido por compactificación conforme, cuyos horizontes son: el horizonte interno o de Cauchy r_i , el horizonte exterior r_h y el horizonte cosmológico r_c . [15].

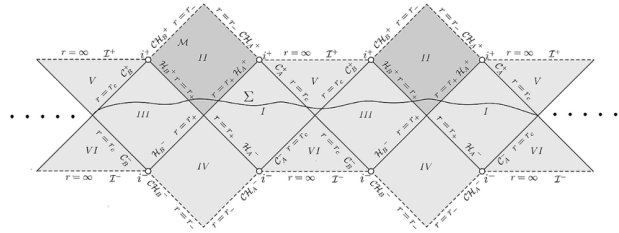


Figura 2: Diagrama de Penrose del espacio-tiempo de RNdS. [16].

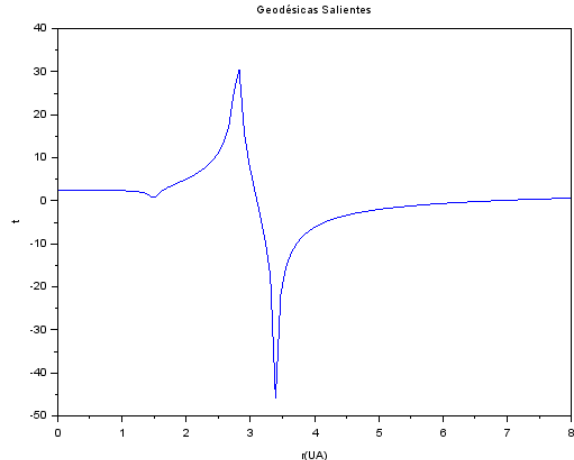


Figura 3: Comportamiento de las geodésicas radiales nulas salientes en coordenadas esféricas alrededor del horizonte de Cauchy con $r_- = 1.5$ UA, horizonte exterior con $r_+ = 2.8$ UA y horizonte cosmológico con $r'_+ = 3.4$ UA. Observamos cómo las trayectorias luminosas parten de los conos de luz, correspondientes a cada uno de los 3 puntos de intersección, y se extienden hacia el infinito.

A continuación, el comportamiento de las geodésicas para partículas sin masa en reposo en torno a los tres horizontes de la singularidad de RNdS considerada, se muestra en las figuras 3 y 4:

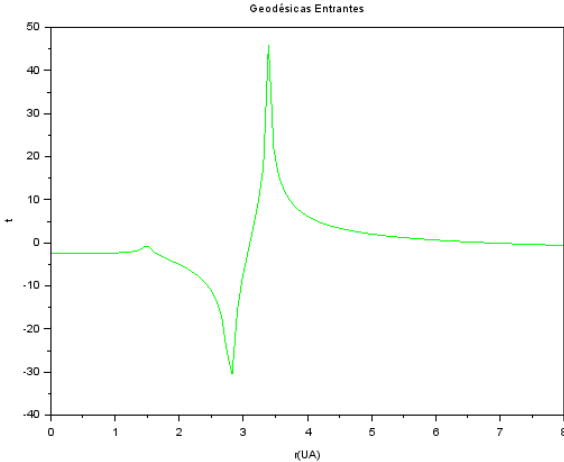


Figura 4: Comportamiento de las geodésicas radiales nulas entrantes en coordenadas esféricas. Podemos observar cómo las trayectorias luminosas llegan desde el infinito y se incrustan en los respectivos conos de luz correspondientes al mismo horizonte de Cauchy con $r_- = 1.5$ UA, horizonte exterior con $r_+ = 2.8$ UA y horizonte cosmológico con $r'_+ = 3.4$ UA.

Finalmente, respecto al comportamiento que exhibe el potencial gravitatorio de RNdS en los límites de Λ pequeño ($\Lambda \ll 1$) y grande ($\Lambda \gg 1$), respectivamente, tenemos que:

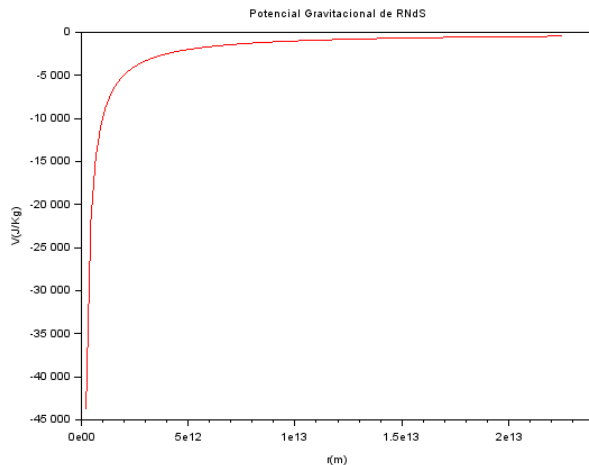


Figura 5: Comportamiento del potencial gravitacional de RNdS para valores muy pequeños de $\Lambda > 0$. Podemos observar que, debido a que el orden de magnitud del parámetro cosmológico es muy pequeño ($\Lambda \ll 1$), el potencial gravitatorio de RNdS se reduce estrictamente al potencial Newtoniano $-\frac{M}{r}$. Es decir, su valor varía en razón inversa con la distancia y siendo negativo a lo largo de todo su recorri-

do denota la presencia de un campo gravitatorio de carácter únicamente atractivo. Donde aquí: $M = 9.94235 \times 10^{15}$ kg, $Q = 2.3 \times 10^{10} C$, $\Lambda = 1.1056 \times 10^{-52} \text{ m}^{-2}$, para una distancia $0 \leq r \leq 2.25 \times 10^{13}$ m.

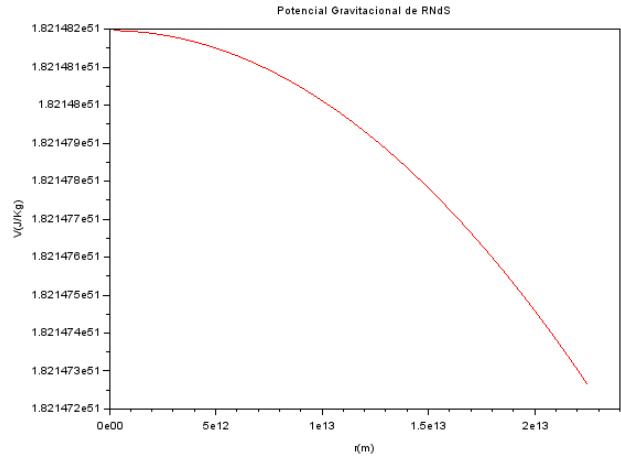


Figura 6: Para ordenes de magnitud apreciables de $\Lambda > 0$ ($\Lambda \gg 1$), por el contrario, podemos observar que el potencial gravitatorio de RNdS se encuentra asociado a un campo de efecto repulsivo al ser positivo en todo su recorrido. No obstante, decrece lentamente a medida que aumenta la distancia a lo largo de su respectivo comportamiento de tipo parabólico. Donde se considera aquí $\Lambda = 1.1056 \times 10^{20} \text{ m}^{-2}$, $M = 9.94235 \times 10^{15}$ kg, para una distancia $0 \leq r \leq 2.25 \times 10^{13}$ m.

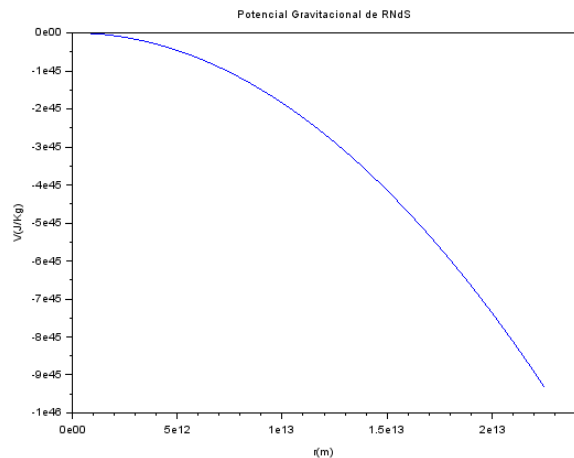


Figura 7: Para ordenes de magnitud muy grandes de $\Lambda > 0$ podemos apreciar, en cambio, que cuando $M < r$ el potencial gravitatorio de RNdS adopta un comportamiento tipo anti-De Sitter (AdS), dado que al mostrar tener una polaridad únicamente negativa a lo largo de todo su comportamiento de tipo parabólico, se encuentra definido por un campo gravitacional de efecto atractivo. Donde aquí consideramos $M = 9.94235 \times 10^{10}$ kg, $\Lambda = 1.1056 \times 10^{20} \text{ m}^{-2}$, para una distancia $0 \leq r \leq 2.25 \times 10^{13}$ m.

6. Conclusiones

1. El elemento de línea ds^2 , que describe el comportamiento de la geometría del espacio-tiempo en el exterior del agujero negro de RNdS, se convierte en una singularidad y diverge en los 3 horizontes de sucesos de radios r_+ , r_- y r_+ , que envuelven, aíslan o que protegen causalmente a dicha singularidad, cuando éste elemento de línea se encuentra expresado y definido en el sistema de las coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) . No obstante, resulta siendo finito y regular al evaluarlo en los 3 horizontes señalados, cuando se le expresa y define en el sistema de las coordenadas de Kruskal relativas a cada uno de estos respectivos horizontes: (V^+, U^+, θ, ϕ) , (V^-, U^-, θ, ϕ) , $(V^{+'}, U^{+'}, \theta, \phi)$ y así como también cuando se le expresa y analiza en el sistema de las coordenadas *como de tiempo* y *como de espacio* (T, X) . Presentando, en general, la forma de comportamiento descrita y señalada aquellas métricas correspondientes a agujeros negros estáticos y esféricamente simétricos tales como los de Schwarzschild [8, 9] y así como también el caso sub-extremal de Reissner-Nordstrom (RN) [7, 9, 14].

2. Es posible enviar información a la velocidad de la luz desde todos y cada uno de los 3 horizontes de sucesos que envuelven al agujero negro de RNdS y recibirla en cualquier punto del espacio-tiempo arbitrariamente lejano a cualesquiera de los horizontes mencionados, en un intervalo de tiempo Δt finito. Sin importar cuán lejos se encuentre el punto de recepción señalado, para cualquier observador que se encuentre ubicado en él, la señal que contiene tal información no presenta un corrimiento infinito al rojo, debido a que dicho observador es capaz de medir un período Δt finito correspondiente a dicha señal.

3. Este resultado sólo es posible de obtenerse mediante el auxilio y empleo de las coordenadas de Kruskal relativas a cada uno de los 3 horizontes mencionados, contrastando esto, de manera radical y fundamental, con el resultado predicho mediante el empleo de las coordenadas esféricas. El cual predice, en cambio, la imposibilidad del intercambio de información con los horizontes que envuelven a todo agujero negro estático y esféricamente simétrico (tal como corresponde a los casos típicos de Schwarzschild, sub-extremal de Reissner-Nordstrom e incluyendo también al referente de RNdS) en cuyos casos tenemos que el observador lejano a la singularidad jamás recibe la señal que contiene la información enviada desde su horizonte en un intervalo de tiempo Δt finito, puesto que para dicho observador tal señal presenta un corrimiento al rojo infinito.

4. De todo lo anteriormente expuesto se concluye que el comportamiento que presenta la estructura causal en torno a los horizontes del agujero negro de RNdS depende de manera crucial y fundamental del sistema de coor-

denadas que se emplea para describirla. De tal manera que, las singularidades que se obtienen en la descripción del comportamiento tanto de la métrica ds^2 , así como de la estructura causal Δt en torno a los respectivos horizontes de agujeros negros estáticos y esféricamente simétricos, tales como el de RNdS, son el resultado única y exclusivamente del sistema de coordenadas que se utiliza para describirlos. Con esto, tales singularidades obtenidas constituyen singularidades de naturaleza únicamente coordinada, mas no propiamente física. Por lo tanto, el sistema coordinado más idóneo que es capaz de lograr una descripción física coherente de la estructura causal en torno a cada uno de los horizontes del agujero negro de RNdS, evadiendo o *levantando* con ello tales singularidades coordinadas, viene a ser el sistema de las coordenadas de Kruskal $(V, U - T, X)$.

5. Mediante el empleo de las coordenadas de Kruskal del tipo *como de tiempo* y *como de espacio* (T, X) podemos obtener la forma exacta de las geodésicas radiales nulas, que nos definen las trayectorias que describen las partículas carentes de masa en reposo, sobre el espacio-tiempo en torno a cada uno de los 3 horizontes que envuelven al agujero negro de RNdS. A este respecto, las superficies en las cuales la distancia r -medida desde la propia singularidad de RNdS- a la cual son emitidas o enviadas tales señales luminosas, es $r = r_+, r_-, r_+$, corresponden a geodésicas radiales nulas de la forma específica $T = \pm X$.

6. Las superficies en las cuales dicha distancia r es constante y distinta al radio de cualquiera de estos 3 horizontes corresponden a trayectorias hiperbólicas sobre el espacio-tiempo, cuyas asíntotas vienen a ser las geodésicas radiales nulas de la forma $T = \pm X$ anteriormente definidas y señaladas.

7. En el límite de los ordenes de magnitud muy pequeños de $\Lambda > 0$ el potencial en el exterior del agujero negro de RNdS se reduce al potencial de Newton $-\frac{M}{r}$, de modo tal que dicho potencial nos define un campo gravitacional atractivo y cuya intensidad disminuye a medida que se incrementa la distancia.

8. Por otro lado, en el límite de los ordenes de magnitud muy grandes de $\Lambda > 0$ el potencial gravitacional de RNdS se reduce al potencial gravitatorio debido exclusivamente a la presencia de la constante cosmológica positiva, en cuyo caso tenemos que su comportamiento se encuentra sujeto a la masa M del agujero negro referido. Así tenemos que cuando $M > r$ el potencial corresponde a un campo gravitatorio de efecto manifiestamente repulsivo (mostrando con esto características propias de un espacio-tiempo tipo De Sitter), en cambio, cuando $M < r$ dicho potencial nos define un campo gravitacional de carácter atractivo.

Referencias

- [1] G. J. Galloway. *Cosmological spacetimes with $\Lambda > 0$* . Department of mathematics, University of Miami, USA, (2016).
- [2] A. H. Abbassi, S. Abbassi and A.M. Abbassi. *General spherically symmetric solutions of Einstein vacuum field equations with Λ* . Department of physics, school of sciences, Tarbiat Modarres University, Tehran, I. R. Iran, (2002).
- [3] L. Nuñez, H. Rago y L. Aulestia. *Modificación a la métrica de Reissner-Nordstrom en una cosmología de Einstein-De Sitter*. Departamento de física, Facultad de ciencias, Universidad de Los Andes, Venezuela, (1983).
- [4] N. Ozdemir. *Spherical symmetric charged solution with cosmological constant*. <https://arxiv.org/pdf/0711.4732.pdf>, (2007).
- [5] H. Laue and M. Weiss. *Maximally extended Reissner-Nordstrom manifold with cosmological constant*. Physical Review, vol. 16, No. 12, (1977).
- [6] K. Lake. *Reissner-Nordstrom De Sitter metric, the third law, and cosmic censorship*. Physical Review, vol. 19, No.2, (1979).
- [7] A. Borchers Pascual. *Global properties of charged black holes with cosmological constant*. Universidad del País Vasco, España, (2019).
- [8] E. A. Larrañaga. *Agujeros negros clásicos*. (2008).
- [9] J. M. Pérez Poyatos. *Estudio comparativo de diferentes tipos de agujeros negros*. Universidad de Granada, España, (2016).
- [10] U. E. Molina Redondo, D. Tovar, I. S. De León, Y. C. Arteta Pena. *Influencia de la constante cosmológica en el ángulo de deflexión de una lente gravitacional*. Ingeniare, Universidad Libre-Barranquilla, No. 16, pag: 39-46, (2014).
- [11] C. Miranda, U. Molina y P. Viloria. *Retardo temporal en las lentes por galaxias en el contexto de Reissner-Nordstrom*. Revista Mexicana de física, vol. 60, pag: 190-194, (2014).
- [12] C. S. Negrelli. *Agujero negro regular en la geometría de Schwarzschild-De Sitter*. Universidad Nacional de La Plata, Argentina, (2014).
- [13] Sanjeev S. Seahra. *An introduction to black holes*. (2006).
- [14] H. S. Reall. *Part 3 Black holes*. Lecture Notes given as part of the Cambridge University Mathematical Tripos, (2014).
- [15] G. Dotti, J. M. Fernández Tío. *Black hole nonmodal linear stability: even perturbations in the Reissner-Nordstrom case*. Phys.Rev.D 101, 024034. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.101.024034>, (2020).
- [16] J. L. Costa, P. Girao. *Higher order linear stability and instability of Reissner-Nordstrom's Cauchy horizon*. Analysis and Mathematical Physics 10(3). <https://arxiv.org/pdf/1902.10726.pdf>, (2020).
- [17] Z. Stuchlík, S. Hledík. *Properties of the Reissner-Nordstrom spacetimes with a nonzero cosmological constant*. Acta physica slovacica, vol. 52, No. 5, 363-407, (2002).
- [18] D. Kastor, J. Traschen. *Cosmological multi-black hole solutions*. <https://arxiv.org/pdf/hep-th/9212035.pdf>, (1992).
- [19] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou and A. N. Lasenby. *General relativity: An introduction for physicists*. Cambridge University Press, (2006).
- [20] J. B. Hartle. *Gravity: An introduction to Einstein's general relativity*. Addison Wesley, (2003).
- [21] C. González and B. Koch. *Improved Reissner-Nordstrom-(A)dS black hole in asymptotic safety*. International Journal of Modern Physics A, Vol. 31, No. 26, Doi: <https://doi.org/10.1142/S0217751X16501414>, (2016).
- [22] M. Mokdad. *Conformal scattering of Maxwell fields on Reissner-Nordstrom-De Sitter black hole spacetimes*. Annales de L'Institut Fourier. Université Grenoble Alpes, 69, 5, 2291-2329, (2019).
- [23] L. D. Landau y E. M. Lifshitz. *Teoría clásica de los campos*. Vol. 2 del Curso de Física Teórica, Editorial Reverté, Barcelona, España, (2008).