Revista de Investigación de Física **16**, 131601751 (2013)

Corriente axial en el campo de Dirac

Fulgencio Villegas Silva*

Facultad de Ciencias Físicas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, A.P. 14-0149, Lima, Perú

Recibido 15 mayo 2013 – Aceptado 2 junio 2013

En este trabajo se analiza la corriente axial o corriente quiral en el campo de Dirac; para ello, se introduce el término quiral en las ecuaciones de Dirac, directa y conjugada con el fin de encontrar la corriente quiral en función de la masa de la partícula involucrada. Se determina que la condición para que la densidad de corriente axial se conserve es que la masa de la partícula involucrada sea nula o despreciable.
Palabras claves: Campo de Dirac, fermiones, campo cuántico..

Axial current in the Dirac field

This paper analyzes the current or current axial chiral Dirac field testing it introduces the term chiral Dirac equations directly and conjugated in order to find the chiral current as a function of particle mass involved. Determines that the condition that the axial current density is maintained is that the mass of the particle involved is nil or negligible.
Keywords: Dirac field, fermions, quantum field.

El campo de Dirac o campo fermiónico es el que describe partículas con espín 1/2, es decir, describe electrones, protones y quarks. El campo de Dirac está descrito por un campo espinorial formado por cuatro componentes llamados espinores o por dos componentes espinoriales de Weyl. La ecuación que describe el campo fermionico es la ecuación de Dirac, que es una ecuación relativista de la mecánica cuántica.

Dirac formuló su ecuación relativista para un campo fermiónico porque consideró, en principio, que daría cuenta de los fenómenos asociados al electrón , como lo manifiesta en su primer artículo [1] publicado en 1928. Su aplicación al átomo de hidrógeno dió lugar al descubrimiento de un desdoblamiento adicional de los niveles de energía que no eran descritos por las teoría de Schrödinger y la más sorprendente predicción fue la existencia de las antipartículas, como el positrón, la antipartícula del electrón.

En el año de 1929, Weyl [2] formuló una ecuación mucho más simple que la de Dirac para fermiones sin masa y posteriormente, en 1930, Pauli [3] plantea la existencia de los neutrinos basándose en la compensación de la aparente pérdida de energía en la desintegración beta.

En este trabajo analizamos la corriente axial para fermiones introduciendo la simetría quiral para obtener la conservación de dicha corriente.

*fvillegass@unmsm.edu.pe

La ecuación de Dirac

Paul Dirac, en 1928 [4], propone una ecuación relativística lineal en la energía, la cual para partículas libres de masa m está dada por [5]

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x)}{\partial t} = [\vec{\alpha}\cdot(-i\hbar\nabla) + \beta mc^2]\psi(x), \tag{1}$$

que tambien puede escribirse, en forma covariante, como:

$$i\hbar\gamma^\mu\frac{\partial\psi(x)}{\partial x^\mu} - mc\psi(x) = 0, \tag{2}$$

donde $\psi(x)$ es una función de onda espinorial con cuatro componentes $\psi_\alpha(x), \alpha = 1, ..., 4$ y γ^μ son las matrices de Dirac 2×2 tal que,

$$\begin{aligned} &\gamma^0 = \sigma_3, \quad \gamma^1 = i\sigma_1, \\ &\gamma^2 = \sigma_2, \quad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \end{aligned} \tag{3}$$

de tal modo que $\beta = \gamma^0$ y $\alpha^i = \beta\gamma^i$, con $i = 1, 2.$ siendo

$$\overrightarrow{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \overrightarrow{\sigma} \\ \overrightarrow{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \tag{4}$$

donde $\vec{\sigma}$ son las matrices de Pauli cuyas componentes se expresan como,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Cabe resaltar que las matrices de Dirac cumplen las relaciones de anticonmutacion y hermiticidad satisfaciendo el álgebra de Clifford, expresados como

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \qquad \gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0. \tag{6}$$

El espinor adjunto se define por [6] $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0$ el cual safisface la ecuación adjunta de Dirac expresado como

$$i\hbar\frac{\partial\bar{\psi}(x)}{\partial x^\mu}\gamma^\mu + mc\bar{\psi}(x) = 0. \tag{7}$$

El campo de Dirac

El campo de Dirac viene expresado por el lagrangiano

$$\mathcal{L} = c\bar{\psi}(x)[i\hbar\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc]\psi(x). \tag{8}$$

Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange sobre el lagrangiano anterior se obtiene la ecuación de Dirac expresada en la relación (2).

De la ecuación (8), para los campos ψ_α y $\bar{\psi}_\alpha$ se obtienen las densidades de momento canónico dadas, respectivamente, por

$$\Pi_\alpha(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}_\alpha} = i\hbar\psi_\alpha^\dagger \ , \quad \bar{\Pi}_\alpha(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\bar{\psi}}_\alpha} = 0. \tag{9}$$

El Hamiltoniano y momentum del campo de dirac están dado por

$$H = \int d^3x\bar{\psi}(x)[-i\hbar c\gamma^j\frac{\partial}{\partial x^j} + mc^2]\psi(x) \tag{10}$$

y

$$\vec{P} = -i\hbar\int d^3x\psi^\dagger(x)\nabla\psi(x), \tag{11}$$

respectivamente.

La ecuación de dirac (2) posee cuatro soluciones independientes, éstas pueden escribirse como [7],

$$u_r(\vec{p})\frac{e^{-i\vec{p}\vec{x}/\hbar}}{\sqrt{V}} \quad , \quad v_r(\vec{p})\frac{e^{i\vec{p}\vec{x}/\hbar}}{\sqrt{V}} \ , \quad r = 1, 2. \tag{12}$$

Expandiendo el campo de Dirac en términos de un conjunto completo de ondas planas y haciendo uso de las relaciones dadas en (12) obtenemos,

$$\psi(x) = \psi^+(x) + \psi^-(x) \quad ,$$

$$\psi(x) = \sum_{r,p}\left(\frac{mc^2}{VE_p}\right)^{1/2}[c_r(p)u_r(p)e^{-ipx/\hbar} + d_r^\dagger(p)v_r(p)e^{ipx/\hbar}], \tag{13}$$

y para el campo conjugado tenemos la expansión

$$\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^+(x) + \bar{\psi}^-(x) \quad ,$$

$$\bar{\psi}(x) = \sum_{r,p}\left(\frac{mc^2}{VE_p}\right)^{1/2}[d_r(p)\bar{v}_r(p)e^{-ipx/\hbar} + c_r^\dagger(p)\bar{u}_r(p)e^{ipx/\hbar}]. \tag{14}$$

Corriente axial en el campo de Dirac

La ecuación de Dirac para la densidad Lagrangiana dada por la ecuación (8) pueden se reescrita en las formas covariantes (2) y (7), las mismas pueden ser expresadas en notación covariante simplificada por las siguientes expresiones,

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc\psi = 0 \ , \tag{15}$$

$$i\hbar(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu + mc\bar{\psi} = 0 \ . \tag{16}$$

Introducimos el factor quiral γ^5 en las ecuaciones de Dirac (15) y (16), teniendo presente la propiedad $(\gamma^5)^2 = \mathbb{I}$, obtenemos las expresiones siguientes,

$$i\hbar\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\psi + mc = 0 \ , \tag{17}$$

$$i\hbar(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\gamma_5 + mc = 0 \ , \tag{18}$$

a partir de las ecuaciones (17) y (18) vamos a calcular la densidad de corriente axial, para ello multiplicamos la ecuacion (17) por el término $\bar{\psi}$ y a la ecuacion (18) multiplicamos por el término ψ, luego sumando estas expresiones obtenemos

$$i\hbar(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\gamma_5\psi + mc\bar{\psi}\gamma_5\psi + i\hbar\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\psi + mc\bar{\psi}\gamma_5\psi = 0 \ ,$$

agrupando términos adecuadamente

$$i\hbar[(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\gamma_5\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\psi] + mc(\bar{\psi}\gamma_5\psi + \bar{\psi}\gamma_5\psi) = 0,$$

$$i\hbar\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi) + 2mc\bar{\psi}\gamma_5\psi = 0,$$

finalmente obtenemos que

$$\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi) = \frac{2imc}{\hbar}\bar{\psi}\gamma_5\psi \ . \tag{19}$$

La cuadricorriente J^μ para el campo de Dirac es directamente proporcional al término $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, notamos que el primer factor de la ecuación (19) presenta este término, por lo cual consideramos que este término es la densidad de corriente del campo de Dirac bajo el efecto quiral.

Definimos como densidad de corriente bajo la transformación quiral o densidad de corriente axial del campo de Dirac a la expresión dada por

$$J_A^\alpha = \bar{\psi})\gamma^\mu\gamma_5\psi \ . \tag{20}$$

Al representar la ecuación (20) a la densidad de corriente axial, ésta debe cumplir con la ecuación de continuidad, por tanto,

$$\partial_\alpha J^\alpha_A = \frac{2imc}{\hbar}\bar{\psi}\gamma_5\psi \ . \qquad (21)$$

Notamos de la ecuación (21) que la densidad de corriente axial se conserva, es decir, $\partial_\alpha J^\alpha_A = 0$, si la masa de la partícula involucrada es nula o en todo caso se cumple para las partículas cuyas masas tienden a ser nulas.

Conclusiones

La conclusión mas importante de este trabajo radica en la imposición de la condición necesaria para que se cumpla la ecuación de continuidad para la densidad de corriente axial del campo de Dirac, esta condición exige que la masa de la partícula involucrada debe ser nula. Como hemos expresado anteriormente, la corriente axial es definida como una densidad de corriente bajo transformaciones quirales, es decir, bajo la acción del seudovector γ^5, esta teoría es factible de ser aplicada al estudio de los neutrinos, ya que para partículas sin masa o de masa despreciable la quiralidad toma un valor determinado.

Referencias

[1] P. A. M. Dirac,*The Quantum Theory of Electron*, Proc. Roy. Soc. Lond. A **117**, 610 (1928).

[2] H. Weyl, *Electron and gravitation*, Z. Phys. **56**, 330 (1929).

[3] W. Pauli, *Dear radioactive ladies and gentlemen*, Phys. Today **31**(9), 27 (1978).

[4] Jagdish Mehra y Helmut Rechenberg, *The historical development of quantum theory*, Springer-Verlag, New York (2001).

[5] F. Mandl y G. Shaw, *Quantum Field Theory*, Wiley, New York (1984).

[6] Armin Wachter,*Relativistic Quantum Mechanics*, Springer, Berlin (2011).

[7] M. E. Peskin y D. V. Schroeder, *Introduction to Quantum Field Theory*, Addison Wesley, Reading, Massachusetts (1995).