Revista de Investigación de Física. Vol. 8 N° 2 (2005) 73-76
ISSN 1605-7744

ECUACIONES LINEALES EN CAMPOS GRAVITATORIOS DEBILES

Fulgencio Villegas Silva[a*]

[a] *Facultad de ciencias Físicas Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Ciudad Universitaria. Av. Venezuela cdra 34. Ap. Postal 14-0149, Lima 14, Perú.*

Abstract

The movement equations in the General Theory of relativity corresponding to a particle in a weak gravitational field, le us appoint analogy with the movement equations of a charged particle in a electromagnetic field.

A study of this solutions let us appoints a deep analogy between gravitation and electromagnetism. As consequence of this result you can express the weak gravitational fields by a system of equations similar to the Maxwell's for the electromagnetism field.

PACS: 04.50.+h; 11.10.Kk; 02.40.-k; 04.20.-q
Keywords: Gravity, General Relativity, Field theory.

Resumen

Las ecuaciones de movimiento de la teoría general de la relatividad correspondiente a una partícula en un campo gravitatorio débil, permite establecer determinada analogía con las de una partícula cargada en un campo electromagnético. Como consecuencia de este resultado se puede expresar el campo gravitatorio débil mediante un sistema de ecuaciones análogas a las de Maxwell para el electromagnetismo.

Estas soluciones lineales, desde el punto de vista metodológico, permiten estudiar comparativamente a los campos gravitatorio y electromagnético.

Palabras claves: Gravitación, Relatividad General, Teoría de campos.

1. Introducción

En presencia de cuerpos cualesquiera, las ecuaciones del campo gravitatorio débil se reducen a la ecuación de ondas [1].

$$\frac{1}{2}\Box\psi_{ik} = -\frac{8\pi G}{c^4}\tau_{ik}. \qquad (1)$$

Sus soluciones corresponden a los potenciales retardados[1]

$$\psi_{ik} = \frac{4G}{c^4}\int \tau_{ik}\left(t-\frac{R}{c}\right)\frac{dV}{R},$$

donde $\tau_{ik} = T_{ik} - \frac{1}{2}\delta_{ik}T$,

siendo τ_{ik} el tensor energía impulso.

La ecuación de movimiento de una partícula en un campo gravitatorio:

$$\frac{d^2X_i}{ds^2} + \Gamma^i_{kj}\frac{dX_k}{ds}\frac{dX_j}{ds} = 0$$

En el caso de un campo débil se reduce a la expresión [2]:

$$\frac{d}{cdt}\left[\left(1+\frac{\psi_{00}}{2}\right)\frac{dX_i}{cdt}\right] = -\Gamma^i_{kj}\frac{dX_k}{cdt}\frac{dX_j}{cdt}\left(1+\frac{\psi_{00}}{2}\right), \qquad (2)$$

Donde Γ^i_{kj} corresponden a los símbolos de Christoffel y los potenciales retardados a las cantidades:

* Corresponding author. *e-mail*: fvillegass@unmsm.edu.pe

$$\psi_{00} = -\psi_{11} = -\psi_{22} = -\psi_{33} = \frac{2G}{c^2}\int \sigma \frac{dV}{R}$$

$$\psi_{0\alpha} = \frac{2G}{c^3}\int \frac{J_\alpha dV}{R}$$

$$\psi_{0\beta} = 0$$

Siendo $J_\alpha = \sigma \frac{dX_\alpha}{dt}$, σ es la densidad volumétrica de masa y los símbolos de Christoffel [3], se reducen a :

$$\Gamma^{\mu}_{00} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \psi_{00}}{\partial X_\mu} + \frac{\partial \psi_{0\mu}}{\partial X_0}$$

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha 0} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi_{0\mu}}{\partial X_\alpha} - \frac{\partial \psi_{0\alpha}}{\partial X_\mu}\right)$$

$$\Gamma^{\mu}_{0\beta} = 0$$

La ecuación de movimiento [3], empleando la notación vectorial toma la forma:

$$\frac{d}{dt}\left\{(1+\bar{\sigma})\vec{V}\right\} = \nabla\bar{\sigma} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{c}\vec{V}\times\nabla\times\vec{A}, \quad (3)$$

en la cual se han definido respectivamente los potenciales escalar y vectorial como:

$$\bar{\sigma} = G\int \sigma \frac{dV}{R},$$

$$A_\alpha = -\frac{4G}{c}\int J_\alpha \frac{dV}{R},$$

En esta ecuación de movimiento, el termino $1+\bar{\sigma}$ representa el aumento de la masa ponderable en presencia de otros cuerpos [3] , y el primer miembro de la ecuación puede interpretarse como intensidad del campo gravitatorio. En ella los dos últimos términos se interpretan respectivamente como la acción inductiva de las masas en movimiento sobre el cuerpo considerado y la acción del campo de coriolis.

Físicamente $\bar{\sigma}$ representa el potencial gravitatorio Newtoniano, constituyendo el potencial escalar del campo gravitatorio y A_α puede interpretarse como su potencial vectorial.

2. Analogía entre las ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones del movimiento de una partícula cargada en presencia de un campo electromagnético pueden expresarse como:

$$\frac{1}{q}\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_\alpha}{\partial t} - \nabla\varphi + \frac{1}{c}\vec{V}\times\nabla\times\vec{A}. \quad (4)$$

Si comparamos (3) con (4) vemos que son completamente análogas, pudiéndose definir como intensidades del campo gravitatorio y de Coriolis respectivamente a :

$$\vec{g} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial A_\alpha}{\partial t}, \quad (5)$$

$$\vec{h} = \nabla\times\vec{A}, \quad (6)$$

por lo cual (3) puede escribirse como:

$$\frac{1}{m}\frac{d\vec{p}}{dt} = -\vec{g} + \frac{1}{c}\vec{V}\times\vec{h}, \quad (7)$$

siendo : $\vec{p} = m(1+\bar{\sigma})\vec{V} \approx m\vec{V}$.

Adoptando (7) una forma análoga al caso electromagnético.

3. Sistema de ecuaciones lineales para el campo gravitatorio débil

De las expresiones (5) y (6) se deduce ecuaciones que contengan solo a los términos $\vec{g}$ y $\vec{h}$, que deben ser análogas a las ecuaciones de Maxwell.

Aplicando el rotacional a la ecuación (5) se obtiene:

$$\nabla\times\vec{g} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{h}}{\partial t}. \quad (8)$$

Al aplicar la divergencia a la ecuación (6), resulta:

$$\nabla\cdot\vec{h} = 0, \quad (9)$$

Al aplicar la divergencia en la expresión (5) e imponiendo el gauge análogo al de Coulomb, que $\nabla\cdot\vec{A} = 0$, resulta:

$$\nabla\cdot\vec{g} = 4\pi G\sigma. \quad (10)$$

Al aplicar el rotacional a la ecuación (6), y suponiendo un flujo estacionario de partículas, para el cual $\nabla \cdot \vec{J} = 0$, se obtiene:

$$\nabla \times \vec{h} = \frac{16\pi G}{c}\vec{J}, \tag{11}$$

donde $\vec{J} = \sigma\vec{V}$.

Así queda constituido el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot \vec{g} = 4\pi G\sigma, && \nabla \cdot \vec{h} = 0, \\ &\nabla \times \vec{g} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{h}}{\partial t}, && \nabla \times \vec{h} = \frac{16\pi G}{c}\vec{J}. \end{aligned} \tag{12}$$

Para los procesos no estacionarios, la ecuación de continuidad exige que:

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0,$$

y por analogía con la generalización de la ley de Ampere en el caso electromagnético, se requiere generalizar para el caso no estacionario a la ecuación (11) obteniéndose:

$$\nabla \times \vec{h} = \frac{16\pi G}{c}\vec{J} + \frac{4}{c}\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}.$$

Se obtiene así un sistema de ecuaciones lineales para el campo gravitatorio débil análogo al sistema de ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético.

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot \vec{g} = 4\pi G\sigma, \\ &\nabla \cdot \vec{h} = 0, \\ &\nabla \times \vec{g} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{h}}{\partial t}, \\ &\nabla \times \vec{h} = \frac{16\pi G}{c}\vec{J} + \frac{4}{c}\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} \end{aligned} \tag{13}$$

Estas ecuaciones no admiten en contraposición al segundo par de ecuaciones de Maxwell [4], una formulación covariante de la forma:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial X_k} = \frac{4\pi}{c}J_i,$$

donde F_{ik} es el tensor del campo electromagnético y J_i es el cuadrivector densidad de corriente. Esta imposibilidad radica en los coeficientes de las ecuaciones:

$$\nabla \cdot \vec{g} = 4\pi G\sigma,$$

$$\nabla \times \vec{h} = \frac{16\pi G}{c}\vec{J} + \frac{4}{c}\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}.$$

Las ecuaciones de onda que se obtienen para el sistema de ecuaciones (13), son:

$$\Delta\vec{h} - \frac{4}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{h}}{\partial t^2} = \vec{0},$$

$$\Delta\vec{g} - \frac{4}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{g}}{\partial t^2} = \vec{0},$$

cuyo resultado es que la velocidad de propagación de estos campos es *c/2*.

Así, en la aproximación de campos gravitatorios débiles se ha perdido la covarianza del sistema de ecuaciones (13). Es decir, a partir del sistema de ecuaciones del campo gravitatorio no es posible deducir un sistema lineal de ecuaciones análogas a las de Maxwell. Para ello es necesario redefinir el potencial vectorial gravitatorio como:

$$A_\alpha = -\frac{G}{c}\int J_\alpha \frac{dV}{R}.$$

Con esto se obtiene el sistema de ecuaciones lineales y covariantes

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot \vec{g} = 4\pi G\sigma, \\ &\nabla \cdot \vec{h} = 0, \\ &\nabla \times \vec{g} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{h}}{\partial t}, \\ &\nabla \times \vec{h} = \frac{4\pi G}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}, \end{aligned} \tag{14}$$

de donde las correspondientes ecuaciones de onda, muestran c como su velocidad de propagación.

4. Conclusiones

A partir de cierta analogía entre el campo electromagnético y el gravitatorio débil, se obtiene un sistema de ecuaciones lineales para el campo gravitatorio análogo al sistema de ecuaciones de Maxwell, pero no resulta covariante.

Una redefinición apropiada del potencial vectorial gravitatorio, permite hacer una presentación del campo gravitatorio con una metodología similar a la dedicada al estudio del campo electromagnético. Esta formulación lineal del campo gravitatorio queda por evaluar si efectivamente lo describe con la misma rigurosidad como el sistema de ecuaciones de Maxwell al campo electromagnético.

En la teoría de la gravitación, el campo de Coriolis aparece como una forma de manifestarse el campo gravitatorio, debido al movimiento relativo, algo completamente análogo en el caso del campo electromagnético.

La existencia del término $\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}$ que por analogía con el campo electromagnético lo podemos considerar como una corriente de desplazamiento, permite concebir la propagación del campo gravitatorio como una onda transversal caracterizado por las magnitudes $\vec{h}$ y $\vec{g}$.

Referencias

[1].Landau y Lifshitz. *Teoría Clásica de campos*, curso de Física teórica Vol.2, Edit. Reverté, S.A, 1986.

[2].Mister, C., Thorne,K. And Wheeler,J.A., *Gravitation*, W.H. Freeman and Company, New Cork, 1973.

[3].Hawking, S.W.and Ellis, G.F.R., *The large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, London, 1973

[4].Dale M. Grimes and Craig A. Grimes, *J.Nanosci.Nanotech.* 2002,Vol.2,No.5