Revista de Investigación de Física **17**, 141701751 (2014)

Dinámica de los operadores de un campo escalar complejo bidimensional en la representación de Heisenberg

Fulgencio Villegas Silva*

Facultad de Ciencias Físicas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, A.P. 14-0149, Lima, Perú

Recibido 20 junio 2014 – Aceptado 08 julio 2014

Mostramos las ecuaciones de movimiento del operador de campo y momentum canónico que describen el campo escalar complejo bidimensional, usándose para su representación el formalismo de Heisenberg. Este análisis está basado en el lagrangiano del campo escalar complejo bidimensional invariante sobre la simetría global SU(2) donde la matriz de transformación se expande en función de las matrices de Pauli y se parametriza en función de los ángulos de Euler.
Palabras claves: Campo de Klein-Gordon, bosones, campo cuántico.

Dynamic of the complex two-dimensional scalar field operators in the Heisenberg representation

We show the motion equations of the field operator and canonical momentum that describe the complex two-dimensional scalar field, using for it's representation the Heisenberg formalism. This analysis is based on the complex two-dimensional scalar field Lagrangian which is invariant under the SU(2) global symmetry where the transformation matrix is expanded in function of the Pauli matrices and is parameterized as a function by the Euler angles.
Keywords: Klein-Gordon field, bosons, quantum field.

La teoría cuántica de campos es una de las teorías más fundamentales de la física, pues proporciona una metodología para estudiar los estados de energía de un sistema de partículas y permite explicar e interpretar los autovalores de energía negativa, así como resolver el problema de la causalidad relacionando la mecánica cuántica con la relatividad especial [1].

En este contexto, el campo escalar complejo cumple una función importante, al igual que el campo escalar real. Gracias al campo escalar complejo podemos describir las partículas como los piones cargados y los electrones. También nos permite desarrollar una estructura para un campo asociado a mesones complejos [2]. En la actualidad, se usan campos escalares complejos para describir modelos de expansión cosmológica, y en el ámbito de la física de partículas es fundamental su contribución al estudio del campo de klein-Gordon; existen propuestas teóricas para extender el doblete del modelo estandard con un triplete o con un singlete escalar complejo en el campo de Higgs, proponiéndose así a una familia de bosones de Higgs [3]. Es un hecho que el estudio del campo escalar complejo tiene consecuencias de mucho interés para la física.

En este trabajo calculamos, para el campo escalar complejo de dos dimensiones, las ecuaciones dinámicas de sus operadores.

El campo escalar complejo

Todo campo complejo está descrito por dos espacios biunívocos independientes, el propio campo complejo ϕ y su complejo conjugado ϕ^* [4]. Un campo escalar complejo corresponde a un campo cargado, es decir, representa a las partículas con carga q y a las antipartículas con carga $-q$.

Se introduce un modelo de campo escalar complejo invariante para el grupo $U(1)$ representado por la función densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - V(\phi) \ , \qquad (1)$$

$$V(\phi) = m^2 \phi\phi^* + \lambda(\phi\phi^*)^2 \qquad (2)$$

donde m es la masa de la partícula cargada y λ es un parámetro positivo.

La signatura de la métrica que usamos es $(-+++)$ y consideramos el sistema de unidades $\hbar = c = 1$. Consideramos para el campo y su complejo conjugado un modelo

*fvillegass@unmsm.edu.pe

de la forma

$$\phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \phi^* = \frac{\phi_1 - i\phi_2}{\sqrt{2}} \ , \tag{3}$$

de tal manera que satisfagan la ecuación de Klein-Gordon.

Esta densidad lagrangiana, Ec.(1), es simétrica sobre la transformación U(1) global

$$\phi \longrightarrow \phi e^{i\alpha} \tag{4}$$
$$\phi^* \longrightarrow \phi^* e^{-i\alpha} \ . \tag{5}$$

Como α es una constante, entonces, el campo y su derivada se transforman de la misma manera, es decir, existe covariancia. Por lo tanto, para las transformaciones infinitesimales tenemos que

$$\delta\phi = i\alpha\phi \tag{6}$$
$$\delta\phi^* = -i\alpha\phi^* \tag{7}$$

y para el caso de las derivadas

$$\delta(\partial_\mu\phi) = i\alpha(\partial_\mu\phi) \tag{8}$$
$$\delta(\partial_\mu\phi^*) = -i\alpha(\partial_\mu\phi^*) \ . \tag{9}$$

La correspondiente corriente de Noether esta definida por [5]

$$\begin{aligned} J_\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)}\frac{\delta\phi}{\delta\alpha} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*)}\frac{\delta\phi^*}{\delta\alpha} \\ J_\mu &= \partial_\mu\phi^* i\phi - \partial_\mu\phi i\phi^* \\ J_\mu &= i[\partial_\mu\phi^*\phi - \phi^*\partial_\mu\phi] \\ J_\mu &= 2\mathrm{Im}[\phi^*\partial_\mu\phi] \ . \end{aligned} \tag{10}$$

La cuantización del campo escalar complejo puede realizarse usando las reglas de la cuantización canónica, para ello usamos la relación (3) donde ϕ_1 y ϕ_2 son los campos escalares reales, en términos de estos campos escalares reales la densidad lagrangiana se escribe como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_a)^2 - \frac{1}{2}m^2(\phi_a)^2 - \frac{1}{4}\lambda(\phi_a\phi_a)^2 \tag{11}$$
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_a)^2 - \frac{1}{2}\Omega^2_{(\phi)}(\phi_a)^2 \tag{12}$$

donde $\Omega_{(\phi)} = m^2 + \frac{1}{2}\lambda(\phi_a)^2$.

Sea Π_a la variable canónica conjugada de ϕ_a, entonces se cumple que [6]

$$\Pi_a = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}_a} = \dot{\phi}_a \ . \tag{13}$$

Por definición de la densidad hamiltoniana tenemos que

$$\mathcal{H} = \Pi_a\dot{\phi}_a - \mathcal{L} \tag{14}$$
$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\Pi_a)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi_a)^2 + \frac{1}{2}\Omega^2_{(\phi)}(\phi_a)^2 \tag{15}$$

Esta densidad hamiltoniana también se reescribe en forma explícita como una función de ϕ_1 y ϕ_2 considerando, previamente, las siguientes relaciones

$$\partial^\mu\phi^*\partial_\mu\phi = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi_1\partial_\mu\phi_1 + \frac{1}{2}\partial^\mu\phi_2\partial_\mu\phi_2 \ , \tag{16}$$
$$\phi^*\phi = \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) \ , \tag{17}$$

entonces la densidad hamiltoniana, Ec.(15), toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \frac{1}{2}[\Pi_1^2 + \Pi_2^2 + (\partial_i\phi_1)^2 + (\partial_i\phi_2)^2 + m^2\phi_1^2 + m^2\phi_2^2] \\ + \frac{1}{4}\lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 \ . \end{aligned} \tag{18}$$

Las variables canónicas ϕ_a y los conjugados canónicos cumplen las tres relaciones de conmutación

$$[\phi_a(\vec{x},t), \Pi_b(\vec{y},t)] = i\delta_{ab}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \ , \tag{19}$$
$$[\phi_a(\vec{x},t), \phi_b(\vec{y},t)] = 0 \ , \tag{20}$$
$$[\Pi_a(\vec{x},t), \Pi_b(\vec{y},t)] = 0 \ . \tag{21}$$

El campo escalar complejo con dos componentes

Consideramos dos campos escalares complejos ϕ_1 y ϕ_2 cuyas densidades lagrangianas están dadas por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi_1\partial_\mu\phi_1^* - \frac{m^2}{2}\phi_1\phi_1^*) \ ,$$
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi_2\partial_\mu\phi_2^* - \frac{m^2}{2}\phi_2\phi_2^*) \ ,$$

las cuales las expresamos en forma compacta como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi_{a_{(x)}})(\partial_\mu\phi_{a_{(x)}})^* - \frac{m^2}{2}\phi_{a_{(x)}}\phi^*_{a_{(x)}} \tag{22}$$

con $a = 1, 2$. Esta densidad lagrangiana es invariante sobre la simetría clásica global SU(2), por lo tanto, cumple la relación de transformación

$$\phi_{a_{(x)}} \longrightarrow \phi'_{a_{(x)}} = A_{ab}\phi_{(x)} \tag{23}$$

donde A es una matriz unitaria 2×2. La matriz A la expandimos en función de las matrices de Pauli $(\sigma_j)_{ab}$ y la parametrizamos por medio de los ángulos de Euler: ϕ, θ, ψ que son representados por θ_j con $j = 1, 2, 3$, de la siguiente forma

$$\begin{aligned} A_{ab} &= [e^{i\theta_j\sigma_j}]_{ab} \\ A_{ab} &= [\cos(i\theta\cdot\sigma) + i\,\mathrm{sen}(i\theta\cdot\sigma)]_{ab} \\ &= [\mathbb{I}\cos\theta + i(\sigma\cdot\hat{n})\,\mathrm{sen}\,\theta]_{ab} \end{aligned} \tag{24}$$

con $\hat{n} = \frac{\vec{\theta}}{|\vec{\theta}|}$, obteniendo

$$A_{ab} = \cos(|\vec{\theta}|)\delta_{ab} + i\hat{n}\vec{\sigma}_{ab}\,\mathrm{sen}\,|\vec{\theta}| \ . \tag{25}$$

Los momentos canónicos se expresan como

$$\Pi_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial \phi_a}{\partial t})} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_a} = \frac{1}{2}\dot{\phi}_a^* \quad (26)$$

$$\Pi_a^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial \phi_a^*}{\partial t})} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_a^*} = \frac{1}{2}\dot{\phi}_a \quad (27)$$

y para calcular la densidad hamiltoniana usamos la relación (14), obteniéndose

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\dot{\phi}_a^*\dot{\phi}_a + \frac{1}{2}|\nabla\phi_a|^2 + \frac{m^2}{2}|\phi_a|^2 \ , \quad (28)$$

y promoviendo los campos a operadores obtenemos

$$\hat{H} = \int [\frac{1}{2}\hat{\Pi}_a^\dagger\hat{\Pi}_a + \frac{1}{2}\nabla\hat{\phi}_a^\dagger\nabla\hat{\phi}_a + \frac{m^2}{2}\hat{\phi}_a^\dagger\hat{\phi}_a]d^3x \ . \quad (29)$$

Para calcular el cuadrimomento o momentum generalizado usamos la definición dada por

$$P^\mu = \int_V T^{0\mu} d^3x \ , \quad (30)$$

donde $T^{0\mu}$ es la densidad de flujo de energía y momento, luego

$$P^\mu = \int_V \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_a^*}\partial^k\phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_a}\partial^k\phi_a^*\right) d^3x \ , \quad (31)$$

$$P^\mu = \frac{1}{2}\int_V (\Pi_a^*\partial^k\phi_a + \Pi_a\partial^k\phi_a^*)d^3x \ . \quad (32)$$

De la Ec. (24) desarrollamos una transformación infinitesimal para $\phi_a = A_{ab}\phi_b = (1 + i\theta_j(\sigma_j)_{ab})\phi_b$ del cual deducimos que $\delta\phi_a = i\theta_j(\sigma_j)_{ab}\phi_b$ y $\delta\phi_a^\dagger = -i\theta_k(\sigma_k)_{ab}\phi_b^\dagger$ y reemplazando éstos en la variación de la densidad lagrangiana observamos que la corriente está dado por

$$J_\mu^k = i(\partial_\mu\phi_a^*\sigma_{ab}^k\phi_b - \partial_\mu\phi_b\sigma_{ab}^k\phi_b^\dagger) \ , \quad (33)$$

la carga generalizada se expresa por

$$Q^k = \int J_0^k d^3x = i\int (\Pi_a\sigma_{ab}^k\phi_b - \Pi_b^\dagger\sigma_{ab}^k\phi_a^\dagger)d^3x \ , \quad (34)$$

y promoviendo los campos a operadores se obtiene

$$\hat{Q}^k = i\int (\hat{\Pi}_a\sigma_{ab}^k\hat{\phi}_b - \hat{\Pi}_b^\dagger\sigma_{ab}^k\hat{\phi}_b^\dagger)d^3x \ . \quad (35)$$

La ecuación dinámica de los operadores

En la representación de Heisenberg la evolución temporal de un sistema se describe por operadores dependientes del tiempo y por la función de onda fija en el tiempo. Se considera el operador de acción como

$$\hat{S} = e^{-i\hat{H}t} \quad (36)$$

donde $\hat{H}$ es el hamiltoniano del sistema. Se introduciendo un operador dependiente del tiempo $f_{(t)}$ tal que

$$\hat{f}_{(t)} = \hat{S}^{-1}\hat{f}\hat{S} \ . \quad (37)$$

Derivando la expresión anterior con respecto al tiempo obtenemos [7]

$$\frac{d\hat{f}_{(t)}}{dt} = -i[\hat{f}_{(t)}, \hat{H}] \ , \quad (38)$$

considerando para nuestro caso $\hat{f}_{(t)} \to \hat{\phi}_{a(x)}$ obtenemos la ecuación dinámica para $\hat{\phi}_{a(x)}$ como

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\hat{\phi}_{a(x)} = -i[\hat{\phi}_{a(x)}, \hat{H}] \ , \\ &\frac{d}{dt}\hat{\phi}_{a(x)} = -i\int [\hat{\phi}_{a(x)}, \frac{1}{2}\hat{\Pi}_{b(y)}^\dagger\hat{\Pi}_{b(y)} + \\ &\qquad \frac{1}{2}\nabla\hat{\phi}_{b(y)}^\dagger\nabla\hat{\phi}_{b(y)} + \frac{m^2}{2}\hat{\phi}_{b(y)}^\dagger\hat{\phi}_{b(y)}]d^3y \ , \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\hat{\phi}_{a(x)} = -\frac{i}{2}\int [\hat{\phi}_{a(x)}, \hat{\Pi}_{b(y)}^\dagger\hat{\Pi}_{b(y)}]d^3y \ , \\ &\frac{d}{dt}\hat{\phi}_{a(x)} = \frac{1}{2}\Pi_{a(x)}^\dagger \ . \end{aligned} \quad (40)$$

La ecuación dinámica para el momentum canónico se determina mediante

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\hat{\Pi}_{a(x)} = -i\int \left[\hat{\Pi}_{a(x)}, \left(\frac{1}{2}\hat{\Pi}_{b(y)}^\dagger\hat{\Pi}_{b(y)}\right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + \frac{1}{2}\nabla\hat{\phi}_{b(y)}^\dagger\nabla\hat{\phi}_{b(y)} + \frac{m^2}{2}\hat{\phi}_{b(y)}^\dagger\hat{\phi}_{b(y)}\right)\right] d^3y \ , \\ &\frac{d}{dt}\hat{\Pi}_{a(x)} = -\frac{i}{2}\int \nabla_y\hat{\phi}_{b(y)}^\dagger \left[\hat{\Pi}_{a(x)}, \nabla_y\hat{\phi}_{b(y)}\right] + \\ &\qquad m^2\hat{\phi}_{b(y)}^\dagger \left[\hat{\Pi}_{a(x)}, \hat{\phi}_{b(y)}\right] \ , \\ &\frac{d}{dt}\hat{\Pi}_{a(x)} = \frac{1}{2}(\nabla^2 - m^2)\hat{\phi}_a^\dagger \ . \end{aligned} \quad (41)$$

Combinando las ecuaciones dinámicas (37) y (38) obtenemos como resultado la ecuación de Klein-Gordon

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\hat{\phi}_{a(x)}^\dagger = 0 \ . \quad (42)$$

Usando la transformada de Fourier determinamos el operador de campo y el momentum canónico como

$$\hat{\phi}_{a(x)} = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_{(k)}}} \left(\hat{a}_{a(k)}e^{i\omega t + ik\cdot x} + \hat{b}_{a(k)}^\dagger e^{-i\omega t - ik\cdot x}\right) \quad (43)$$

y

$$\hat{\Pi}_{a(x)} = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\omega_{(k)}}{2}} \left(\hat{a}_{a(k)}^\dagger e^{-i\omega t - ik\cdot x} - \hat{b}_{a(k)}e^{i\omega t + ik\cdot x}\right) \ , \quad (44)$$

respectivamente.

La frecuencia $\omega_{(k)} = \sqrt{k^2+m^2}$ se puede determinar usando la ecuación de Klein-Gordon [8]. Usando la ecuacion (35) calculamos la carga generalizada, la cual se expresa por

$$\hat{Q}^k = \frac{\sigma^k_{ab}}{2(2\pi)^3}\int\left(\left[\hat{a^\dagger}_a(k),\hat{a}_b(k)\right] - \left[\hat{b^\dagger}_a(k),\hat{b}_b(k)\right]\right)d^3x\ . \quad (45)$$

Conclusiones

En la representación de Heisenberg es posible calcular las ecuaciones dinámicas de los operadores de campo y momentum canónico para un campo escalar complejo bidimensional; la combinación de las ecuaciones dinámicas de estos operadores cumplen con la ecuación de klein-Gordon.

El campo escalar complejo se expande en términos de los modos de frecuencia positiva para las partículas y de frecuencia negativa para las antipartículas.

Referencias

[1] L. Ryder; *Quantum Field theory*, segunda edición, 127-129, Cambridge University Press (1996).

[2] F. Takehisa; *Symmetry and its Braking in Quantum Field Theory*, 192-193, Nova Science Publishers, New York (2007).

[3] A. Datta; *Physics of the Large Hadron Collider*, 48-54, Springer-Verlag, New York(2009).

[4] H. Goldstein; *Classical Mechanics*, tercera edición, 696-703, Addison-Wesley (2002).

[5] F. Mandl y G. Shaw, *Quantum Field Theory*, Wiley & Sons, New York (1984).

[6] F. Low; *Classical Field Theory*, 281-331, Wiley-VCH, Berlin (2004).

[7] M. Razavy; *Heisenberg's Quantum Mechanics*, 39-44, World Scientific, Singapore (2011).

[8] S. Weinberg; *The Quantum Theory of Fields*, 293-294, Cambridge University Press, Cambridge (1995).