Revista de Investigación de Física. Vol. 8 N° 2 (2005) 67-72

CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES
ISSN 1605-7744

SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DINÁMICAS DE LA CUERDA BOSÓNICA

Fulgencio Villegas Silva[a*]

[a] *Facultad de ciencias Físicas Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Ciudad Universitaria. Av. Venezuela cdra 34. Ap. Postal 14-0149, Lima 14, Perú.*

Abstract

By means of the Dirac's method and the Hamiltonian's formalism the Nambu-Goto Classical theory is analyzed, dynamics equations of the Boson string are obtained and solved. Following this method the algebra of the first class bonds is computed, that are the generators of the action symmetry of the Bosons strings. The analysis is made as for open strings as for close strings.

PACS: 11.25.-w; 46.70.Hg; 43.40.Cw
Keywords: Fields and particles, Supercuerdas, Supersimetry, Unification of fields.

Resumen

Mediante el método de Dirac y el formalismo Hamiltoniano se analiza la teoría Clásica de Nambu-Goto obteniéndose y resolviéndose las ecuaciones dinámicas de la cuerda Bosónica. Siguiendo este método se calcula el álgebra de los vínculos de primera clase, que son los generadores de la simetría de acción de la cuerda Bosónica. El análisis se realiza tanto para cuerdas abiertas como para cuerdas cerradas

Palabras claves: Campos y partículas, Supercuerdas, Supersimetría, Unificación de campos.

1. Introducción

Los sistemas vinculados o singulares se caracterizan por presentar ambigüedades en las soluciones de las ecuaciones de movimiento [1].son muy frecuentes en Física; como ejemplos de teorías singulares se tiene a la gravitación, a las teorías de interacciones nucleares, el electromagnetismo y las teorías de cuerdas. Estos sistemas pueden presentar invariancia de gauge. El tratamiento clásico de estos sistemas no puede ser realizado utilizando los formalismos Lagrangeano o Hamiltoniano usuales [2]. En el caso del formalismo Hamiltoniano, se utiliza el método de Dirac, que enseña como obtener la dinámica de tales sistemas, sin ambigüedades.

Siguiendo el método de Dirac, analizamos la acción de Nambu-Goto para la cuerda bosónica: calculamos los momentos canónicos y verificamos que la teoría presente vínculos. El método también nos permite verificar que estos vínculos sean de primera clase y que la Hamiltoniana total del sistema sea nula, o sea, una combinación lineal de los vínculos. En este contexto calculamos una álgebra de los vínculos de primera clase, que son los generadores de la simetría de acción de la cuerda bosónica.

2. Análisis clásico de la teoría de Nambu-Goto

Partiendo de la acción de la cuerda bosónica[3]:

$$S_{NG} = -\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2\xi\sqrt{-\gamma} \tag{1}$$

siendo γ el determinante de la llamada métrica de la hoja de mundo:

$$\gamma_{ab}(\gamma_{ab} = \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu \equiv \partial_\alpha x.\partial_\beta x),$$

y α' es una constante de dimensión $[m^{-2}]$. Siendo $\xi^1 = \tau$ y $\xi^2 = \sigma$, vamos a considerar que la posición inicial y final de la cuerda (en $\tau=\tau_1$ y $\tau=\tau_2$) están fijas, y que $0 \leq \sigma \leq \pi$. La variación de la acción queda

* Corresponding author. *e-mail*: fvillegass@unmsm.edu.pe

$$\delta S_{NG}=\left[\int_0^{\pi} d\sigma\, \pi_\mu \delta x^\mu\right]_{\tau_1}^{\tau_2}+\left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\, \pi_\mu^{(\sigma)} \delta x^\mu\right]_0^{\pi}-.. \tag{2}$$

$$..-\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^{\pi} d\sigma(\partial_\tau \pi_\mu+\partial_\sigma \pi_\mu^{(\sigma)})\delta x^\mu=0$$

siendo

$$\pi_\mu=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}, \qquad \pi_\mu^{(\sigma)}=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^\mu}, \tag{3}$$

y

$$\dot{x}=\frac{\partial x}{\partial \tau}, \quad x'=\frac{\partial x}{\partial \sigma}. \tag{4}$$

Las variaciones δx^μ son arbitrarias e independientes en todos los puntos del interior de la hoja de mundo; por lo tanto, el último término de δS_{NG} implica la siguiente ecuación de movimiento:

$$\partial_\tau \pi_\mu+\partial_\sigma \pi_\mu^{(\sigma)}=0\ , \tag{5}$$

En tanto, para que loa variación de S_{NG} sea nula, los términos de superficie deben anularse; esto nos lleva a imponer ciertas condiciones de contorno. En el caso del primer término de variación, el ya es nulo, por lo tanto los términos quedan fijos en las posiciones inicial y final de la cuerda en τ_1 y τ_2. Para el segundo término de la variación, existen dos posibilidades para las condiciones de contorno:

•condiciones de contorno periódicas:

$$x^\mu(\tau,0)=x^\mu(\tau,\pi) \tag{6}$$

que nos lleva a cuerdas cerradas.

•condiciones de contorno de Newman:

$$\pi_\mu^{(\sigma)}=0 \ \ en\ \sigma=0,\pi\ , \tag{7}$$

que nos lleva a cuerdas abiertas.

Por tanto las ecuaciones de movimiento Lagrangianas tienen la misma forma para ambas cuerdas abiertas o cerradas, desde que las condiciones de contorno anteriores sean impuestas.

Haremos ahora un análisis Hamiltoniana de la teoría, los momentos canónicos son:

$$\pi_\mu(\sigma)\equiv\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu(\sigma)}=\frac{1}{2\pi\alpha'}\frac{\dot{x}^\mu x'^2-x'_\mu(\dot{x}.x')}{\sqrt{-\gamma}} \tag{8}$$

Ellas satisfacen dos vínculos:

$$G_0(\sigma)\equiv\pi^2+\frac{x'^2}{(2\pi\alpha')^2}\approx 0,$$

$$G_1(\sigma)\equiv\pi.x'\approx 0. \tag{9}$$

La Hamiltoniana canónica es nula, y la Hamiltoniana total puede ser escrita en términos de los dos vínculos de la ecuación (9):

$$H_t=\int_0^{\pi} d\sigma\left[\lambda^0(\sigma)G_0(\sigma)+\lambda^1(\sigma)G_1(\sigma)\right], \tag{10}$$

Los vínculos satisfacen una álgebra a través de los paréntesis de Poisson:

$$\{G_0(\sigma),G_0(\sigma')\}=\frac{1}{(\pi\alpha')^2}[G_1(\sigma)+G_1(\sigma')]\partial_\sigma\delta(\sigma-\sigma'),$$

$$\{G_1(\sigma),G_0(\sigma')\}=[G_0(\sigma)+G_0(\sigma')]\partial_\sigma\delta(\sigma-\sigma'), \tag{11}$$

$$\{G_1(\sigma),G_1(\sigma')\}=[G_1(\sigma)+G_1(\sigma')]\partial_\sigma\delta(\sigma-\sigma'),$$

Las condiciones de consistencia temporal no generan nuevos vínculos.

3. Formalismo de Osciladores

Cuerda Abierta

Vamos a escoger el gauge conforme para fijar las invariancias por parametrización de la teoría, lo que significa imponer las siguientes condiciones:

$$\lambda^0=-\pi\alpha',\ \lambda^1=0\ , \tag{12}$$

con estas condiciones las ecuaciones de movimiento toman la forma:

$$\ddot{x}^\mu-x''^\mu=0\,. \tag{13}$$

La Hamiltoniana total entonces pasa a ser escrita de la siguiente forma:

$$H_t=-\pi\alpha'\int_0^{\pi} d\sigma\, G_0(\sigma), \tag{14}$$

y las condiciones de contorno para la cuerda abierta toman la forma

$$x'_{\mu}=0 \quad en \quad \sigma=0,\pi. \tag{15}$$

Ahora vamos a encontrar la expansión de Fourier de $x^{\mu}(\tau,\sigma)$ que es definida en el intervalo $0\leq\sigma\leq\pi$ para un valor fijo de τ, y que satisface la condición de contorno (15). Primero, entendemos la definición de $x^{\mu}(\tau,\sigma)$ para la región de $[-\pi,\pi]$ de acuerdo con las condiciones de contorno, y después expandimos $x^{\mu}(\tau,\sigma)$ en cosenos, visto que la extensión es simétrica. Finalmente obtenemos

$$x^{\mu}(\tau,\sigma)=\sum_{n} x_{n}^{\mu}\exp(in\sigma)=x_{0}^{\mu}+2\sum_{n\geq1} x_{n}^{\mu}\cos n\sigma, \tag{16}$$

siendo $x_{n}^{\mu}=x_{-n}^{\mu}(x_{-n}^{\mu}=x_{-n}^{\mu*})$. Similarmente, la expansión de Fourier del momento canónico $\pi^{\mu}(\tau,\sigma)$ es

$$\pi^{\mu}(\tau,\sigma)=\sum_{n}\pi_{n}^{\mu}\exp(in\sigma)=\pi_{0}^{\mu}+2\sum_{n\geq1} x_{n}^{\mu}\cos n\sigma, \tag{17}$$

siendo $\pi_{n}^{\mu}=\pi_{-n}^{\mu}(\pi_{-n}^{\mu}=\pi_{-n}^{\mu*})$.

Los paréntesis de Poisson canónicos tienen la forma:

$$\left\{x^{\mu}(\sigma),\pi_{\nu}(\sigma')\right\}=\delta_{\nu}^{\mu}\delta(\sigma-\sigma'). \tag{18}$$

cambiando la normalización delta
$\delta(\sigma-\sigma')\rightarrow 2\delta_{s}(\sigma-\sigma')$,

considerando las expresiones (16) y (17) en el intervalo $[0,\pi]$, tenemos que

$$\left\{x_{n}^{\mu},\pi_{m}^{\nu}\right\}=\eta^{\mu\nu}\frac{1}{2\pi}(\delta_{n,m}+\delta_{n,-m}),\quad (n,m\geq0). \tag{19}$$

Introducimos la cantidad

$$\prod{}^{\mu}(\sigma)\equiv\pi^{\mu}+\frac{x'^{\mu}}{2\pi\alpha'},\quad -\pi\leq\sigma\leq\pi. \tag{20}$$

De esta manera, podemos condensar los vínculos $G_0(\sigma)$ y $G_1(\sigma)$ en único intervalo $[-\pi,\pi]$:

$$\prod{}^{2}(\sigma)=G_{0}(\sigma)+\frac{G_{1}(\sigma)}{\pi\alpha'}, \tag{21}$$

siendo $G_0(\sigma)=G_0(\sigma)$ y $G_1(-\sigma)=-G_1(\sigma)$. La expansión de Fourier para $\prod^{\mu}$ es

$$\prod{}^{\mu}(\sigma)=-\frac{1}{\pi\sqrt{2\alpha'}}\sum_{n} a_{n}^{\mu}\exp(in\sigma), \tag{22}$$

siendo

$$-a_{n}^{\mu}=(\pi_{n}^{\mu}+\frac{in}{2\pi\alpha'}x_{n}^{\mu})\pi\sqrt{2\alpha'}. \tag{23}$$

Podemos escribir x_{n}^{μ} y π_{n}^{μ} en términos de a_{n}^{μ} de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}-\pi_{n}^{\mu}&=\frac{1}{\pi\sqrt{2\pi\alpha'}}\frac{1}{2}(a_{n}^{\mu}+a_{-n}^{\mu}),\\ x_{n}^{\mu}&=\frac{i\sqrt{2\alpha'}}{n}\frac{1}{2}(a_{n}^{\mu}-a_{-n}^{\mu}).\end{aligned} \tag{24}$$

Los paréntesis de Poisson canónicos pueden ser escritos en términos de los a_{n}^{μ} como

$$\{a_{n}^{\mu},a_{-n}^{\mu}\}=in\delta_{n,m}\eta^{\mu\nu}\qquad (n,m\geq1), \tag{25}$$

que sugiere que en la teoría cuántica a_{n}^{μ} y $a_{n}^{\mu*}=a_{-n}^{\mu}$ serán los operadores de creación y aniquilación de los modos de la cuerda.

La dependencia temporal de los modos de la cuerda es determinada por las ecuaciones de movimiento (13):

$$\ddot{x}_{n}^{\mu}-n^{2}x_{n}^{\mu}=0. \tag{26}$$

Usando, $\pi_{n}^{\mu}=\frac{\dot{x}_{n}^{\mu}}{2\pi\alpha'}$, y la definición de a_n tenemos

$$a_{n}(\tau)=a_{n}(0)\exp(-in\tau)\quad (n\neq0), \tag{27}$$

en cuanto que la dependencia temporal de los modos cero es

$$x_{0}^{\mu}=x^{\mu}+p^{\mu}\tau,\quad \pi_{0}^{\mu}=\frac{p^{\mu}}{2\pi\alpha'}, \tag{28}$$

siendo que las variables x^μ y p^μ describen el movimiento del centro de masa y satisfacen

$$\{x^\mu, p^\nu\} = -\eta^{\mu\nu}(2\alpha').$$

La solución general de las ecuaciones de movimiento para la cuerda abierta es dada por

$$x^\mu = x_0^\mu + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}[a_n^\mu(0)\exp(-in\tau) - a_{-n}^\mu(0)\exp(in\tau)]\cos n\sigma,$$
$$\pi^\mu = \pi_0^\mu - \frac{\sqrt{2\alpha'}}{2\pi\alpha'}\sum_{n\geq 1}[a_n^\mu(0)\exp(-in\tau) + a_{-n}^\mu(0)\exp(in\tau)]\cos n\sigma. \qquad (29)$$

Cuerda Cerrada

Para una cuerda cerrada definida en $[0,\pi]$ la expansión de Fourier está dada por [4]

$$x^\mu(\sigma) = x_0^\mu + \sum_{n\leq 1}(x_n^\mu \exp(2in\sigma) + x_n^{\mu *}\exp(-2in\sigma)) = \sum_n x_n^\mu \exp(2in\sigma),$$
$$\pi^\mu(\sigma) = \pi_0^\mu + \sum_{n\leq 1}(\pi_n^\mu \exp(2in\sigma) + \pi_n^{\mu *}\exp(-2in\sigma)) = \sum_n \pi_n^\mu \exp(2in\sigma). \qquad (30)$$

En este caso, en contraste con el caso de la cuerda abierta, $x_n \neq x_{-n}$ y $\pi_n \neq \pi_{-n}$, además $x_{-n} \equiv \overset{*}{x}_n$ y $\pi_{-n} \equiv \overset{*}{\pi}_n$.

Los paréntesis de Poisson canónicos son escritos como

$$\{x_n^\mu, \pi_{-m}^\nu\} = \eta^{\mu\nu}\frac{1}{\pi}\delta_{n,m} \quad (n,m \geq 0). \qquad (31)$$

En analogía con la ecuación (20) para el caso de la cuerda abierta, introducimos las siguientes cantidades en el intervalo $[0,\pi]$:

$$\Pi^\mu \equiv \pi^\mu + \frac{x'^\mu}{2\pi\alpha'} = -\frac{1}{\pi\sqrt{2\alpha'}}\sum_n 2a_n^\mu \exp(2in\sigma),$$
$$\tilde{\Pi}^\mu \equiv \pi^\mu - \frac{x'^\mu}{2\pi\alpha'} = -\frac{1}{\pi\sqrt{2\alpha'}}\sum_n 2b_n^\mu \exp(2in\sigma), \qquad (32)$$

siendo

$$-2a_n^\mu = (\pi_n^\mu + \frac{in}{\pi\alpha'}x_n^\mu)\pi\sqrt{2\alpha'} \ ,$$
$$-2b_{-n}^\mu = (\pi_n^\mu - \frac{in}{\pi\alpha'}x_n^\mu)\pi\sqrt{2\alpha'} \ , \qquad (33)$$

como $a_{-n} \equiv \overset{*}{a}_n$ y $b_{-n} \equiv \overset{*}{b}_n$. De esta manera, tenemos

$$-\pi_n^\mu = \frac{1}{\pi\sqrt{2\alpha'}}(a_n^\mu + b_{-n}^\mu) \ ,$$
$$x_n^\mu = \frac{i\sqrt{2\alpha'}}{2n}(a_n^\mu - b_{-n}^\mu) \ . \qquad (34)$$

Los paréntesis de Poisson canónicos expresados en términos de a_n y b_n están dados por

$$\{a_n^\mu, a_{-m}^\nu\} = in\delta_{n,m}\eta^{\mu\nu} = \{b_n^\mu, b_{-m}^\nu\}$$
$$(n,m \geq 1),$$
$$\{a_r^\mu, b_s^\nu\} = 0. \qquad (35)$$

La dependencia temporal de los modos es dada por

$$a_n(\tau) = a_n(0)\exp(-2in\tau),$$
$$b_n(\sigma) = b_n(0)\exp(-2in\tau) \ (n \neq 0), \qquad (36)$$
$$x_0^\mu = x^\mu + p^\mu\tau, \ \pi_0^\mu = -\frac{p^\mu}{2\pi\alpha'},$$

con $\{x^\mu, p^\mu\} = -\eta^{\mu\nu}(2\alpha')$. Podemos separar los modos que se mueven para la izquierda y para la derecha en las expresiones (30):

$$x^\mu(\sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'}\frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}[a_n^\mu(0)\exp(2in(\sigma-\tau)) - b_n^\mu(0)\exp(-2in(\sigma+\tau))],$$

$$\pi^\mu(\sigma) = \pi_0^\mu - \frac{\sqrt{2\alpha'}}{2\pi\alpha'}\sum_{n\neq 0}[a_n^\mu(0)\exp(2in(\sigma-\tau)) + b_n^\mu(0)\exp(-2in(\sigma+\tau))]. \tag{37}$$

4. Álgebra de Virasoro clásica

Después de la fijación en el gauge conforme, aún queda fijar la invariancia conforme en dos dimensiones, la cual estudiaremos ahora en el formalismo de los osciladores.

Cuerda Abierta

Como hemos visto anteriormente, los dos vínculos $G_0(\sigma)$ y $G_1(\sigma)$ pueden ser escritos como un vínculo cuando estamos en el intervalo $[-\pi, \pi]$ (ecuación (21)). Las componentes de Fourier de $\prod^2(\sigma)$ en τ=0 están dadas por [5]

$$L_n \equiv -\frac{\pi\alpha'}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f_n^*(\sigma)\prod{}^2(\sigma)d\sigma, \tag{38}$$

siendo $f_n(\sigma) = \exp(in\sigma)$. El álgebra de $G_0(\sigma)$ y $G_1(\sigma)$ puede ser escrita en la forma

$$\{L_n, L_m\} = -i(n-m)L_{n+m}. \tag{39}$$

Los coeficientes L_n son conocidos como los generadores del álgebra de Virasoro, y su álgebra es el álgebra conforme en dos dimensiones (esto es sin fijar ningún gauge). Usando la ecuación (22) ello pueden ser escrito en términos de los coeficientes a_n (en τ=0):

$$L_n = -\frac{1}{2}\sum_r a_r . a_{n-r}. \tag{40}$$

Como la Hamiltoniana total es una combinación lineal de $G_0(\sigma)$ y $G_1(\sigma)$, entonces ella puede ser escrita en términos de los generadores de Virasoro:

$$H_t = \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma\,\lambda(\sigma)\prod{}^2(\sigma),$$

$$2\lambda(\sigma) \equiv \lambda^0(\sigma) + \pi\alpha'\lambda^1(\sigma), \tag{41}$$

siendo $\lambda^0(-\sigma) = \lambda^0(\sigma)$ y $\lambda^1(-\sigma) = -\lambda^1(\sigma)$. Después de hecho esto, la expansión de Fourier

$$\lambda(\sigma) = -\frac{\pi\alpha'}{2}\sum_n \lambda_n \exp(-in\sigma),$$

tenemos como resultado

$$H_t = \sum_n \lambda_n L_n. \tag{42}$$

En el gauge conforme tenemos

$$\lambda(\sigma) = -\frac{\pi\alpha'}{2}, \quad H_t = L_0. \tag{43}$$

Podemos expresar L_0 en términos del número de excitaciones N:

$$L_0 = -\frac{1}{2}a_0 . a_0 - \sum_{r\geq 1} a_r^* . a_r = -\frac{1}{2}a_0 . a_0 + N, \tag{44}$$

siendo

$$a_0^\mu = -\pi_0^\mu \pi\sqrt{2\alpha'} = \frac{p^\mu}{\sqrt{2\alpha'}}.$$

Cuerda Cerrada

La cuerda cerrada es tratada de manera similar a la cuerda abierta.

Tenemos dos tipos de generadores de Virasoro:

$$L_n = -\frac{\pi\alpha'}{4}\int_0^\pi f_{2n}^*(\sigma)\Pi^2(\sigma)d\sigma = -\frac{1}{2}\sum_r a_r.a_{n-r}, \tag{45}$$

$$\tilde{L}_n = -\frac{\pi\alpha'}{4}\int_0^\pi f_{2n}^*(\sigma)\tilde{\Pi}^2(\sigma)d\sigma = -\frac{1}{2}\sum_r b_r.b_{n-r},$$

Con dos álgebras de Virasoro independientes:

$$\begin{aligned}\{L_n, L_m\} &= -i(n-m)L_{n+m},\\ \{\tilde{L}_n, \tilde{L}_m\} &= -i(n-m)\tilde{L}_{n+m},\\ \{L_n, \tilde{L}_m\} &= 0.\end{aligned} \tag{46}$$

La Hamiltoniana total es escrita como una combinación lineal de los L_n's y $\tilde{L}_n$'s. Usando la relación

$$H_t = \int_0^\pi d\sigma\left[\lambda\,\Pi^2 + \tilde{\lambda}\,\tilde{\Pi}^2\right], \tag{47}$$

(siendo $2\lambda = \lambda^0 + \pi\alpha'\lambda^1$ y $2\tilde{\lambda} = \lambda^0 + \pi\alpha'\lambda^1$) es usado en la expansión de Fourier para λ (y similarmente para $\tilde{\lambda}$):

$$\lambda = -\frac{\pi\alpha'}{4}\sum_n \lambda_n \exp(2in\sigma),$$

Tenemos que la Hamiltoniana total toma la forma

$$H_t = \sum_n (\lambda_n L_n + \tilde{\lambda}_n \tilde{L}_n). \tag{48}$$

En el gauge conforme, la Hamiltoniana es

$$H_t = 2(L_0 + \tilde{L}_0). \tag{49}$$

Introduciendo los números de excitación N y $\tilde{N}$, tenemos

$$\begin{aligned}L_0 &= -\frac{1}{2}a_0^2 - \sum_{r\geq 1} a_r^*.a_r = -\frac{1}{2}a_0^2 + N,\\ \tilde{L}_0 &= -\frac{1}{2}b_0^2 - \sum_{r\geq 1} b_r^*.b_r = -\frac{1}{2}b_0^2 + \tilde{N},\end{aligned} \tag{50}$$

siendo

$$a_0^\mu = b_0^\mu = \frac{p^\mu}{2\sqrt{2\alpha'}}.$$

Las cuerdas cerradas tienen una invariancia adicional, la invariancia por traslaciones globales de σ, o sea, $\sigma \to \sigma + a$. El generador de estas transformaciones es el siguiente vínculo de primera clase:

$$L_0 - \tilde{L}_0 \approx 0. \tag{51}$$

5. Conclusiones.

El análisis clásico Hamiltoniana de la acción de Nambu-Goto mostró que la teoría presenta dos vínculos de primera clase, que son los generadores de las invariancias por reparametrización. Después de la fijación del gauge (en el gauge conforme) la teoría aún presenta una simetría residual, que es la invariancia conforme en dos dimensiones. El análisis fue hecho tanto para cuerdas abiertas como para cuerdas cerradas.

Referencias

[1]. K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, Springer-Verlag, Hamburg, 1982.
[2]. M. Blagojević, *Gravitation and Gauge Symmetries*, Belgrado, 1996.
[3]. M.B. Green, J. H. Schwarz, E. Witten, *Superstring Theory*, Cambridge University press,1987.
[4]. J. Polchinski, *String Theory*, vol. 1, Cambridge University press, 1998.
[5]. J. Scherk, Rev. Mod. Phys., 47, 123 (1975).