


## Simulación numérica de trayectorias de proyectiles: Influencia de la fuerza de arrastre

 Marco Merma<sup>\*1</sup>, Oscar Monroy<sup>1</sup> y Miguel Castillo<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú

Recibido 8 Nov 2023 – Aceptado 20 Jul 2024 – Publicado 01 Ago 2024

### Resumen

Este estudio se centró en una simulación numérica para describir las trayectorias de proyectiles en dos escenarios clave: movimiento en el espacio libre y movimiento en presencia de fuerzas de arrastre. Se utilizó un modelo simplificado de proyectil, representado como una esfera con radio  $r$  y masa  $m$ . La simulación se basó en el método de Euler-Richardson para calcular las posiciones a lo largo del tiempo. Los resultados del estudio destacan que las diferencias en los alcances horizontal y vertical están estrechamente vinculadas al tamaño y la masa del proyectil. Además, se demostró que la forma y el tamaño del proyectil influyen en la magnitud de la resistencia del aire, lo que afecta la trayectoria general. Este enfoque proporciona una comprensión práctica de cómo la fuerza de arrastre incide en el movimiento de los proyectiles.

**Palabras clave:** Enseñanza de la física, movimiento de proyectiles, fuerza de arrastre.

### Numerical simulation of projectile trajectories: Influence of drag force

#### Abstract

This study focused on a numerical simulation to describe projectile trajectories in two key scenarios: motion in free space and motion in the presence of drag forces. A simplified projectile model was used, represented as a sphere with radius  $r$  and mass  $m$ . The simulation was based on the Euler-Richardson method to calculate positions over time. The results of the study highlight that the differences in horizontal and vertical ranges are closely linked to the size and mass of the projectile. Additionally, the shape and size of the projectile was shown to influence the magnitude of air resistance, which affects the overall trajectory. This approach provides a practical understanding of how the drag force affects projectile motion.

**Keywords:** Physics teaching, projectile motion, drag force.

### Introducción

El movimiento de los proyectiles es un tema comúnmente estudiado en los primeros ciclos universitarios en las especialidades de ciencias básicas e ingeniería y se suele utilizar el modelo idealizado, es decir, se considera solamente el movimiento del objeto sin tener en cuenta la fuerza de arrastre que pueda intervenir en su movimiento.

La trayectoria de un proyectil puede ser analizada desde una perspectiva cinemática, es decir, estudiando las características del movimiento sin tener en cuenta las

causas que lo producen, o desde una perspectiva dinámica, estudiando las fuerzas que actúan sobre el objeto y su influencia en su movimiento.

La fuerza de arrastre en los proyectiles puede afectar su trayectoria y su alcance, porque cuando se incrementa la velocidad del proyectil, la fuerza de arrastre también se hace mayor actuando sobre él, en consecuencia, se tiene una disminución de su velocidad.

Se han llevado a cabo investigaciones en la enseñanza de la física relacionadas con el movimiento de proyectiles. Estas investigaciones se han enfocado en estudiantes de licenciatura y posgrado, buscando mejorar su compren-

\*mmermaj@unmsm.edu.pe

© Los autores. Este es un artículo de acceso abierto, distribuido bajo los términos de la licencia Creative Commons Atribución 4.0 Internacional (CC BY 4.0) que permite el uso, distribución y reproducción en cualquier medio, siempre que la obra original sea debidamente citada de su fuente original.



sión cualitativa y cuantitativa del tema. Una de las investigaciones incorporó la fuerza de arrastre [1], así mismo han utilizado una aplicación de teléfono celular para que los estudiantes siguieran la trayectoria de un proyectil en el contexto del baloncesto, comparando los resultados con predicciones teóricas que incluían la resistencia del aire [2].

Otras investigaciones se enfocaron en como los estudiantes universitarios perciben los cambios y constantes en los vectores relacionados con el movimiento de proyectiles a través de la interpretación de trayectorias. Estas investigaciones emplearon un simulador de acceso libre con estudiantes de primer año de física universitaria [3], así mismo el uso se ha mostrado que el uso de simuladores contribuye al desarrollo de habilidades específicas en los estudiantes y mejora algunas habilidades relacionadas con la organización del trabajo [4].

Además, se han realizado estudios analizando las ecuaciones del movimiento para proyectiles en periodos de tiempo cortos y largos, incluyendo cálculos numéricos para comparar con soluciones analíticas y analizar la fuerza de arrastre del fluido [5]. Por otro lado se investigó la solución analítica de la ecuación del movimiento en condiciones de un medio libre y con presencia de fuerza de arrastre a través de la derivada conformable, una herramienta matemática [6]. Adicionalmente, se modelaron numéricamente las ecuaciones de movimiento mediante el método de Euler para estudiar el efecto de la fuerza de arrastre en el movimiento [7].

Otra línea de investigación abordó la dinámica de objetos esféricos en caída vertical en presencia del aire, considerando la fuerza de arrastre y comparando los resultados con el modelo teórico de la caída libre [8].

En el ámbito de las actividades deportivas, se ha prestado atención a las trayectorias de las pelotas de golf, tanto con o sin sustentación. Se investigaron las trayectorias que implican fuerzas de sustentación y arrastre lineal para determinar los ángulos de proyección óptimos en deportes como el golf [9].

Además, se examinó la trayectoria de un proyectil cuando la fuerza de arrastre es proporcional al cuadrado de la velocidad. Esta investigación utilizó fórmulas analíticas simplificadas para identificar los parámetros fundamentales que rigen el movimiento de proyectiles [10].

En esta investigación, se implementó un algoritmo numérico para analizar la trayectoria de proyectiles. El medio donde se realiza el movimiento se encuentra inmerso en un fluido homogéneo con densidad  $\rho = 1.92 \text{ kg/m}^3$ , asumiendo que está sin perturbaciones. El proyectil se considera de forma esférica, con un coeficiente de arrastre conocido  $C = 0.45$  adimensional, y la gravedad se mantiene constante en  $9.81 \text{ m/s}^2$ . No se considera el efecto del movimiento de rotación de la Tierra, el proyectil no sufre deformaciones, ni se tiene en cuenta el efecto de su propia rotación.

## Metodología

La trayectoria de un proyectil que es lanzado se mueve a través del aire, un caso es considerar que el efecto de la fuerza de arrastre del aire no se considera y el otro caso es cuando esta si se considera.

## Movimiento de proyectiles en el espacio libre

Para describir la trayectoria de un proyectil sin considerar el tamaño de la partícula ni la forma se utilizan las ecuaciones que relacionan las posiciones horizontal y vertical en todo instante del tiempo.

En la Figura 1 se muestran un esquema donde se aprecian los elementos para describir el movimiento de los proyectiles desde el punto de vista del observador que está localizado en el origen de coordenadas.

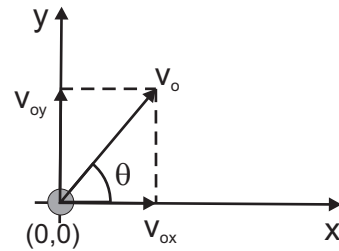


Figura 1: Elementos del movimiento de proyectiles en el espacio libre.

$$y = v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (1)$$

$$x = v_{ox}t \quad (2)$$

Donde  $y$  es la posición vertical en cualquier instante del tiempo,  $x$  la posición horizontal,  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $v_{oy}$  es la magnitud la velocidad vertical,  $v_{ox}$  es la componente de la velocidad horizontal,  $\theta$  es ángulo de lanzamiento medido respecto del horizonte, tal que  $0^\circ < \theta < 90^\circ$ . La magnitud de la velocidad resultante  $v$ , así como los alcances vertical y horizontal están dadas por las ecuaciones.

$$v = \sqrt{v_{ox}^2 + v_{oy}^2} \quad (3)$$

$$y = \frac{v_o^2 \text{sen}^2 \theta}{2g} \quad (4)$$

$$x = \frac{v_o^2 \text{sen} 2\theta}{g} \quad (5)$$

## Movimiento de proyectiles con presencia de fuerza de arrastre

La fuerza de arrastre es la resistencia que experimenta un objeto al desplazarse a través de un fluido, como el aire o el agua. Se trata de una fuerza aerodinámica o

hidrodinámica que se opone al movimiento y es consecuencia de la fricción entre el fluido y la superficie del objeto. La magnitud de la fuerza de arrastre varía en función de la velocidad, la forma del objeto, la densidad y viscosidad del fluido, así como la rugosidad de la superficie del objeto.

La resistencia generada por el aire implica una fuerza de arrastre significativa que debe tenerse en cuenta en el movimiento de los cuerpos. Para evaluar su influencia, es fundamental cuantificar su importancia. En el caso de cuerpos en movimiento a través del aire, la fuerza  $f$  que se opone a la velocidad  $v$  es una buena aproximación. Esta aproximación es válida dado que está relacionada con la forma del objeto [11].

$$f = f(v) \quad (6)$$

Las fuerzas sobre el proyectil están dadas por la suma del peso y la fuerza de arrastre del medio en la cual se mueve el proyectil, es decir

$$F = f + f_g \quad (7)$$

Donde  $f_g = mg$  es la fuerza gravitatoria,  $m$  la masa del proyectil,  $g$  el valor de la aceleración de la gravedad.

Considerando la forma del proyectil con forma esférica y la fuerza de arrastre  $f$  proporcional con el cuadrado de la velocidad

$$f = Dv^2 \quad (8)$$

donde  $D = (1/2m)C\rho A$ ,  $\rho$  es la densidad del fluido,  $C$  es el coeficiente de arrastre que depende de la forma del cuerpo,  $A$  es la sección transversal del cuerpo perpendicular a la dirección del movimiento respecto del fluido,  $v$  es la magnitud de la velocidad [12]. Con  $\alpha$  ángulo respecto de la horizontal para la velocidad en cada punto de la trayectoria, las ecuaciones del movimiento en presencia de la fuerza de arrastre están dadas por

$$m \frac{dv_y}{dt} = -mg - f \cos \alpha \quad (9)$$

$$m \frac{dv_x}{dt} = -f \sin \alpha \quad (10)$$

Estas ecuaciones se pueden expresar en términos de la velocidad y sus componentes en la horizontal y vertical, con  $D = (1/2m)\rho C A$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - Dvv_y \quad (11)$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -Dvv_x \quad (12)$$

Las velocidades en la horizontal y vertical están relacionadas por la expresión  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

## Simplificaciones

En esta investigación se implementó un algoritmo numérico a través del cual se analizó la trayectoria de proyectiles, con las siguientes consideraciones:

Se ha considerado un medio homogéneo sin perturbación: La asunción de un medio homogéneo sin perturbaciones es común en simulaciones numéricas para simplificar el modelo. Sin embargo, es importante reconocer que, en la realidad, el medio ambiente puede tener variaciones que afecten la trayectoria.

Forma esférica del proyectil: La consideración de que el proyectil tiene forma esférica simplifica los cálculos, pero es importante tener en cuenta que, en aplicaciones reales, los proyectiles pueden tener formas más complejas que pueden influir en la resistencia del aire y la trayectoria.

Valor constante de la gravedad: La asunción de que la gravedad es constante simplifica los cálculos, pero en ubicaciones geográficas muy diferentes, la gravedad puede variar ligeramente.

No se considera el efecto del movimiento de rotación de la Tierra: Para distancias cortas, el efecto de la rotación de la Tierra en la trayectoria de un proyectil es mínimo y, por lo tanto, se puede despreciar en muchos casos. Sin embargo, en análisis extremadamente precisos, este efecto puede ser relevante.

Movimiento en un plano bidimensional: La limitación a un plano bidimensional es común en este tipo de análisis para simplificar el problema. Esto es válido si se supone que el proyectil no se desvía significativamente fuera del plano.

Proyectil no está afectado por deformaciones: Esta asunción es razonable en muchas situaciones, especialmente para proyectiles sólidos. Sin embargo, para objetos más flexibles, como balones inflados, las deformaciones pueden ser relevantes.

No se considerara el efecto de la rotación del proyectil: Nuevamente, esta asunción simplifica el análisis, pero en algunos casos, especialmente cuando la rotación afecta la estabilidad del proyectil, puede ser necesario considerarla.

El algoritmo numérico ha sido implementado utilizando el lenguaje de programación GNU Octave [13], así mismo para el análisis gráfico de los datos obtenidos de la simulación numérica.

## Error porcentual

Para cuantificar la diferencia entre el modelo idealizado y el modelo que incluye fuerza de arrastre se utiliza el error porcentual dado por la expresión

$$E_{\%} = \left| \frac{\text{Valor referencia} - \text{Valor medido}}{\text{Valor medido}} \right| \times 100 \% \quad (13)$$

### Método de Euler-Richardson

La idea se basa en el método de Euler [14], se utiliza comúnmente para abordar fuerzas dependientes de la velocidad. Este método implica calcular una posición y velocidad intermedia entre dos puntos, representadas como  $x_{mid}$  y  $v_{mid}$  respectivamente, que corresponden al tiempo  $t_{mid}$ . El tiempo intermedio se determinan mediante la expresión:

$$t_{mid} = t + \frac{\Delta t}{2} \quad (14)$$

Luego se determina la fuerza en términos de la posición, velocidad y tiempo,  $F = F(x_{mid}, v_{mid}, t_{mid})$ , consecuentemente la aceleración  $a_{mid} = F/m$  donde  $m$  es la masa, todo esto en el tiempo  $t_{mid}$ . Las expresiones para la posición y velocidad intermedias son:

$$x_{mid} = x_n + \frac{1}{2}a_n\Delta t \quad (15)$$

$$v_{mid} = v_n + \frac{1}{2}a_n\Delta t \quad (16)$$

Los nuevos valores de la posición velocidad, tiempo son

$$v_{n+1} = v_n + a_{mid}\Delta t \quad (17)$$

$$x_{n+1} = x_n + v_{mid}\Delta t \quad (18)$$

Este método de Euler-Richardson utiliza dos pasos. En primer lugar, se calcula una estimación intermedia utilizando el método de Euler estándar para avanzar la solución desde un punto inicial al punto medio del intervalo de tiempo. Luego, se utiliza esta estimación intermedia para calcular una nueva estimación utilizando el método de Euler desde el punto medio hasta el siguiente punto en el tiempo.

### Diagrama de flujo

Se inicializa varias variables antes de abordar dos escenarios distintos: uno para el movimiento en el espacio libre y otro para el movimiento en presencia de la fuerza de arrastre. Estas variables iniciales incluyen la velocidad de lanzamiento ( $v_o$ ), las posiciones ( $x$  e  $y$ ), el ángulo de lanzamiento ( $\theta$ ), la masa ( $m$ ) y el radio ( $r$ ). En cada uno de estos casos, se calculan nuevos valores para estas magnitudes, así como para las componentes de la velocidad ( $v_x$  y  $v_y$ ). Posteriormente, estos nuevos valores se registran para su análisis posterior, abarcando las posiciones ( $x$  e  $y$ ), las componentes de la velocidad ( $v_x$  y  $v_y$ ), la magnitud de la velocidad resultante ( $v$ ), el tiempo ( $t$ ) y el ángulo de lanzamiento ( $\theta$ ).

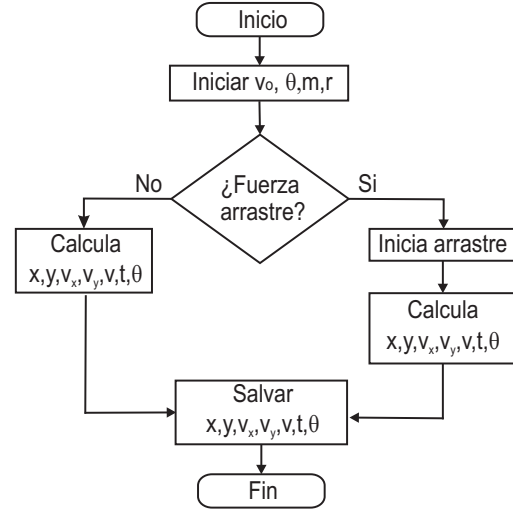


Figura 2: Diagrama de flujo del modelo numérico

### Resultados

Para el caso donde el proyectil como un punto donde las posiciones en la horizontal y vertical están dadas por las ecuaciones (1) y (2).

Utilizando el algoritmo implementado, se han obtenido las trayectorias para un proyectil que fue lanzado, con ángulos de  $\theta = 25^\circ, 30^\circ, 35^\circ, 40^\circ$  y  $45^\circ$  con magnitud de la velocidad de lanzamiento  $v_o = 25$  m/s.

En la Figura 3 se puede observar las trayectorias del proyectil, para ángulos de lanzamiento que se incrementa, la altura y el alcance horizontal también lo hacen, ocurriendo para el ángulo  $45^\circ$  el máximo alcance horizontal.

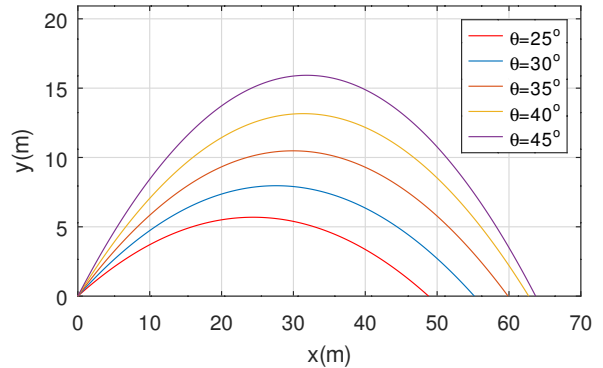
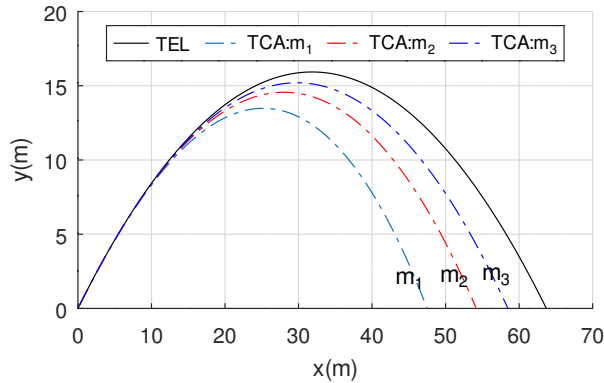


Figura 3: Trayectoria de un proyectil para diferentes ángulos de lanzamiento y velocidad de lanzamiento 25 m/s, en el espacio libre.

En el contexto de este estudio, se utilizaron tres valores de masa para el proyectil en presencia de la fuerza de arrastre, siendo  $m_1 = 200$  g,  $m_2 = 400$  g y  $m_3 = 800$  g, junto con tres valores de radio,  $r_1 = 4.0$  cm,  $r_2 = 7.0$  cm

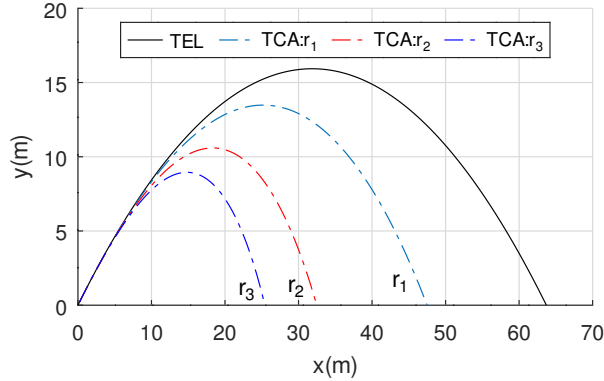
y  $r_3 = 9.0$  cm, mientras que la aceleración de la gravedad se mantuvo constante en  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>.

La Figura 4 muestra la trayectoria del proyectil en el espacio libre (TEL) como punto de referencia para comparación. Las trayectorias de los proyectiles con diferentes masas ( $m_1 < m_2 < m_3$ ) en un entorno con fuerza de arrastre se compararon, y como resultado de esta influencia, las trayectorias se modificaron, afectando tanto el desplazamiento vertical como horizontal.



**Figura 4:** Cambios en los alcances horizontales por la fuerza de arrastre y la masa del proyectil.

En la Figura 5, se muestran las trayectorias para diversos tamaños de esferas, cambiando el radio de la esfera de manera que  $r_1 < r_2 < r_3$ , se observan disminución en los alcances vertical y horizontal, debido a la fuerza de arrastre.

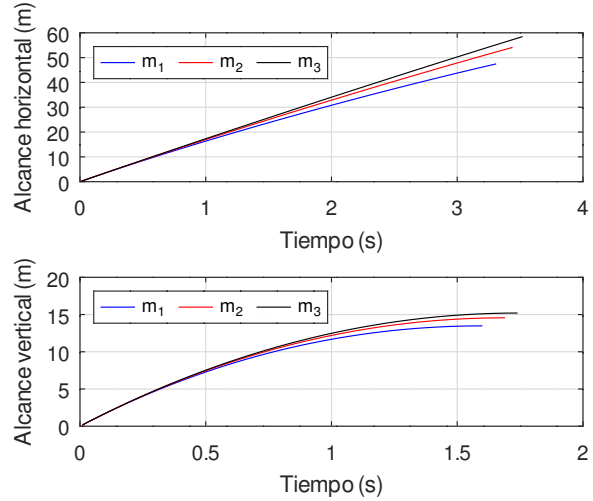


**Figura 5:** Trayectoria del proyectil con diferentes radios, manteniendo la masa constante.

**Alcances horizontales y verticales cuando el radio es constante y la masa cambiante:**

En la Figura 6 se muestran los cambios de los alcances horizontal y vertical cuando la masa del objeto en movimiento cambia desde  $m_1$  hasta  $m_3$ , manteniendo constante el valor del radio  $r_1 = 4$  cm. Se observa que

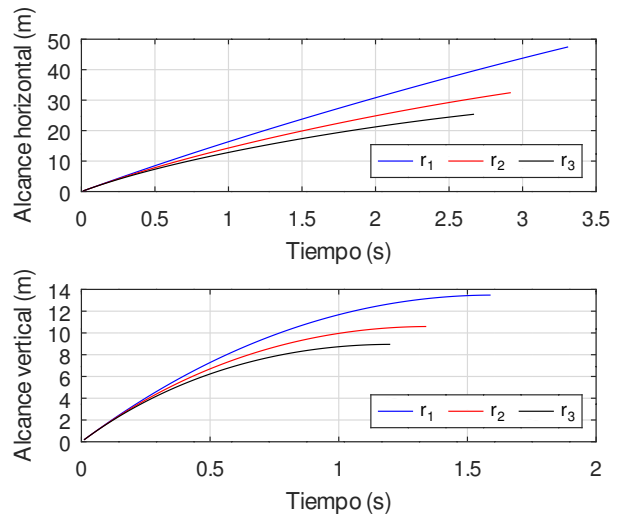
el alcance vertical es menor que el alcance horizontal



**Figura 6:** Alcances horizontal y vertical, cuando las masas cambian y el radio  $r_1$  es constante

**Alcances horizontales y verticales cuando la masa es constante y el radio cambia:**

En la Figura 7 se muestran los cambios en los alcances horizontales y verticales cuando el movimiento se realiza con presencia de la fuerza de arrastre. Conforme el radio de la esfera aumenta desde  $r_1$  hasta  $r_3$ . Se observa que, para el menor valor del radio del objeto en movimiento, tanto el alcance horizontal y vertical son mayores para cuando los valores del radio son mayores.



**Figura 7:** Alcance horizontales y verticales en el movimiento afectado por la fuerza de arrastre

En la Figura 6, se aprecia que cuando se hace cambiar la masa manteniendo constante el radio del proyectil, los

cambios en los alcances horizontal se encuentra entre 40 m y 60 m, en tanto que los alcances verticales se encuentran cerca nos a los 15 m.

Asimismo, en la Figura 7 para el caso cuando se mantiene constante el valor de la masa y se cambia el radio del proyectil, los alcances horizontal se encuentra entre 20 m y 50 m, en tanto que los alcances verticales se encuentran entre 8 m y 14 m, aquí la fuerza de arrastre tiene mayor influencia, al aumentar el radio el área de la sección transversal en la dirección del movimiento aumenta.

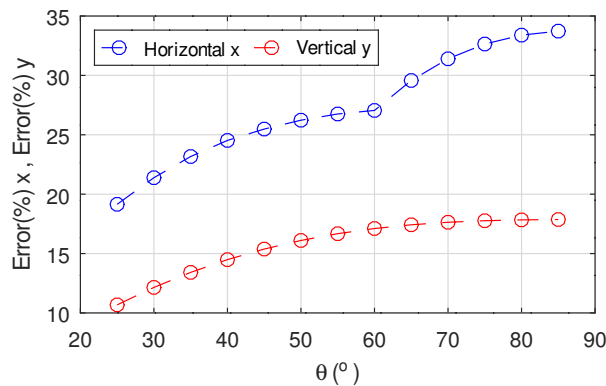
En la Tabla 1, se muestran los alcances horizontales y verticales para el caso de trayectorias en el espacio libre

(TEL) y cuando está afectado por la fuerza de arrastre (TCA), para la velocidad de lanzamiento 25 m/s, radio de la esfera  $r = 4$  cm, masa  $m = 0.2$  kg,  $x_{el}$ ,  $y_{el}$ : posiciones en el espacio libre,  $x_{ca}$ ,  $y_{ca}$ : posiciones en el espacio con presencia de la fuerza de arrastre. El alcance horizontal máximo para el caso del movimiento en el espacio libre ocurre para cuando el ángulo de lanzamiento es  $45^\circ$  de la Tabla 1, el valor correspondiente es 63.710 m y para el mismo proyectil y para el mismo ángulo de lanzamiento ocurre el alcance horizontal también es máximo y su valor es 47.476 m y el error porcentual respecto del lanzamiento en el espacio libre es 25.482%.

m (kg)	$\theta(^{\circ})$	$x_{el}$ (m)	$y_{el}$ (m)	$x_{ca}$ (m)	$y_{ca}$ (m)	E %x	E %y
0.2	25	48.805	5.690	39.460	5.082	19.147	10.680
0.2	30	55.175	7.964	43.374	6.996	21.387	12.149
0.2	35	59.868	10.480	45.997	9.074	23.170	13.415
0.2	40	62.743	13.162	47.354	11.255	24.526	14.487
0.2	45	63.710	15.928	47.476	13.478	25.482	15.378
0.2	50	62.743	18.693	46.286	15.683	26.229	16.102
0.2	55	59.868	21.375	43.852	17.811	26.752	16.673
0.2	60	55.175	23.891	40.250	19.804	27.051	17.108
0.2	65	48.805	26.166	34.372	21.607	29.574	17.422

**Tabla 1:** Alcances horizontales y verticales para diferentes valores de ángulo de lanzamiento manteniendo masa y radio constante

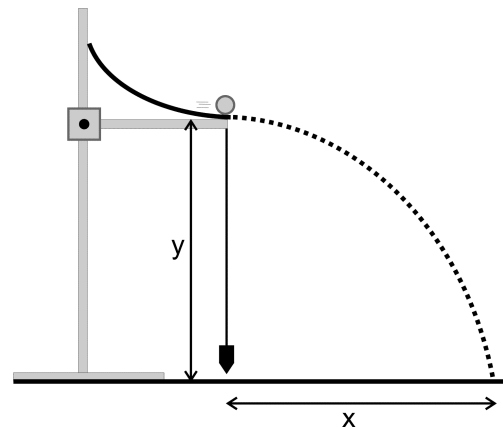
En la Figura 8 se muestran los cambios en los errores porcentuales para los alcances horizontales y verticales, cuanto mayor es el valor del porcentaje, mayor es el alejamiento de la trayectoria con arrastre respecto de la trayectoria en el espacio libre, lo que implica cambios en los alcances horizontales y verticales. Se toma como referencia la trayectoria en el espacio libre para la comparación.



**Figura 8:** Cambios porcentuales en los alcances horizontales y verticales con el ángulo de lanzamiento de proyectiles

### Prueba experimental

Se realizó un experimento de lanzamiento de proyectiles utilizando una rampa de lanzamiento, como se muestra en la Figura 9. Se registraron los datos correspondientes a las distancias recorridas en la horizontal al variar la posición vertical de la rampa de lanzamiento..



**Figura 9:** Montaje experimental

Los datos registrados corresponden a las distancias horizontales obtenidas bajo distintas alturas de la rampa de lanzamiento. Se realizaron tres mediciones del alcance

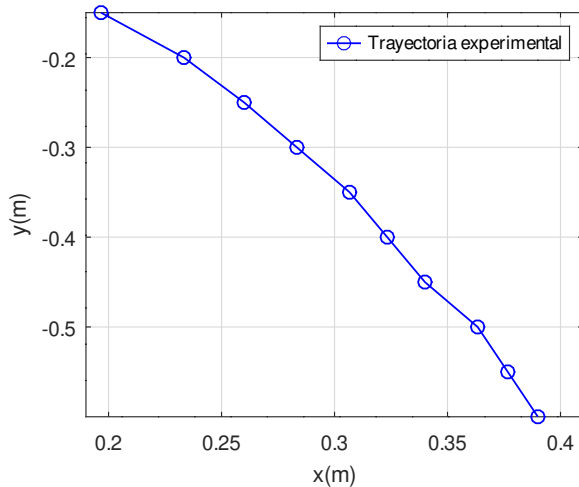
horizontal para cada altura, comenzando desde 15 cm y aumentando cada 5 cm hasta llegar a 60 cm. Los resultados se encuentran detallados en la Tabla 2.

y (m)	$x_1$ (m)	$x_2$ (m)	$x_3$ (m)
0.15	0.20	0.20	0.19
0.20	0.25	0.22	0.23
0.25	0.26	0.26	0.26
0.30	0.28	0.29	0.28
0.35	0.30	0.31	0.31
0.40	0.32	0.32	0.33
0.45	0.34	0.34	0.34
0.50	0.35	0.37	0.37
0.55	0.37	0.38	0.38
0.60	0.38	0.39	0.40

**Tabla 2:** Alcances horizontales y verticales para el experimento de lanzamiento de proyectiles

Los puntos de impacto varían dentro de un área específica ( $x_1, x_2, x_3$ ) para una misma altura en el experimento, debido a que cada lanzamiento modifica ligeramente la posición vertical. Aunque la nueva posición mantiene una alineación vertical a través de la plomada mostrada en la Figura 9, esta no coincide exactamente con la alineación anterior. Además, al soltar el proyectil desde la misma posición en la rampa, no hay una coincidencia del cien por ciento con la posición anterior, ya que esto también se ve afectado por la sensibilidad del experimentador.

En la Figura 10 se muestra la trayectoria experimental para el lanzamiento de un proyectil, para el cual se ha considerado el promedio de las posiciones horizontales  $x_1, x_2, x_3$ .



**Figura 10:** Trayectoria experimental para el lanzamiento de un proyectil

A medida que aumenta la distancia horizontal ( $x$ ), la altura del proyectil sobre el punto de lanzamiento ( $y$ ,

negativa) disminuye. Esto es consistente con la trayectoria parabólica esperada de un proyectil lanzado bajo la influencia de la gravedad.

Los datos muestran una tendencia clara y consistente pues a medida que la distancia horizontal aumenta, la altura del proyectil sobre el punto de lanzamiento disminuye de manera predecible.

La relación entre  $x$  e  $y$  nos permite visualizar la trayectoria del proyectil respecto al punto de lanzamiento. En la Figura 10 estos datos, tienden a una curva parabólica descendente, característica de un proyectil bajo la gravedad terrestre.

La toma de múltiples mediciones (puntos de datos) ayuda a confirmar la precisión del experimento. La repetición de mediciones para la horizontal  $x$  proporciona una imagen clara y precisa de la trayectoria del proyectil.

## Conclusiones

En esta investigación, se ha mostrado que la trayectoria de un proyectil se ve afectada cuando está expuesto a la fuerza de arrastre, en comparación con la trayectoria en el espacio libre (TEL), como se ilustra en las Figuras 4 y 5. La magnitud de la masa y el tamaño del proyectil son factores importantes en esta diferencia.

El tamaño del proyectil tiene un impacto significativo en el alcance horizontal en comparación con la vertical, como se confirma en la Figura 5.

En el contexto de la enseñanza universitaria de la física, es fundamental enfatizar la importancia del modelo de lanzamiento de proyectiles. En los cursos iniciales de física, es esencial transmitir la idea de que la física utiliza modelos idealizados, comenzando desde los más básicos y progresivamente incorporando consideraciones más complejas para explicar los fenómenos naturales.

Además, se destaca la relevancia de esta investigación para la comprensión de los principios fundamentales de la física en situaciones del mundo real. Al analizar cómo la fuerza de arrastre afecta la trayectoria de un proyectil, se proporciona una perspectiva práctica que puede ser valiosa tanto en la enseñanza como en aplicaciones en la vida real.

De la prueba experimental los datos analizados indican que el proyectil sigue una trayectoria parabólica típica, donde la altura sobre el punto de lanzamiento disminuye a medida que la distancia horizontal aumenta. Esto es coherente con las expectativas teóricas del movimiento de un proyectil lanzado bajo condiciones controladas.

Las posiciones de los resultados numéricos se alinean perfectamente bajo las condiciones consideradas a una curva bien definida en tanto que para la parte experimental está afectada por las condiciones en las que se realizan las pruebas, así como la sensibilidad del experimentador, lo que se refleja en la trayectoria que no es una curva perfecta sino que tiende a una curva cuadrática.

En futuras investigaciones, sería interesante explorar aún más las implicaciones de la forma del proyectil y otras variables en la trayectoria. Además, considerar

otros factores ambientales, como la altitud y la temperatura, podría contribuir a una comprensión más completa de los fenómenos físicos involucrados.

---

## Referencias

- [1] M. Jahangi, S. Tamvir, S. Shahid, I. Ahmed and I. Ulfat. Matlab simulation for teaching projectile motion, *Advanced Journal of Science and Engineering*, vol. 1, n<sup>o</sup> 2, pp. 59-61, 2020.
- [2] E. Azhikannickal, Sports, Smartphones, and Simulation as an Engaging Method to Teach Projectile Motion Incorporating Air Resistance, *The Physics Teacher*, vol. 57, n<sup>o</sup> 308-311, 2019.
- [3] A. Puzzella, M. Quiroga y N. López. Simulaciones como recurso para el aprendizaje del movimiento de proyectiles. ¿qué competencias es posible promover?, *Revista Electrónica Iberoamericana de Educación en Ciencias y Tecnología*, pp. 119-142, 2013.
- [4] J. Duarte, J. Niño y F. Fernández. Simulando y resolviendo, la teoría voy comprendiendo: una estrategia didáctica para la enseñanza-aprendizaje de la Física, *Revista Boletín REDIPE*, vol. 11, n<sup>o</sup> 1, pp. 158-173, 2021.
- [5] G. Parker. Projectile motion with air resistance quadratic in the speed, *Am. J. Phys.*, 1977.
- [6] A. Ortega, J. Rosales, L. Martínez and J. Cruz. Analysis of projectile motion in view of conformable derivative, *Open Phys.*, p. 581-587, 2018.
- [7] R. Atkin, W. Collins, C. Math and P. Rawlins. How does air resistance affect the motion of the projectile?, *Teaching Mathematics and its Applications* Vol 12, No 12, 1993.
- [8] M. Rossini, M. Alves e L. Amorim. Estudo de influência do ar no movimento de queda dos corpos : uma comparação entre a previsão teórica y os dados experimentais usando o Tracker, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 42, 2020.
- [9] H. Erlichson. Maximum projectile range with drag and lift, with particular application to golf, *Am. J. Phys.*, vol. 51, n<sup>o</sup> 4, pp. 357-361, 1983.
- [10] P. Chudinov, V. Eltyshev and Y. Barykin. Simple analytical description of projectile motion in a medium with quadratic drag force, *Lat. Am. J. Phys. Educ.*, vol. 7, n<sup>o</sup> 3, pp. 346-349, 2013.
- [11] J. Taylor. *Mecánica Clásica*, Barcelona: Reverté, 2013.
- [12] F. Lang da Silveira. Velocidade das pedras de granizo, Instituto de Física, UFRGS, 2015.
- [13] J. Eaton, D. Bateman, S. Auberg and R. Wehring. *GNU Octave version 6.1.0 manual: a high-level interactive language for numerical computations*, <https://www.gnu.org/software/octave/doc/v6.3.0>. 2020.
- [14] H. Gould and J. Tobochnik, *An introduction to computer simulation methods*, California: Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1996.