Revista de Investigación de Física **14**, 111401756 (2011)

Simetrías gauge local aplicadas a la física

Richard Huamani Chaviguri y Fulgencio Villegas Silva*

Facultad de Ciencias Físicas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, A.P. 14-0149, Lima, Perú

Recibido 20 octubre 2011 - Aceptado 20 diciembre 2011

En este trabajo damos una descripción sencilla acerca de las simetrías gauge locales tanto abeliana como no abeliana y sus posteriores aplicaciones fundamentales a la física que surgen para cada transformación gauge particular como son la electrodiámica cuántica, QED, Campo Leptónico y la cromodinámica cuántica, QCD.
Palabras claves: Teorías gauge, grupo abeliano y no abeliano, simetría, QED, QCD.

Local gauge symmetries applied to Physics

In this paper we give a simple description about the local gauge symmetries both abelian and non abelian and subsequent fundamental physics applications emerging for each particular gauge transformation such as Quantum Electro Dynamics, QED, Quantum Cromo Dynamics, QCD and lepton field.
Keywords: Gauge theories, abelian and non abelian group, symmetry, QED, QCD.

Introducción

La teoría de gauge, llamada también teoría de calibre, es una clase de teoría que se fundamenta en la idea de que las transformaciones pueden ser de tipo local o global. Una teoría gauge es invariante bajo un grupo local de transformaciones, la exigencia de que las transformaciones sean globales es dejada de lado y los lagrangianos poseen simetría local [1].

Para obtener el lagrangiano bajo transformaciones locales se usa el principio de gauge, el cual consiste en introducir nuevos campos en el lagrangiano de tal forma que se cancelen los términos que rompen la invariancia de este. De tal manera, por cada generador del grupo se introduce un campo gauge el cual esta asociado a las interacciones, esto significa que por cada interacción se puede asociar un grupo de simetrías y un conjunto de campos gauge. Debido a que las teorías gauge con simetría local provocan la aparición de interacciones y de campos asociados a estas se necesita encontrar la teoría correcta para describir las interacciones fundamentales, exigir simetría local respecto de la correcta magnitud, para que surjan los campos correctos y con ellos describir las interacciones fundamentales [2].

La primera teoría gauge fue la electrodinámica cuántica, formulada hacia finales de la década del 20 por los físicos P. A. M. Dirac, W. Heisenberg y W. Pauli. Una teoría gauge de las interacciones fuertes fue descrita por C. N. Yang y R. L. Mills en 1954. Sin embargo, ideas similares aplicables a las interacciones débil están implícitas en la primera teoría de la desintegración beta de Fermi en 1934 y más claramente en el trabajo de Oscar Klein en 1938 [3].

La teoría gauge para la unificación de las interacciones electromagnéticas y débiles se sustentan en el trabajo de S. Weinberg y A. Salam. Esta teoría electro débil incorpora un campo gauge no conmutativo o campo de Yang–Mills con una ruptura espontánea de simetría llevada cabo por el bosón de Higgs; en esta teoría los fermiones son descritos mediante un lagrangiano de Dirac generalizado adecuadamente para que sea invariante gauge bajo un cierto grupo gauge de simetría interna.

La teoría gauge para las interacciones fuertes, denominada cromodinámica cuántica, corresponde a Murray Gell-Mann y se desarrolló por los años 1973. Esta teoría parte de una simetría gauge no abeliana exacta. Los propagadores de esta interacción son llamados gluones, no tienen masa, aparecen confinados y no se presentan en estado libre.

*fvillegass@unmsm.edu.pe

Definiciones previas

En esta sección vamos definir a los grupos especiales U(1) y SU(2), pertenecientes al grupo de Lie [4], y las relaciones principales en el sistema primado que vamos a emplear en todo nuestro análisis posterior.

Las matrices de transformación de los grupos U(1) y SU(2) son unitarias y satisfacen lo siguiente

$$\begin{cases} \mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}^\dagger\mathbf{U} = 1 \\ \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^\dagger \\ |\mathbf{U}| = 1 \ . \end{cases} \tag{1}$$

Además estos grupos son abeliano y no abeliano respectivamente y se transforman tanto local como global.

Grupo especial U(1)

Es un grupo que satisface las condiciones de la Ec.(1) y cuya matriz de transformación es

$$\mathbf{U} = e^{ir\theta} = \mathbf{U}_r \ , \tag{2}$$

donde r es un número real arbitrario, θ es un parámetro de evolución real asociado al grupo y puede ser constante o variable del espacio-tiempo.

Por otra parte, de la Ec.(2) es obvio que r y θ conmutan y además este grupo es abeliano.

Grupo especial SU(N)

Satisfacen también las condiciones de la Ec.(1) y su matriz de transformación es

$$\mathbf{U} = e^{iT_a\theta^a} = \mathbf{U}_t \ , \tag{3}$$

donde θ^a son los parámetros de evolución que pueden ser variables o constantes del espacio-tiempo y además $\in \mathbb{R}$, T_a son las matrices $N \times N$ generadoras del grupo, tal que $a = 1, 2, \ldots, N^2-1$ y N esta definido para N≥2.

Por otro lado, $T_a \in \mathbb{C}$ y cumplen con el álgebra de Lie [4] como

$$\begin{cases} T_a = t_a/2 \\ [t_a, t_b] = 2iC_{abc}t_c \ . \end{cases} \tag{4}$$

Aquí C_{abc} es la estructura del grupo y es antisimétrica. Además SU(N) es abeliano. Empleando la Ec.(3) sobre la Ec.(1) tenemos que

$$[T_a, \theta^a] = \theta^a(T_a^\dagger - T_a) \ . \tag{5}$$

Los generadores de grupo para las matrices de Pauli, $N = 2$, y las matrices de Gell-Mann, $N = 3$, son Hermitianos, $T_a = T_a^\dagger$, por lo tanto se puede generalizar que $\forall N \geq 2$, entonces se deduce que

$$[T_a, \theta^a] = 0 \ . \tag{6}$$

Definiciones en el sistema primado

Las transformaciones gauge local son aplicados al campo de Dirac con la finalidad de encontrar simetrías, en ese sentido a continuación vamos a definir y calcular algunas relaciones importantes que utilizaremos más adelante.

• Las Ecs. (2) y (3) pueden ser aproximadas al primer grado, de modo que para $n \geq 2$ son despreciables o mediante transformaciones infinitesimales se aproximan a cero, en ambos casos se obtiene lo mismo. Ahora aplicando en la Ec.(2) y usando la Ec.(6) tenemos que

$$\begin{cases} \mathbf{U}_t = (1 + iT_a\theta^a) \\ \mathbf{U}_t^\dagger = (1 - iT_a\theta^a) \ , \end{cases} \tag{7}$$

empleando esta última ecuación y la matriz de Dirac γ^μ se obtiene

$$\mathbf{U}_t^\dagger\gamma^\mu\mathbf{U}_t = \gamma^\mu + [\gamma^\mu, \mathbf{U}_t] \ .$$

Luego, multiplicando la primera ecuación de la Ec.(1) por γ^μ y restándolo con la última ecuación se tiene

$$(\mathbf{U}_t^\dagger - 1)[\gamma^\mu, \mathbf{U}_t] = 0 \ . \tag{8}$$

De la Ec.(7) se nota que $\mathbf{U}_T^\dagger - 1 \neq 0$ por lo tanto de la Ec.(8) se deducen

$$\begin{cases} [\gamma^\mu, \mathbf{U}_t] = 0 \\ [\gamma^o, \mathbf{U}_t] = 0 \ . \end{cases} \tag{9}$$

Es evidente este resultado para el grupo U(1), en ese sentido este resultado puede ser expandido para cualquier matriz de transformación unitaria de la siguiente manera

$$\begin{cases} [\gamma^\mu, \mathbf{U}] = [\gamma^o, \mathbf{U}] = 0 \\ [\gamma^\mu, \mathbf{U}^\dagger] = [\gamma^o, \mathbf{U}^\dagger] = 0 \ , \end{cases} \tag{10}$$

donde la segunda ecuación de la Ec.(10) se desprende de la primera y cumple que $\forall\mathbf{U} = \mathbf{U}_r, \mathbf{U}_t, \mathbf{U}_\lambda, \mathbf{U}_Y, \ldots, etc.$

• Las leyes de transformación para las funciones de onda son dadas de esta forma [5]

$$\begin{cases} \psi' = \mathbf{U}\psi \\ \bar{\psi}' = \bar{\psi}\mathbf{U}^\dagger \ . \end{cases} \tag{11}$$

• La densidad lagrangiana del campo de Dirac en general está expresada en función de la derivada normal ∂, pero para aplicar las transformaciones gauges vamos a extenderlo a una derivada covariante general con el propósito de encontrar las simetrías; por tanto es dado de la forma

$$D_\mu = \partial_\mu + ik\mathcal{X}_\mu \ , \tag{12}$$

donde k es un parámetro real arbitrario, $\mathcal{X}_\mu$es el potencial vectorial $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Para determinar el potencial $\mathcal{X}_\mu$ en el sistema primado, las Ecs.(11) y (12) deben satisfacer la siguiente relación general [6]

$$(D_\mu\psi)' = \mathbf{U}D_\mu\psi \ . \tag{13}$$

Ahora, reemplazando las Ecs.(11) y (12) en la Ec.(13) tenemos

$$\Big(\mathcal{X}'_\mu \mathbf{U}\Big)\psi = \Big(\mathbf{U}\mathcal{X}_\mu + \frac{i}{k}\partial_\mu \mathbf{U}\Big)\psi \ .$$

Igualando y usando la Ec.(1) en la última ecuación se obtiene [7]

$$\mathcal{X}'_\mu = \mathbf{U}\mathcal{X}_\mu \mathbf{U}^\dagger + \frac{i}{k}(\partial_\mu \mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger \ , \qquad (14)$$

esta expresión nos permite calcular el potencial primado para cualquier $\mathbf{U}$ unitario.

Luego generalizando la Ec.(7) para las Ecs.(2) y (3), y usando la Ec.(11) se obtiene

- Para $\mathbf{U(1)}$

$$\begin{cases} \psi' = \mathbf{U}_r\psi \simeq (1+ir\theta)\psi \\ \bar{\psi}' = \bar{\psi}\mathbf{U}_r^\dagger \simeq .\bar{\psi}(1-ir\theta) \ . \end{cases} \qquad (15)$$

- Para $\mathbf{SU(N)}$

$$\begin{cases} \psi' = \mathbf{U}_t\psi \simeq (1+iT_a\theta^a)\psi \\ \bar{\psi}' = \bar{\psi}\mathbf{U}_t^\dagger \simeq \bar{\psi}(1-iT_a\theta^a) \ . \end{cases} \qquad (16)$$

Transformaciones gauge locales

En esta sección las transformaciones dadas por las Ecs.(2) y (3) son funciones del espacio-tiempo que aplicadas a la densidad lagrangiana del campo de Dirac producen potenciales vectoriales que garantizan su invariancia, estos potenciales, denominados potenciales gauge, a su vez generan una densidad lagrangiana propia. De ese modo el campo estará expresado por la suma de ambas densidades lagrangianas.

Sea la densidad lagrangiana de Dirac normal

$$\mathcal{L}_D = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi. \qquad (17)$$

Transformación abeliana U(1)

Si reemplazamos la Ec.(15) en la Ec.(17) se nota que $\mathcal{L}_D$ no es invariante, esto implica aplicar la Ec.(12) en la Ec.(17)

$$\mathcal{L}'_D = i\bar{\psi}'\gamma^\mu D'_\mu\psi' - m\bar{\psi}'\psi' \ . \qquad (18)$$

Utilizando las Ecs.(15) y (13) en la Ec.(18) se demuestra que $\mathcal{L}'_D = \mathcal{L}_D$ es invariante. Luego, para calcular el potencial vectorial asociado empleamos las Ecs.(14) y (15) para obtener

$$\mathcal{X}'_\mu = \mathcal{X}_\mu - ir[\mathcal{X}_\mu, \theta] - \frac{r}{k}(\partial_\mu\theta) \ , \qquad (19)$$

como θ es escalar conmuta con el potencial vectorial, por tanto

$$\begin{cases} D_\mu = \partial_\mu + ik\mathcal{X}_\mu \\ \mathcal{X}'_\mu = \mathcal{X}_\mu - \Big(\dfrac{r}{k}\Big)\partial_\mu\theta \ . \end{cases} \qquad (20)$$

A continuación, el tensor de intensidad del campo gauge es definido [8] por

$$N_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathcal{X}_\nu - \partial_\nu\mathcal{X}_\mu \ , \qquad (21)$$

el cual es invariante en el sistema primado, es decir $N'_{\mu\nu} = N_{\mu\nu}$ se conserva.

El tensor de intensidad tiene asociado una densidad lagrangiana, como mencionamos anteriormente, que manifiesta la característica cinética del campo y tiene la forma

$$\mathcal{L}_N = -\frac{1}{4}N_{\mu\nu}N^{\mu\nu} \ . \qquad (22)$$

Al conservarse el tensor de intensidad implica que el lagrangiano gauge también se conserve $\mathcal{L}'_N = \mathcal{L}_N$.

Por lo tanto la densidad lagrangiana del campo es $\mathcal{L} = \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_D$ y en forma explícita

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}N_{\mu\nu}N^{\mu\nu} + \bar{\psi}\Big[i\gamma^\mu D_\mu - m\Big]\psi \ . \qquad (23)$$

Transformación no abeliana SU(N)

Al reemplazar la Ec.(16) en la Ec.(17) se observa que $\mathcal{L}_D$ no es invariante, entonces sea la Ec.(12) en la Ec.(17)

$$\mathcal{L}'_D = i\bar{\psi}'\gamma^\mu D'_\mu\psi' - m\bar{\psi}'\psi' \ . \qquad (24)$$

Utilizando las Ecs.(16) y (13) en la Ec.(18) se demuestra que $\mathcal{L}'_D = \mathcal{L}_D$ es invariante.

Ahora sustituyendo la Ec.(7) en la Ec.(14) se obtiene el potencial vectorial

$$\mathcal{X}'_\mu = \mathcal{X}_\mu - i[\mathcal{X}_\mu, T_a\theta^a] - \frac{1}{k}\partial_\mu(T_a\theta^a) \ . \qquad (25)$$

El objetivo es que el parámetro θ^a solo este acompañado por un factor escalar mas no por una matriz, como esta aquí, en ese sentido es factible eliminar la matriz T_a de dos formas usando la Ec.(6), a la derecha o la izquierda del parámetro, para nuestro caso utilizaremos el lado izquierdo, es decir tendrá la misma forma que la fase de la matriz de transformación; por tanto se deduce

$$(\mathcal{X}^a_\mu)' = \mathcal{X}^a_\mu - i[\mathcal{X}^a_\mu, T_a\theta^a] - \frac{1}{k}\partial_\mu\theta^a \ , \qquad (26)$$

donde

$$\begin{cases} \mathcal{X}_\mu = T_a\mathcal{X}^a_\mu \\ D_\mu = \partial_\mu + ik\mathcal{X}^a_\mu \ . \end{cases} \qquad (27)$$

Además si hubiésemos utilizado el lado derecho obtendríamos el mismo resultado de la Ec.(26), de ahí se deduce

$$[\mathcal{X}^a_\mu, T_a] = 0 \ . \qquad (28)$$

Este resultado es una particularidad del procedimiento que estamos siguiendo.

Para calcular la relación de conmutación de la Ec.(26) vamos a utilizar las Ecs.(4) que satisfacen los generadores de grupo, además emplearemos la Ec.(6) para obtener

$$[\theta^b t_a, \theta^b T_b] = i\theta^b C_{abc}\theta^b t_c \ . \tag{29}$$

Haciendo el cambio de variable conveniente $\mathcal{X}^a_\mu = \theta^b t_a$ en la Ec.(29) se deduce

$$[\mathcal{X}^a_\mu, \theta^b T_b] = iC_{abc}\theta^b \mathcal{X}^c_\mu \ , \tag{30}$$

si cambiamos θ^b por θ^a en el primer término de la Ec.(29) y usando la Ec.(4) se deriva

$$[\theta^a t_a, \theta^b t_b] = 2iC_{abc}\theta^a\theta^b t_c \ . \tag{31}$$

Ahora reemplazando la Ec.(30) en la Ec.(26) se obtiene el potencial vectorial primado y contiene un término más que en el caso abeliano

$$(\mathcal{X}^a_\mu)' = \mathcal{X}^a_\mu - \frac{1}{k}\partial_\mu\theta^a + C_{abc}\theta^b\mathcal{X}^c_\mu \ . \tag{32}$$

El tensor de intensidad para el grupo SU(N) es expresado en función de la derivada covariante D_μ, luego de reemplazar y calcular en la Ec.(21) se llega a

$$N_{\mu\nu} = (\partial_\mu\mathcal{X}_\nu - \partial_\nu\mathcal{X}_\mu) + ik[\mathcal{X}_\mu, \mathcal{X}_\nu] \ . \tag{33}$$

Para calcular este conmutador utilizaremos la Ec.(27) y de la Ec.(31) cambiamos adecuadamente las variables, es decir $\theta^a = \mathcal{X}^a_\mu$ y $\theta^b = \mathcal{X}^b_\nu$, además usamos la condición antisimétrica del factor de grupo, Ec.(4), al intercambiar sus índices y por último empleamos la Ec.(28), luego de realizar todo eso, conseguimos

$$\begin{cases} C_{abc}\mathcal{X}^a_\mu\mathcal{X}^b_\nu T_c = T_a C_{abc}\mathcal{X}^b_\mu\mathcal{X}^c_\nu \\ \\ [\mathcal{X}_\mu, \mathcal{X}_\nu] = iT_a C_{abc}\mathcal{X}^b_\mu\mathcal{X}^c_\nu \ . \end{cases} \tag{34}$$

Reemplazando la primera ecuación de la Ec.(27) y la segunda ecuación de la Ec.(34) en la Ec.(33) tenemos que

$$N_{\mu\nu} = T_a(\partial_\mu\mathcal{X}^a_\nu - \partial_\nu\mathcal{X}^a_\mu) - kT_a C_{abc}\mathcal{X}^b_\mu\mathcal{X}^c_\nu \ . \tag{35}$$

Vamos a eliminar T_a hacia la izquierda, al igual que el potencial vectorial, para obtener el tensor de intensidad

$$N^a_{\mu\nu} = (\partial_\mu\mathcal{X}^a_\nu - \partial_\nu\mathcal{X}^a_\mu) - kC_{abc}\mathcal{X}^b_\mu\mathcal{X}^c_\nu \ , \tag{36}$$

con

$$N^a_{\mu\nu} = T_a N^a_{\mu\nu} \ . \tag{37}$$

Si optamos por la derecha se obtiene lo mismo, por tanto se deduce una expresión particular $[N^a_{\mu\nu}, T_a] = 0$.

En el grupo SU(N) una matriz se transforma de la siguiente manera [9] $P' = \mathbf{U}P\mathbf{U}^\dagger$. Reemplazando $P = N^a_{\mu\nu}$ y la Ec.(16) en la ley de transformación mencionada logramos

$$(N^a_{\mu\nu})' = N^a_{\mu\nu} - i[N^a_{\mu\nu}, T_b\theta^b] \ . \tag{38}$$

Utilizando la Ec.(30) cuando $\mathcal{X}^a_\mu \equiv N^a_{\mu\nu}$ se llega a $[N^a_{\mu\nu}, T_b\theta^b] = iC_{abc}\theta^b N^c_{\mu\nu}$, aplicándolo a la Ec.(38) se deriva

$$(N^a_{\mu\nu})' = N^a_{\mu\nu} + C_{abc}\theta^b N^c_{\mu\nu} \ . \tag{39}$$

El tensor de intensidad no es invariante para SU(N) debido a que sus generadores son matrices que no conmutan. Además el conmutador de las derivadas, usando la Ec.(33), es $[D_\mu, D_\nu] = ikN_{\mu\nu}$.

La densidad lagrangiana para este campo gauge representando los términos cinéticos es

$$\mathcal{L}_N = -\frac{1}{4}N^a_{\mu\nu}N^{\mu\nu}_a \ . \tag{40}$$

Utilizando esta expresión $P' = \mathbf{U}P\mathbf{U}^\dagger$ y la Ec.(7) se demuestra que es invariante, es decir $\mathcal{L}_N = \mathcal{L}'_N$.

Por lo tanto la densidad lagrangiana total es $\mathcal{L} = \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_D$ y en forma explícita

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}N^a_{\mu\nu}N^{\mu\nu}_a + \bar{\psi}\Big[i\gamma^\mu D_\mu - m\Big]\psi \ . \tag{41}$$

Aplicaciones a la física

Los fenómenos físicos, en especial en la física de partículas y nuclear [10], son estudiados con gran ínteres mediante las transformaciones gauge abelianas y no abelianas, ya sean local o global, principalmente porque permiten analizar la invariancia y conservación de una cantidad física; en ese sentido cada fenómeno físico en cuestión tienen asociado una transformación gauge particular que vamos a analizarlas a continuación.

Electrodinámica: G=U(1)

El grupo U(1) esta relacionado con el estudio del campo electromagnético y su interacción con los electrones, a esta teoría se la denomina la electrodinámica cuántica, QED. Los resultados obtenidos en el grupo abeliano serán aplicados a esta teoría y veremos cómo las ecuaciones de Maxwell surgen de forma sencilla a partir de ellas al igual que la densidad de corriente surge como consecuencia de la invariancia de la densidad lagrangiana.

Impongamos las siguientes características a este campo $r = k = q$ y $\mathcal{X}_\mu = A_\mu$; donde q es la carga asociada al campo, A_μ es el potencial vectorial asociado al campo electromagnético.

Reemplazando estas características en las Ecs.(15) y (20) se consigue

$$\begin{cases} \psi' = e^{iq\theta}\psi \quad \wedge \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{-iq\theta} \\ D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu \\ A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\theta \ . \end{cases} \tag{42}$$

Sustituyendo también en la Ec.(21) se deduce el tensor de intensidad, denotado aquí por $F^{\mu\nu}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} \ , \end{array} \right. \tag{43}$$

este tensor de intensidad es renombrado como el Tensor Electromagnético y es invariante.

Por otro lado, usando la Ec.(22) se deriva la densidad lagrangiana electromagnética para el campo gauge A

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \ , \tag{44}$$

y además se conserva $\mathcal{L}'_A = \mathcal{L}_A$.

El Lagrangiano de Dirac, Ec.(17), en función de la Ec.(42) se conserva y adquiere esta connotación [11]

$$\mathcal{L}_D = \mathcal{L}_o - J^\mu A_\mu \ , \tag{45}$$

donde $J^\mu = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ es definida como la densidad de corriente electromagnética.

Por consiguiente, el lagrangiano total es la suma de ambos, la Ec.(44) y la Ec.(45)

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_o - J^\mu A_\mu \ . \tag{46}$$

Esta densidad lagrangiana describe completamente la electrodinámica cuántica, QED.

Las ecuaciones de Maxwell se derivan utilizando la ecuación de Euler-Lagrange, pero antes debemos indicar que empleando el álgebra tensorial se demuestra: $F_{\mu\nu} = -F^{\mu\nu}$; luego empleando este resultado y aplicando las Ecs. de Euler-Lagrange sobre los campos A_μ y A_ν de la Ec.(46) se deducen

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_\nu F^{\mu\nu} = J^\mu \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \ , \end{array} \right. \tag{47}$$

las ecuaciones de Maxwell con y sin presencia de carga y corriente.

Desde la electrodinámica clásica [12] se conocen las relaciones entre el potencial vectorial A_μ y los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$, de modo que al expandir la Ec.(47) se obtienen las formas conocidas de las relaciones de Maxwell; además también se obtiene el tensor electromagnético [13] explícito

$$F_{\mu\nu} = \left(\begin{array}{cccc} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{array} \right) \ . \tag{48}$$

Campo leptónico y el espín isotópico: G=SU(2)

Cuando $N = 2$, el grupo SU(N) se transforma en SU(2), entonces en este grupo existen 3 matrices de 2×2 generadores del grupo $N^2 - 1 = 3$, donde t_1, t_2 y t_3 son nombrados como las matrices de Pauli.

$$t_1 = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right), \ t_2 = \left(\begin{array}{cc} 0 & -i \\ i & 0 \end{array} \right), \ t_3 = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right).$$

Inicialmente la teoría gauge no abeliana SU(2) fue planteada por Yang y Mills [14] en 1954 para describir la invariancia isotópica del par neutrón-protón, y por ese motivo también se les conoce como campos de Yang-Mills.

Como este grupo depende explícitamente de estas matrices inferimos que el campo de Dirac fermiónico es reducido a un campo leptónico -los leptones son una familia compuesta por seis especies tales como el e, μ, τ, ν_e, ν_μ y ν_τ-, puesto que las matrices de Pauli están asociadas al espín de los leptones, S=1/2. De esa manera el grupo SU(2) se aplica al estudio del campo leptónico, considerando que todos los leptones tengan masa, aún se considerando que los neutrinos tienen masa nula [15].

Por otra parte, los campos gauge que resultan como consecuencia de la invariancia de la densidad lagrangiana están relacionados con las interacciones débil [16] y se les denomina *bosones vectoriales* y son los mediadores en las interacciones débil; debemos aclarar que estos bosones tienen masa y que en nuestro análisis no vamos a considerar sus términos másicos en el lagrangiano gauge, puesto que el análisis más riguroso donde incluyan las masas se efectua en la teoría electro-débil estándar, que es una teoría invariante simultánea entre los grupos U(1) y SU(2), es decir $SU(2)_L \otimes U(1)$) propuesta por Sheldon Lee Glashow [17], Steven Weinberg [18] y Abdus Salam [19]. De esta forma el análisis que vamos a realizar es una aproximación a la teoría mencionada.

Los resultados obtenidos en SU(N) son aplicados para $N = 2$ en este caso, por tanto impongamos los siguientes cambios

$$\left\{ \begin{array}{lll} k = g \quad g \text{ es una constante real de acoplamiento} & & \\ \mathcal{X}_\mu = W_\mu & \dashrightarrow & \mathcal{X}^a_\mu = W^a_\mu \\ N_{\mu\nu} = W_{\mu\nu} & \dashrightarrow & N^a_{\mu\nu} = W^a_{\mu\nu} \ . \end{array} \right. \tag{49}$$

Luego aplicando la Ec.(49) en la Ec.(27)

$$\left\{ \begin{array}{l} W_\mu = T_a W^a_\mu \\ D_\mu = \partial_\mu + igT_a W^a_\mu \ . \end{array} \right. \tag{50}$$

Los potenciales vectoriales primados para los campos gauge surgen desde la Ec.(32)

$$(W^a_\mu)' = W^a_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a + C_{abc}\theta^b W^c_\mu \ . \tag{51}$$

Ahora reemplazando la Ec.(49) en la Ec.(36) se deduce el tensor de intensidad de los campos gauge

$$W^a_{\mu\nu} = (\partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu) - gC_{abc}W^b_\mu W^c_\nu \ , \tag{52}$$

y el primado surge desde la Ec.(39) usando la ley de transformacion de un grupo no abeliano

$$\begin{cases} (W^a_{\mu\nu})' = \mathbf{U}_t W^a_{\mu\nu} \mathbf{U}^\dagger_t \\ (W^a_{\mu\nu})' = W^a_{\mu\nu} + C_{abc}\theta^b W^c_{\mu\nu} \ , \end{cases} \tag{53}$$

el cual no conserva como ya vimos anteriormente.

En consecuencia, la densidad lagrangiana para estos campos gauge sin considerar los términos másicos, desde la Ec(40), es

$$\mathcal{L}_W = -\frac{1}{4} W^a_{\mu\nu} W^{\mu\nu}_a \ . \tag{54}$$

Por otra parte, al igual que en el grupo U(1), también se obtine una densidad de corriente a partir de la conservación de la densidad lagrangiana, Ec.(17), esta vez en función de la Ec.(49)

$$\mathcal{L}_D = \mathcal{L}_o - g\mathcal{J}^\mu_a W^a_\mu \ , \tag{55}$$

donde $\mathcal{J}^\mu_a = \bar{\psi}\gamma^\mu T_a \psi$ es una densidad de corriente que se conserva bajo las transformaciones gauge, Ec.(16), utilizando la Ec.(6). Además, vemos su dependencia con la matriz de Pauli.

Justamente esta dependencia aplicada con una transformación gauge no abeliana global $[\theta^a \neq \theta^a(x)]$ nos permite derivar la densidad de corriente del isoespín débil (J^μ_a) y sus correspondientes cargas de isoespín débil (I^W_a) asociados al isoespinor (Ψ^L_l) netamente izquierdo y como consecuencia de ello se obtienen la corriente de hipercarga (J^μ_Y) y las corrientes neutras (J^μ_3) así como la hipercarga (Y) y la isocarga débil (I^W_3), respectivamente. Obviamente estos cálculos se realizan dentro de la teoría electro-débil [20] y se considera para ello que las masas de los leptones sean nulas como una primera aproximación, además para obtener estos resultados la función de onda debe ser expresada en su forma leptónica, debe ser una matriz columna compuesta por los neutrinos y los leptones, y también deben estar en función de los operadores quirales de derecha e izquierda.

Desde las Ecs.(54) y (55) se obtiene la densidad lagrangiana total

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} W^a_{\mu\nu} W^{\mu\nu}_a + \mathcal{L}_o - g\mathcal{J}^\mu_a W^a_\mu \ . \tag{56}$$

Al reemplazar la Ec.(52) en la Ec.(56) surge una característica para el campo gauge no abeliano, y es que ellos contienen términos de auto-interacción triples y cuárticas para los bosones, las que representamos como $(\partial W - \partial W)WW$ y $WWWW$, respectivamente.

Cromodinámica: G=SU(3)

Para este caso $N = 3$, $N^2 - 1 = 8 \hookrightarrow a = 1, 2, \ldots, 8$, indica que en este grupo existen 8 matrices 3×3 generadoras del grupo $t_1, ..., t_8$ denominadas matrices de Gell-Mann [21] que son denotadas por λ_a.

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{57}$$
$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Las simetrías del grupo SU(3) está relacionado con las interacciones fuertes [16] de modo que la cromodinámica cuántica [22] analiza el comportamiento de los quarks [23, 24] y sus mediadores llamados gluones. Los quarks son partículas fundamentales, al igual que los leptones, que forman la estructura interna de las partículas subatómicas tales como el protón y el neutrón, y sus cargas son fracciones de la carga del electrón. Al igual que los leptones los quarks son una familia compuesta por seis especies llamadas *Sabores* [25]:

u ⇝ up
d ⇝ down
s ⇝ strange
c ⇝ charm
b ⇝ botton
t ⇝ top

Cada una de ellas es descrita por una función de onda triple, es decir esta compuesta por tres componentes llamadas *Colores*

r ⇝ read
g ⇝ green
b ⇝ azul

Por otra parte, los potenciales vectoriales de este grupo son denominados gluones que dependen de las matrices de Gell-Mann y desde el cual se deducen que existen ocho. Al igual que en SU(2) vamos aplicar todos los resultados obtenidos para SU(N) imponiendo lo siguiente

$$\begin{cases} k = g_s & \text{constante real de acoplamiento.} \\ T_a = \Lambda_a & \dashrightarrow \Lambda_a = \lambda_a/2 \\ \mathcal{X}_\mu = G_\mu & \dashrightarrow G_\mu = \Lambda_a G^a_\mu \\ N_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} & \dashrightarrow G_{\mu\nu} = \Lambda_a G^a_{\mu\nu} \ . \end{cases} \tag{58}$$

Reemplazando la Ec.(57) en la Ec.(16) se tienen las transformaciones gauge para las funciones de onda

$$\begin{cases} \psi' = \mathbf{U}_\lambda \psi = e^{i\Lambda_a\theta^a}\psi \\ \bar{\psi}' = \bar{\psi}\mathbf{U}^\dagger_\lambda = \bar{\psi}e^{-i\Lambda_a\theta^a} \ . \end{cases} \tag{59}$$

Luego la derivada covariante D_μ y el potencial primado de las Ecs.(12) y (32), respectivamente, toman la forma

$$\begin{cases} D_\mu = \partial_\mu + ig_s\Lambda_a G^a_\mu \\ (G^a_\mu)' = G^a_\mu - \dfrac{1}{g_s}\partial_\mu\theta^a + C_{abc}\theta^b G^c_\mu \ , \end{cases} \tag{60}$$

y el tensor de intensidad, Ec.(36), se transforma en

$$G^a_{\mu\nu} = (\partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu) - gC_{abc}G^b_\mu G^c_\nu \ . \tag{61}$$

Después, usando la Ec.(59) en la Ec.(39) y transformando una matriz en un grupo no abeliano, se logra

$$\begin{cases} (G^a_{\mu\nu})' = \mathbf{U}_\lambda G^a_{\mu\nu}\mathbf{U}^\dagger_\lambda \\ (G^a_{\mu\nu})' = G^a_{\mu\nu} + C_{abc}\theta^b G^c_{\mu\nu} \ . \end{cases} \tag{62}$$

Por lo tanto la densidad lagrangiana del campo gauge, de la Ec.(40), es dado por

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{\mu\nu}_a \ , \tag{63}$$

y es invariante bajo las transformaciones gauge.

Por otro lado, sean las funciones de ondas explícitas en sus tres componentes

$$\psi = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \qquad \wedge \qquad \bar{\psi} = \begin{pmatrix} \bar{q}_1 & \bar{q}_2 & \bar{q}_3 \end{pmatrix}, \tag{64}$$

donde $\bar{q}_1$, $\bar{q}_2$ y $\bar{q}_3$ son los colores rojo, verde y azul, respectivamente y q representa a los seis quarks.

Reemplazando la Ec.(63) en la densidad lagrangiana invariante $\mathcal{L}_D$ se obtiene

$$\mathcal{L}_q = \sum_{j=1}^{3}\bar{q}_j(i\gamma^\mu D_\mu - m_q)q_j \ , \tag{65}$$

donde m_q es la masa para cada quark. Además al expresar la Ec.(64) en función de un delta de dirac δ_{mn} y expandiendo la derivada covariante se observa que esta compuesto por las interacciones libres y cruzadas

$$\mathcal{L}_q = \bar{q}_m\Big[i\gamma^\mu\partial_\mu - m_q\Big]\delta_{mn}q_n - \bar{q}_m\gamma^\mu g_s\Lambda_a\delta_{mn}G^a_\mu q_n \ . \tag{66}$$

Ahora vamos a eliminar los deltas para obtener las interaciones independientes. Entonces para el primer término de la Ec.(65) sea $m = n = l \rightarrow \delta_{mn} = \delta_{ll} = 1$ y para el segundo término sea $\delta_{mn}\Lambda_a = \Lambda^{mn}_a = \lambda_a/2$; luego sustituyendo todo esto en en la Ec.(65), se convierte

$$\mathcal{L}_q = \bar{q}_l\Big[i\gamma^\mu\partial_\mu - m_q\Big]q_l - g_s\bar{q}_m\gamma^\mu(\lambda_a/2)q_nG^a_\mu, \tag{67}$$

donde, $l, m, n = 1, 2, 3$ como $q = 1, 2, \ldots, 6$ son sumatorias múltiples.

Por lo tanto, desde las Ecs.(62) y (66) se deduce [26]:

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{\mu\nu}_a + \bar{q}_l\Big[i\gamma^\mu\partial_\mu - m_q\Big]q_l - g_s\bar{q}_m\gamma^\mu(\lambda_a/2)q_nG^a_\mu \ . \tag{68}$$

Esta ecuación es la densidad lagrangiana de la cromodinámica cuántica. Finalmente indicamos algunas propiedades de las matrices de Gell-Mann

$$\begin{cases} [\lambda_a, \lambda_b] = 2if_{abc}\lambda_c \\ \{\lambda_a, \lambda_b\} = 4\delta_{ab}\mathbb{I} + 2id_{abc}\lambda_c, \end{cases} \tag{69}$$

donde f_{abc} es antisimétrico y d_{abc} es simétrico.

abc	**123**	**147**	**156**	**246**	**257**	**345**	**367**	**458**	**678**
f_{abc}	1	1/2	-1/2	1/2	1/2	1/2	-1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$
abc	**118**	**146**	**157**	**228**	**247**	**256**	**338**	**344**	
d_{abc}	$1/\sqrt{3}$	1/2	1/2	$1/\sqrt{3}$	-1/2	1/2	$1/\sqrt{3}$	1/2	
abc	**355**	**366**	**377**	**448**	**558**	**668**	**778**	**888**	
d_{abc}	1/2	-1/2	-1/2	$-1/2\sqrt{3}$	$-1/2\sqrt{3}$	$-1/2\sqrt{3}$	$-1/2\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	

Conclusiones

El estudio de las simetrías gauge mediante sus transformaciones prueba ser una herramienta fundamental para el tratamiento analítico de las invariancias en las teorías físicas, puesto que nos permite conseguir las simetrías mediante las funciones de transformación sencillas. Para nuestro caso vimos que los grupos U(1) y SU(N) son aplicados al estudio de las interacciones físicas, por ejemplo, U(1) a la electrodinámica cuántica, QED y la interacción electromagnética, SU(1) a la interacción débil y al campo leptónico y SU(3) a la cromodinámica cuántica, QCD y la interacción fuerte.

Además, la invariancia gauge para los grupos particulares U(1), SU(2) y SU(3) conducen a potenciales gauge que describen partículas asociadas a cada interacción fundamental, ya sea electromagnética, débil y fuerte, respectivamente. Desde el grupo U(1) surge el fotón que es descrito por el campo A_μ. Desde el grupo SU(2) surgen los bosones vectoriales $W^\pm$ y Z^o que son descritos por el potencial gauge W_μ que son masivos, pero en nuestro análisis lo consideramos como no masivos de forma particular. Del grupo SU(3) surgen los 8 gluones que son descritos por el potencial gauge G_μ

y no son masivos. La particularidad de todos estos potenciales gauge es que son invariantes y además son los mediadores para cada interacción fundamental, otra característica es que los bosones vectoriales son masivos, mientras que el foton y los gluones no son masivos.

La invariancia de la densidad lagrangiana de Dirac conduce también a resultados importantes especialmente para los casos U(1) y SU(2). Para U(1) surge la corriente electromagnética J^{μ} que al unirlo con el campo gauge A_{μ} nos permiten derivar las ecuaciones de Maxwell clásica. Para SU(2) surge una densidad particular $\mathcal{J}^{\mu}$ que no la tratamos en detalle, pero indicamos que a partir de esta surgen características importantes como la hipercarga (Y) y las corrientes de isospín.

Por otro lado, la densidad lagrangiana total de U(1), describe la interacción del fotón con la materia, es decir describe completamente la electrodinámica cuántica. La densidad Lagrangiana de SU(2), describe los bosones vectoriales libres y además contiene, a diferencia de U(1), los términos de auto interacción e interacción entre ellas, manifestándose a través de las interacciones triples y cuarticas, así como a los campos espinoriales.

La densidad lagrangiana total de SU(3), describe las interacciones libres y entre ellas de los quarks, que son denotadas por las funciones de onda llamadas colores. Las diferencias entre los grupos se presenta debido a que U(1) es un grupo abeliano, mientras que SU(2) y SU(3) son grupos no abelianos que son conocidos también como campos de Yang-Mills.

Finalmente, una consecuencia mayor del estudio de las simetrías gauge es la formulación de la teoría electro-débil y posteriormente el modelo estándar de las partículas fundamentales como la teoría más completa lograda actualmente, pues engloba el estudio de las tres interacciones fundamentales, la electromagnética, la débil y la fuerte. Ambas teorías surgen como una invariancia simultánea de las transformaciones gauge abelianas y no abelianas locales, es decir, $SU(2)_L \otimes U(1)$ y $SU(3) \otimes SU(2)_L \otimes U(1)$ describen a la teoría electro-débil y al modelo estándar [27, 28], respectivamente.

Referencias

[1] P. H. Frampton, *Gauge Field Theories*, 3[ra] Ed., Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim (2008).

[2] M. Böhm, A. Denner y H. Joos, *Gauge Theories of the Strong and Electroweak Interaction*, B. G. Teubner, Stuttgart (2001).

[3] International Institute of Intellectual Cooperation, *New Theories in Physics*, Conference Proc. Warsaw, May 30th-June 3rd, 1938, published in (1939).

[4] R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras, and some of their Applications*, Jonh Wiley & Sons, New York (1974).

[5] M. Guidry, *Gauge Field Theories, an introduction with applications*, Wiley-Verlag, Berlín (2004).

[6] E. Leader y E. Predazzi, *An Introduction to Gauge Theories and Modern Physics*, Vol. I, Cambridge University Press, Cambridge (1996).

[7] V. Rubakov, *Classical Theory of Gauge Fields*, Princeton University Press, Boston (2002).

[8] A. Das, *Lectures on Quantum Field Theory*, World Scientific, Singapur (2008).

[9] M. E. Peskin y D. V. Schroeder, *Quantum Field Theory*, Perseus Book, New York (1995).

[10] J. W. Negele y E. Vogt, *Advances in Nuclear Physics*, Vol 23, Kluwer Academic Publishers, Londres (2002).

[11] H. Van Hess, *Introducction to Ralativist Quantum Field Theory*, (2003).

[12] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, New York (2006).

[13] Juan Antonio Caballero, *Mecánica Cuántica Relativista*, Universidad de Sevilla, Sevilla (2009).

[14] C. N. Yang y R. L. Mills, *Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*, Phys. Rev. **96**, 191 (1954).

[15] S. Dawson y R. N. Mohapatra, *Colliders and Neutrinos, The window into physics beyond the Standard Model*, World Scientific, Singapur (2008).

[16] B. R. Martin, *Nuclear and Particle Physics*, John Wiley & Sons, New York (2006).

[17] S. L. Glashow, *Partial Symmetries of Weak Interactions*, Nucl. Phys. **22**, 579 (1961).

[18] S. Weinberg, *A Model for Leptons*, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967).

[19] A. Salam, *Weak and Electromagnetic Interactions in Elementary Particle Theory*; *Nobel Symphosium* No. 8, ed. N. Svarthol, Almqvist and Wiksell, Stockholm (1969).

[20] F. Mandl and G. Shaw, *Quantum Field Theory*, Jonh Wiley & Sons, New York (1993).

[21] H. Fritzsch, *Murray Gell-Mann Selected Pappers*, World Scientific Series in 20th Century Physics, Vol 40., World Scientific, Singapur (2010).

[22] Frank Wilczek, *QCD Made Simple*, *Physics Today*, agosto 26 (2000).

[23] M. Gell-Mann, *A Schematic Model of Baryons and Mesons*, Phys. Lett. **8**, 214 (1964)

[24] G. Zweig, *CERN Reports 8419/TH412, umpublihsed*, *Developments in the Quark Model of Hadrons*, Vol. I, (1964-1978).

[25] Taizo Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics*, *An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories*, World Scientific, Singapur (1987).

[26] F. J. Ynduráin, *The Theory of Quark and Gluon Interactions*, Springer-Verlang, Berlin (2006).

[27] T. Morii y C. S. Lim, *The Physics of the Standrd Model and Beyond*, World Scientific, Singapur (2004).

[28] J. F. Donogue, E. Golowich y B. R. Holstein, *Dinamics of Standard Model*, Cambridge University Press, Cambridge (2002).