



Aplicación de los modelos estocásticos en el dimensionamiento de las presas

Saúl Horque Ferro*^{1,2}

¹*Facultad de Ciencias Físicas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú*

²*Wharton Ingenieros SAC, Plaza Ricardo Palma 175-207, Lima, Perú*

Recibido 26 noviembre 2011 - Aceptado 30 diciembre 2011

Las técnicas de generación de muestras sintéticas proporcionada por la hidrología estocástica han demostrado ser una poderosa herramienta para la aplicación avanzada de procesos estocásticos en hidrología y en el tratamiento de los problemas relacionados con el dimensionamiento de las presas de almacenamiento, principalmente en las zonas con escasa información hidrológica; así como con la planificación y la operación de sistemas de aprovechamiento del recurso agua. En efecto, la hidrología estocástica genera sintéticamente series hidrológicas basado en el análisis de la estructura de los registros cortos, que permite contar con un amplio panorama de las posibilidades de ocurrencia de la disponibilidad hidráulica en el futuro, que a su vez posibilita con un grado de confiabilidad superior a los métodos tradicionales, determinar las dimensiones principales de la presa.

En este trabajo se presenta una metodología que permite mostrar la generación sintética de datos tomando como base las muestras históricas existentes y con ellas efectuar la simulación del vaso para determinar los niveles de operación apropiados y a la vez la altura óptima de la presa considerando la demanda requerida y la disponibilidad hidráulica.

Palabras claves: Hidrología estocástica, generación de muestras sintéticas, series de tiempo.

Applications of stochastic models in the storage dams sizing

The techniques for generating synthetic samples provided by stochastic hydrology have proved to be a powerful tool for advanced application of stochastic processes in hydrology and treatment of problems related to the size of the storage dams, mainly in areas with limited information hydrological as well as the planning and operation of water resource utilization. Indeed, stochastic hydrology allows the generation synthetic hydrologic series based on the analysis of the structure of short records, thus providing a panorama of possibilities of occurrence with hydro availability in the future, which allows a degree reliability than traditional methods, determining the main dimensions of the dam.

This paper presents a methodology to show the synthetic data generation based on existing historical samples and with them running a simulation of the vessel to determine appropriate levels of operation while the optimum height of the dam considering the required demand and the availability of hydropower.

Keywords: Stochastic Hydrology, generation of synthetic samples, time series.

La problemática actual por la atraviesa la humanidad, en relación al agua, es su escasez como recurso aprovechable, debido a la creciente falta para satisfacer sus necesidades básicas, de desarrollo y por pérdida de calidad por contaminación, principalmente; problemática que se agudizará cada vez más. Estimaciones recientes sugieren que el cambio paulatino del ecosistema mundial y regional reflejado en el cambio climático será responsable de alrededor del 20% del incremento de la escasez global y sus consiguientes consecuen-

cias [1], señalándose dentro de las principales amenazas al abastecimiento del recurso agua, las dificultades en la planificación de los recursos hidráulicos y las limitadas capacidades técnicas para la formulación y el desarrollo adecuado de las obras hidráulicas.

En el contexto de la actual problemática mundial en torno al agua, existe la creciente necesidad de difundir los conocimientos y las técnicas que permitan lograr los proyectos de aprovechamientos hidráulicos seguros, eficientes y económicos. Por ello, la escasez del agua co-

*shorque@hotmail.com

mo recurso aprovechable, la poca o nula disponibilidad de la información hidrometeorológica y las características inherentes de los proyectos de aprovechamientos hidráulicos como, de larga maduración, alto costo inicial y fundamentalmente de ser de naturaleza irreversible, plantean optimizar los procesos de diseño hidráulico en todas las etapas iniciales de su desarrollo.

En la solución de los problemas de aprovechamientos hidráulicos las herramientas utilizadas son los modelos matemáticos y los hidráulicos, modelos físicos, los primeros consisten en desarrollos teóricos y analíticos, y los segundos a través de resultados experimentales. En los problemas hidrológicos las soluciones se obtienen mediante modelos matemáticos de simulación hidrológica. Uno de los problemas a resolver en el diseño de las presas es la determinación del volumen de almacenamiento para que el embalse sea capaz de suministrar la demanda con un nivel de confiabilidad aceptable, haciendo que las dimensiones sean las óptimas.

En la estimación del volumen útil se han utilizado y se siguen utilizando -en primer lugar-, los métodos tradicionales, entre estos, el Diagrama de Rippl y el Algoritmo de Pico Secuente; en segundo lugar, se introduce la simulación del funcionamiento del vaso para un período largo, tomando en cuenta las variaciones mensuales, anuales y de todos los factores que intervienen en el agua almacenada en un determinado instante. Autores, como Yevjevich [2] cita además de lo anteriormente señalado, que consideramos el tercer lugar, el método experimental o generación de información sintética. Este método, consiste en la aplicación avanzada de procesos estocásticos para resolver el problema de embalses, por medio de series de caudales generadas estocásticamente que se combinan con variables relacionadas con las capacidades de un embalse.

La principal ventaja de este último método es que al obtener una amplia gama de capacidad de almacenamiento, permite una mayor flexibilidad en la toma de decisiones y se puede optimizar dicha capacidad mediante la evaluación económica que maximice los beneficios del proyecto estudiado a través del análisis llamado **capacidad óptima del embalse**.

1. Modelación estocástica en series de tiempo

1.1. Características de los modelos estocásticos

El modelamiento de series de tiempo son técnicas y procedimientos para estimar los modelos y sus parámetros a partir de los datos disponibles, son elaborados para reproducir o asemejar las características estadísticas más importantes de las series históricas. Como

componentes de las series hidrológicas, podemos mencionar:

Tendencia. Componente determinística y transitoria de la serie, que definen una tendencia (ascendente o descendente).

Componente cíclica. Significa que las características estadísticas cambian anual o periódicamente.

Persistencia o componente autorregresiva. Es función de los parámetros estadísticos de la muestra. *Se dice que los fenómenos hidrológicos tienen memoria.*

Componente aleatoria o componente estocástica. Es función de los factores imprevisibles.

Estas componentes pueden ser reflejadas mediante las relaciones matemáticas de distintas formas. Por ejemplo,

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + \varepsilon_t$$

1.2. Proceso de modelamiento estocástico

Una aproximación sistemática del proceso de modelamiento estocástico de series hidrológicas en el tiempo es presentada por Salas [3] *et al.*, que consiste en los procedimientos que continuación se detallan brevemente.

1.2.1. Identificación de la composición del modelo

Esta fase consiste en decidir si el modelo será univariado, multivariado (anual o periódica) y modelos de desagregación o una combinación de estos.

1.2.2. Selección del tipo de modelo

Una vez identificada la composición, se puede seleccionar el tipo de modelo a usarse. Las distintas alternativas de modelos por las que se puede optar se encuentran detalladas por Salas *et al.* [3], entre estos: Modelos Autorregresivos AR(p), Autorregresivos con Promedios Móviles ARMA(p, q) y PARMA(p, q), Autorregresivos con Promedios Móviles Integrados ARIMA(p, q, r), Autorregresivo Multivariado de Desagregación (espacial y temporal: MARMA(p, q), MPARMA(p, q), Modelos mixtos SARIMA, etc.

1.2.3. Identificación de la forma del modelo

Determinación del orden del modelo seleccionado (modelos de primer, segundo o tercer orden y pueden ser de parámetros constantes o periódicos) (q, p). Así, tenemos como ejemplo, los modelos de parámetros cons-

tantes:

$$\begin{aligned}
 \text{Modelo AR}(q) \quad Z_t &= \phi Z_{t-1} + \dots + \phi Z_{t-p} + \varepsilon_t \\
 \text{Modelo AR}(1) \quad Z_t &= \phi Z_{t-1} + \varepsilon_t \\
 \text{Modelo AR}(2) \quad Z_t &= \phi Z_{t-1} + \phi_1 Z_{t-2} + \varepsilon_t \\
 \text{Modelo ARMA}(p, q) \quad Z_t &= \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots \\
 &+ \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_p \varepsilon_{t-p} .
 \end{aligned} \tag{1}$$

De manera similar para los modelos autorregresivos con parámetros periódicos, se utiliza los modelos respectivos.

1.2.4. Estimación de los parámetros del modelo

Existen numerosas técnicas para determinar estos parámetros (la máxima verosimilitud y el de mínimos cuadrados).

1.2.5. Pruebas de bondad de ajuste del modelo

Se verifica si el modelo cumple con ciertos rangos de aplicación del modelo y reproduce las características estadísticas de interés. Dentro de éstas se considera la verificación de la independencia y normalidad de los residuos del modelo.

1.2.6. Evaluación de la incertidumbre

La incertidumbre del modelo puede ser evaluada comparando si existe diferencias en las estadísticas (la media, la varianza, el coeficiente de asimetría) generadas con otros modelos alternativos.

2. Generación sintética de muestras y simulación del vaso

Las series de las sucesivas etapas de cálculo, se denotan mediante la nomenclatura donde X_t es para la serie histórica, Y_t para la serie normalizada y Z_t para la serie estandarizada.

2.1. Cálculo de los principales estadísticos de la muestra

2.1.1. Serie de tiempo anuales

Se calcula los principales estadísticos de la muestra como son la media de la serie, la varianza, el coeficiente de asimetría y la función de autocovarianza.

La función de autocovarianza mide el grado de la autodependencia lineal de la serie de tiempo. La autocovarianza C_k entre X_t y X_{t+k} puede determinarse para la

serie de tiempo histórica, $\{X_t\}$, donde $t = 1, 2, \dots, N$, mediante

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X}), \quad 0 \leq k < N, \tag{2}$$

donde C_k es la autocovarianza de retraso k , k es el tiempo de retraso o la distancia entre los pares X_t y X_{t+k} . Una medida adimensional de la dependencia lineal, obtenida mediante el coeficiente de autocorrelación de retraso k está dado por

$$r_k = \frac{C_k}{C_0} = \frac{\sum_{t=1}^{N-k} (X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^N (X_t - \bar{X})^2}, \tag{3}$$

donde r_k es el coeficiente de autocorrelación de retraso k , C_0 es el coeficiente de autocorrelación para $k = 0$ y la relación de r_k y k se denomina correlograma.

En las series de tiempo periódicas $\{X_{\nu, \tau}\}$, ν denota el año, τ el intervalo de tiempo dentro del año, w el número de intervalos en el año (meses). Se calculan la media de la serie periódica, la varianza, el coeficiente de asimetría y el coeficiente de autocorrelación que se define como

$$r_{\nu, \tau} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N (X_{\nu, \tau} - \bar{X})(X_{\nu, \tau-k} - \bar{X}_{\tau-k})}{S_{\tau} \cdot S_{\tau-k}}; \tag{4}$$

cuando $\tau - k < 1$, los términos de la ecuación (4) $1/N$, $\nu = 1$, $X_{\nu, \tau-k}$ y $\bar{X}_{\tau-k}$ son reemplazados por $1/(N-1)$, $\nu = 2$, $X_{\nu-1, w+\tau-k}$ y $X_{\nu-1, w+\tau-k}$, respectivamente.

2.2. Verificación de la normalidad

La muestra es normal para $g = 0$, coeficiente de asimetría; $k = 3$, coeficiente de curtosis. En caso contrario se emplean las técnicas de normalización Box-Cox y Box-Cox de doble potencia.

2.3. Verificación de independencia

Cuando el proceso estocástico se analiza en el dominio del tiempo, la verificación de la normalidad se realiza a través del correlograma. Según Anderson [5], los valores calculados deben estar fluctuando alrededor de cero entre ciertos límites de confianza,

$$r_k(95\%) = \frac{-1 \pm 1.645\sqrt{N-k-1}}{N-k}, \tag{5}$$

$$r_k(99\%) = \frac{-1 \pm 2.326\sqrt{N-k-1}}{N-k}. \tag{6}$$

2.3.1. Criterios de la decisión

Si el 90 % o más de los valores calculados en el correlograma caen dentro de los límites de confianza significa que la serie es independiente, esto es, define también la independencia de εt .

Si menos del 90 % de los valores calculados en el correlograma caen dentro de los límites de confianza la serie es dependiente, entonces se concluye que el modelo markoviano de primer orden no es adecuado para esta serie. Luego se prosigue usando los modelos de Markov de orden superior.

2.4. Estandarización de la muestra

Se utilizan las relaciones conocidas para las series periódicas y no periódicas, entre las cuales tenemos a la serie de variable normal estandarizada apropiado para las series mensuales, la serie de variable estandarizada por diferencia apropiado para modelos AR y la serie de variable modulada estandarizada para series anuales.

2.5. Cálculo de los parámetros del modelo

2.5.1. Propiedades de los modelos autorregresivos AR con parámetros constantes

i) Los parámetros μ , σ^2 y σ_ε^2 son estimados a través de los datos históricos mediante la relación

$$\sigma_\varepsilon^2 = \sigma^2 \left(1 - \sum_{j=1}^p \phi_j \rho_j\right), \quad (7)$$

donde ϕ_j es el coeficiente de autocorrelación, ρ_j es el coeficiente de correlación de las variables Y_t para un retraso j . Debemos considerar que $\phi_j = r_j$.

Para un modelo AR(1) y AR(2) la ecuación (7) queda simplificada en

$$\sigma_\varepsilon^2 = \sigma^2 (1 - \phi^2) \quad \text{y en} \quad (8)$$

$$\sigma_\varepsilon^2 = \sigma^2 \frac{1 + \phi_2}{1 - \phi_2} [(1 - \phi_2)^2 - \phi_1^2], \quad (9)$$

respectivamente. Finalmente, los parámetros σ_ε^2 para las series insesgadas se estiman usando la relación anterior multiplicada por el factor $N/(N-p)$.

ii) La determinación de los parámetros de autocorrelación. Se realiza a través de la función de autocorrelación serial. Para estimar los parámetros de los modelos AR(p), tenemos la ecuación de Yule-Walker [6] dado por

$$\rho_k = \sum_{j=1}^p \phi_j \rho_{k-j}, \quad (10)$$

aquí es importante conocer la forma de $\rho_k(r_k)$ para obtener los parámetros del modelo AR(p), de modo que se define

$$r_k = \phi_1 r_{k-1} + \phi_2 r_{k-2} + \dots + \phi_p r_{k-p}, \quad k > 0. \quad (11)$$

De esta relación se obtienen para AR (1) los siguientes parámetros $r_k = \phi_1$ para $k > 0$, $r_0 = 1$ y $r_{-1} = r_1$. Las soluciones para AR(2) se encuentran explicitadas en [3].

iii) Condiciones que deben cumplir los parámetros Estacionariedad

De acuerdo a Yevjevich [2], para que un modelo autorregresivo AR(p) de parámetros constantes sea estacionario, se requiere que el conjunto de parámetros $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ esté dentro del círculo unitario y debe satisfacer la raíz de la ecuación característica dado por

$$u^p - \phi_1 u^{p-1} - \phi_2 u^{p-2} - \dots - \phi_p = 0, \quad (12)$$

donde $|u_i| < 1$ para $i = 1, 2, \dots, p$, siendo u_i la raíz de la solución de la ecuación (12).

2.5.2. Propiedades de los modelos AR con parámetros periódicos

i) Valor esperado y varianza de los modelos periódicos AR(p)

$$E(Y_{\nu,\tau}) = \mu_\tau \quad \tau = 1, 2, \dots, w.$$

$$E(Z_{\nu,\tau}) = E(\xi_{\nu,\tau}) = 0 \quad \tau = 1, 2, \dots, w.$$

$$\text{Var}(Y_{\nu,\tau}) = \sigma_\tau^2 \quad \tau = 1, 2, \dots, w.$$

$$\text{Var}(Z_{\nu,\tau}) = \text{Var}(\xi_{\nu,\tau}) = 1 \quad \tau = 1, 2, \dots, w.$$

ii) Determinación de la varianza de los residuales

$$\sigma_{\varepsilon\tau}^2 = 1 - \sum_{j=1}^p \phi_{j,\tau} \rho_{j,\tau} \quad \tau = 1, 2, \dots, w. \quad (13)$$

En particular, para el modelo AR(1) y AR(2) la ecuación (13) se simplifica como

$$\sigma_{\varepsilon\tau}^2 = 1 - \phi_{1,\tau}^2 \quad \text{y} \quad (14)$$

$$\sigma_{\varepsilon\tau}^2 = 1 - \phi_{1,\tau}^2 - \phi_{2,\tau}^2, \quad (15)$$

respectivamente.

2.5.3. Cálculo de los residuales

Verificación de la normalidad e independencia

i) De la estructura de los modelos AR, se calcula el valor de los residuales mediante la relación

$$\varepsilon_t = Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} - \dots - \phi_p Z_{t-p} \quad (16)$$

ii) Determinación de la varianza de los residuales.

iii) Verificación de la independencia de los residuales. Se puede verificar mediante el correlograma y los límites de Anderson descritos. También se efectúa la prueba de Porte Manteau, que sirve para verificar en forma global la independencia de la muestra.

2.5.4. Criterio de la selección de los modelos

Criterio de información de Akaike (AIC). Considera el Principio de Parsimonia en la construcción de modelos, fue sugerido inicialmente para seleccionar el modelo correcto entre los ARMA en competencia [3].

$$AIC(p, q) = N \ln[\sigma_\varepsilon^2] + 2(p + q) \quad (17)$$

donde N es el tamaño de la muestra y σ_ε^2 es la varianza de los residuales.

Bajo este criterio el modelo seleccionado será el que tenga un AIC menor

2.6. Generación de las muestras sintéticas

La generación de números aleatorios con distribución normal estándar. Se reduce al cálculo del componente estocástico $\varepsilon = \xi\sigma_\varepsilon$ (ruido aleatorio).

Debe ser independiente y uniformemente distribuido en el intervalo (0,1).

La generación de números aleatorios puede hacerse en parejas con la ecuación de Box-Muller [7],

$$\xi_i = \sqrt{2 \ln \left[\frac{1}{u_1} \right]} \cos[2\pi u_2] \quad (18)$$

$$\xi_{i+1} = \sqrt{2 \ln \left[\frac{1}{u_1} \right]} \sin[2\pi u_2] \quad (19)$$

donde ξ_i, ξ_{i+1} son los números aleatorios de normal estándar, con media cero, mientras que u_1, u_2 son los números aleatorios con distribución uniforme entre (0,1).

2.7. Proceso de desestandarización y desnormalización de los valores calculados

Es el proceso inverso a lo cálculos de normalización y estandarización para obtener la muestra generada.

2.8. Simulación del funcionamiento del vaso

2.8.1. Dimensionamiento de la presa

Se requiere conocer las características principales del sistema y asumir ciertas dimensiones como asumir la altura, elevación desde el fondo, y las demás obras que comprende el sistema hidráulico, la política general del uso del agua, los alcances globales del proyecto, la necesidad de uno o más embalses en un sistema de aprovechamiento, la base para un análisis económico financiero del proyecto.

2.8.2. Ecuación general de almacenamiento

i) Variables de Entrada.

- Entradas por cuenca propia (IPC): a) Registros históricos, b) Registros sintéticos (son utilizados en las etapas avanzadas de estudio o diseño).

- Entradas por transferencia desde otras cuencas (IT).

- Entradas por volumen de lluvia en el vaso (VLL).

ii) Variables de extracción (VDEM).

- Por políticas de operación: extracción constante y/o extracción variable.

- Por pérdidas: evaporación (VEVA), infiltración (VINF), derrames (DERR).

iii) Intervalos de tiempo.

iv) Expresiones matemáticas de almacenamiento.

La ecuación general de almacenamiento está dado por

$$V_{i+1} = V_i + X_i - S_i - P_i \quad , \quad V_m \leq V_{i+1} \leq V_u \quad , \quad (20)$$

donde $X_i = IPC + IT + VLL$, $S_i = VDEM$, $P_i = VEVA + VINF + DERR$ y $\Delta V = V_{i+1} - V_i$, y la ecuación general estocástica de almacenamiento se define como

$$V_{i+1} = V_i + (X_i - Y_i) \quad (21)$$

donde V_i, V_{i+1} son los volúmenes almacenados al inicio y al final del intervalo, X_i el el volumen total que ingresa al vaso durante el intervalo considerado y $Y_i = S_i + P_i$ es el volumen disminuído en el vaso. Cabe notar que tanto X_i como S_i son variables aleatorias.

2.9. Procedimiento de la simulación

Los cálculos para el método experimental se desarrollan en el orden que a continuación se detallan [4].

a) De la topografía del vaso se obtienen las relaciones elevación-área y elevación-volumen. Además se asume el NAMO y el NAMINO con los correspondientes volúmenes (V_u, V_m).

b) Se inicia el cálculo a partir de un nivel inicial h_i , volumen inicial V_i y un área de la superficie libre inicial A_i .

c) En una primera aproximación se calcula el volumen final del intervalo, con la relación

$$V_{i+1}^{(1)} = V_i + X_i - S_i - P_i \quad .$$

d) Con el volumen obtenido en el paso anterior se obtienen los valores correspondientes de h_{i+1} y A_{i+1} y se calculan los valores medios $\bar{h} = 0.5(h_i + h_{i+1})$, $\bar{A} = 0.5(A_i + A_{i+1})$.

e) Se obtiene una nueva aproximación del volumen correspondiente al final del intervalo, $V_{i+1}^{(2)} = V_i + X_i - S_i - P_i$.

f) Si el nuevo volumen calculado $V_{i+1}^{(2)}$, es semejante al anterior $V_{i+1}^{(1)}$, se continua con el siguiente paso, sino se repite el proceso a partir del punto d) hasta que $V_{i+1}^{(k+1)} \cong V_{i+1}^{(k)}$.

Cuando del resultado del cálculo se obtiene un volumen V_{i+1} mayor que V_u , se registra un volumen derramado igual a la diferencia y se considera que $V_{i+1} = V_u$. En cambio cuando V_{i+1} es menor que V_m , se calcula el volumen de déficit igual a la diferencia y se considera que $V_{i+1} = V_m$.

g) Para un nuevo intervalo de tiempo Δt , se calculan las condiciones a partir del paso c).

3. Aplicaciones

El prototipo elegido para la aplicación de los modelos estocásticos en el diseño de presas, es la laguna La Victoria que tiene un sistema de aprovechamiento de agua en operación con una capacidad útil de 1.4 millones de m^3 de agua y que forma parte del Sistema Hidráulico de afianzamiento de la Central Hidroeléctrica de Yaupi, localizada en la Región Central del Perú.

3.1. Las características físicas principales de la cuenca

Área de la cuenca (A), 4.479 km^2 ; perímetro de la cuenca (P), 10.10 km; pendiente medio de la cuenca (S), 0.124 (determinado con el método Taylor Schwarz); ancho medio de la cuenca (Bm), 1.061 km; tipo de corriente (aguas abajo de la laguna, es del tipo intermitente).

3.2. Información hidrológica

La zona de estudio cuenta con información hidrológica del tipo II, nula información de descargas y suficiente información de lluvia. Se consideró datos pluviométricos con una extensión de 40 años de registros.

3.3. Análisis hidrológico

i) Determinación de los coeficientes de escurrimiento periódicos (mensual), mediante la relación

$$C_{\nu,\tau} = \frac{V_{d\nu,\tau}}{V_{U\nu,\tau}} .$$

ii) Determinación de los volúmenes con base a los datos de precipitación,

$$V_{e\nu,\tau} = A \times C_{\nu,\tau} \times h_{U\nu,\tau} .$$

3.4. Generación de las muestras sintéticas

3.4.1. Proceso de la modelación

Para el proceso de modelación se utilizó un modelo autorregresivo de parámetros periódicos para obtener las series en el orden descrito en la sección anterior, comenzando por, **i)** el cálculo de los principales estadísticos de la muestra histórica en forma periódica; **ii)** la verificación de la independencia de la muestra histórica, mediante los correlogramas y los límites permisibles; **iii)** se realizó el proceso de normalización; **iv)** la estandarización se efectuó con el criterio de la variable normal estandarizada, por ser la más apropiada para las series mensuales; **v)** el cálculo de los parámetros del modelo se realizaron para el modelo PAR(1) obteniéndose además el correlograma desarrollado, donde $r_k = \phi_1$; **vi)** la desviación estándar de los residuales se obtuvo a partir de la ecuación (14); **vii)** el cálculo de los residuales se obtuvieron a partir de la ecuación 1, con el detalle

$$\varepsilon_{\nu,1} = Z_{\nu,1} - \phi_{1,1} Z_{\nu-1,12} \quad \text{para el mes de enero,}$$

$$\varepsilon_{\nu,1} = Z_{\nu,\tau} - \phi_{1,\tau} Z_{\nu,\tau-1} \quad \text{para los otros meses,}$$

la normalidad e independencia de los residuales fue verificado a través de los parámetros estadísticos; **viii)** se realizó la obtención de las muestras sintéticas; **ix)** para los parámetros de selección del modelo fue necesario calcular el coeficiente de parsimonia (PP20 215) y obtener el criterio de información de Akaike y finalmente, **x)** se realizaron los cálculos de desestandarización y desnormalización para obtener la muestra sintética. También el proceso inverso a la estandarización y a la normalización.

3.5. Simulación del funcionamiento del vaso

Para la simulación del funcionamiento el vaso se **i)** definió el NAMINO y el NAMO del sistema, y la capacidad útil del vaso; **ii)** se verificó si la disponibilidad hidráulica de la cuenca satisface la demanda de 1.4 Mm^3 de agua, como inicialmente fue considerado; y **iii)** se definió los elementos de la simulación tales como los componentes físicos del sistema de aprovechamiento, presa de gravedad.

Las relaciones de la operación como la cuota de aporte asignada a esta laguna para satisfacer 1.4 Mm^3 al año dentro del período de estiaje (mayo-octubre), con un caudal dentro de un rango de 0.50 m^3/s a 0.70 m^3/s . Las variables que se consideraron fueron las variables de estado como el volumen inicial y el final, el parámetro de diseño a través de la capacidad del embalse para diferentes alturas del muro y las variables de salida del modelo como los derrames y los déficits.

3.6. El proceso de la simulación

3.6.1. Determinación de las relaciones

Se determinaron las relaciones elevación-volumen y elevación-área, calculando en base al plano topográfico y batimétrico mediante

$$V = 141.41H^{1.1508}$$

$$A = 0.1449H^{0.23794}$$

donde V se expresa en volúmenes de miles de m^3 , H es la altura relativa en m, A es el área de la superficie del agua para cada nivel altimétrico en km^2 .

3.6.2. Exploración de las diferentes condiciones

Se establecen las condiciones iniciales tales como el nivel inicial, el nivel máximo de la operación, la extracción equivalente en m^3/s y el mes de extracción.

Los resultados de la simulación obtenidos son el derrame total, el derrame promedio mensual, el número meses con derrame en el período, el derrame promedio mensual en el período, el derrame máximo, el derrame mínimo, los déficits totales, los déficits promedios mensuales, el número de meses con déficits en el período, los déficits máximo mensual, los déficits mínimo mensual.

4. Discusión

El proceso de generación de muestras sintéticas se realizó utilizando un modelo autorregresivo de primer orden de parámetros periódicos PAR(1). Los resultados se resumen a continuación:

El anexo A muestra los volúmenes en miles de m^3 , resultado del análisis hidrológico, que consistió en desarrollar un modelo de descargas vs precipitación en base a la escasa información de descargas existentes (4 años), que permitió determinar el coeficiente de escurrimiento. Esta muestra constituye la base para la generación de muestras sintéticas.

En el anexo B, se presenta las estadísticas de la muestra histórica: la media, varianza, coeficiente de asimetría (g) y de curtosis (k), observándose que la muestra no es normal en ninguno de los meses. También en el mismo anexo, se observan los correlogramas mensuales, los cuales fluctúan dentro de los límites permisibles, determinándose que el 92% de la serie analizada cumple con los requisitos de independencia.

El anexo C, presenta la muestra normalizada utilizando el método de Box-Cox de primera potencia. Asimismo, los resultados del proceso de estandarización se han efectuado mediante la ecuación

$$Z_{\nu,\tau} = \frac{Y_{\nu,\tau} - \bar{Y}_\tau}{\sigma_\tau}$$

En el anexo D se observa los parámetros del modelo PAR(1), donde $r_k = \phi_1$ fue obtenida de los correlogramas desarrollados; la desviación estándar de los residuos fue obtenida a partir de la ecuación (14). Los valores obtenidos cumplen con las condiciones de estacionariedad del modelo.

El cálculo de los residuales, se efectuó usando la ecuación (1). Los valores del anexo E se consideran suficientes para ser considerados normal. Para la obtención de las muestras sintéticas, primero se generaron las muestras aleatorias con la distribución uniforme (0,1), luego se calcularon los números aleatorios con la normal estándar (ξ_1 y ξ_2), aplicando las ecuaciones de Box Müller y con ellos los residuales mediante la relación $\varepsilon = \xi\sigma_\varepsilon$. Basado en éstos valores se obtuvo el modelo autorregresivo de parámetros periódicos y en seguida los valores generados. Con los valores generados, se procedió con el proceso inverso de los cálculos de estandarización y normalización, para obtener la muestra sintética (anexo F).

Como se puede apreciar, los valores de la muestra histórica y los generados mediante el modelo aplicado son casi similares. Asimismo, en las estadísticas las diferencias no son significativas.

El anexo G, muestra una parte de los resultados de la simulación del funcionamiento del vaso, sintetizado en tablas. La simulación fue realizada para distintos escenarios de operación, considerando las posibilidades de mayor o menor extracción (dentro del rango prefijado), con intervalo de tiempo mensual y bimensual, con los niveles de operación máximos y mínimos (altura de operación de la presa), con las pérdidas esperadas de agua por derrames y por supuesto con menores déficits de agua. También se observa en el proceso de simulación la influencia del mes de inicio de las operaciones. Resultando la mejor opción para la simulación la que considera como los datos de entrada para la extracción $0.66 m^3/s$ ($1.71 \times 10^6 m^3$ de agua), Niv_{max} con 10.5 m, Niv_{min} con 2 m, V_u con $1.802 \times 10^6 m^3$ de agua y con un tiempo de extracción de un mes de 30 días.

5. Conclusiones

Las técnicas de generación de muestras sintéticas a través del modelamiento estocástico, son de fácil acceso y han demostrado ser una herramienta bastante útil para determinar las dimensiones de las represas.

6. Comentario final

Este trabajo fue presentado en el III Congreso Nacional del Agua realizado en marzo del 2011, en la UNMSM, Lima, Perú.

A. Volúmenes efectivos para la cuenca: $V_e = A \times C_e \times h_{ll}/10^3$ miles de m^3

Año	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
1956	233.40	456.45	522.65	257.29	181.55	19.10	16.43	1.32	82.16	58.19	36.52	55.32
1957	149.39	343.81	291.52	48.79	77.32	65.61	2.44	5.04	54.07	86.94	67.83	142.12
1958	171.23	446.11	390.61	140.31	144.72	32.14	13.59	2.39	24.09	127.49	96.16	86.39
1959	157.43	441.72	552.45	191.22	131.53	14.84	2.16	2.30	31.33	116.51	76.23	235.91
1960	138.39	296.27	132.34	261.34	155.87	15.69	11.02	6.29	47.47	97.82	131.32	94.10
1961	234.16	270.71	536.64	255.41	143.59	31.00	0.01	4.21	58.24	95.93	177.27	257.89
1962	247.71	405.92	432.75	131.66	220.92	8.79	5.97	13.86	29.68	53.83	61.41	187.52
1963	241.10	395.44	575.77	220.46	67.10	48.40	4.57	8.74	57.88	110.25	128.37	201.93
1964	180.29	450.79	443.17	355.17	318.90	4.34	4.78	16.77	79.32	161.33	224.53	116.33
1965	174.11	495.29	798.76	453.78	94.19	52.57	21.53	10.16	90.68	93.65	124.76	201.74
1966	259.89	436.75	331.16	113.19	381.70	2.36	0.48	0.99	44.23	184.39	133.76	231.88
1967	356.68	619.79	822.10	91.59	149.43	38.67	32.23	17.10	67.87	209.62	46.16	140.66
1968	210.04	552.94	764.84	212.35	263.06	99.27	18.62	32.14	54.43	263.71	95.49	180.18
1969	291.26	536.15	546.21	219.84	72.72	173.38	25.80	7.43	26.67	225.53	295.44	255.98
1970	334.42	488.52	327.31	345.16	496.44	202.12	55.88	13.49	150.57	190.30	272.63	161.10
1971	285.08	436.01	664.03	337.87	147.38	100.40	26.98	4.89	26.45	74.23	101.18	224.09
1972	308.90	307.26	601.66	181.95	201.48	86.03	4.13	0.00	0.00	111.17	70.91	158.89
1973	326.30	641.49	561.33	228.97	72.10	48.22	18.96	21.85	39.04	156.71	132.12	386.72
1974	215.84	395.23	292.20	305.29	13.30	165.45	23.30	9.53	39.16	69.90	90.31	223.82
1975	228.75	566.44	415.22	150.60	272.57	91.70	7.46	10.62	93.00	75.91	83.62	198.74
1976	340.47	352.93	370.38	122.32	44.49	47.74	9.98	7.51	55.73	44.28	58.53	125.39
1977	108.98	482.15	435.30	200.01	229.61	59.09	21.75	1.54	65.19	83.02	255.87	148.41
1978	183.03	345.45	341.75	154.01	158.53	56.72	11.95	5.48	67.80	64.20	133.79	93.95
1979	110.04	413.89	958.63	190.81	71.59	21.27	16.18	7.88	34.79	68.00	121.08	180.41
1980	208.22	416.02	478.46	161.85	138.07	47.27	28.76	5.82	50.88	118.92	107.03	101.99
1981	213.72	512.60	516.90	200.08	75.07	47.27	1.80	13.97	43.78	176.48	171.41	241.79
1982	217.95	469.87	370.82	218.07	24.55	56.72	16.36	7.51	50.88	131.57	283.97	190.70
1983	248.43	334.67	543.82	412.63	205.06	344.60	9.08	22.79	125.77	223.45	134.46	442.23
1984	344.07	612.15	777.92	434.09	251.60	113.92	19.41	11.15	75.96	224.24	271.93	410.04
1985	349.78	255.18	445.99	517.23	122.22	208.46	98.14	31.58	99.98	78.75	152.85	191.82
1986	274.24	883.30	1089.77	305.64	218.36	52.47	103.18	63.97	141.51	199.25	112.55	205.86
1987	376.66	616.23	387.46	481.11	93.58	35.93	3.68	5.56	30.54	107.00	95.00	93.57
1988	380.26	294.93	347.74	331.87	412.68	10.87	1.44	4.77	97.26	83.65	204.03	230.38
1989	307.67	680.86	1019.71	774.48	38.35	60.51	5.75	11.68	7.57	171.26	30.10	79.54
1990	143.05	166.41	242.65	53.15	1043.73	325.50	106.68	64.09	111.81	223.45	211.89	121.27
1991	137.12	395.96	624.56	284.51	143.70	110.14	20.40	3.34	36.32	65.31	154.19	13.10
1992	79.78	308.67	297.75	109.03	39.38	31.62	19.14	16.03	32.66	22.71	14.85	28.45
1993	229.26	602.63	330.91	267.54	167.33	43.02	26.89	21.23	189.09	85.02	246.88	340.01
1994	230.91	569.65	544.59	462.10	117.72	66.08	4.94	1.63	36.11	84.92	132.02	70.11
1995	107.88	563.71	778.18	108.69	60.45	195.40	9.60	1.32	37.20	132.96	177.84	198.34
Prom	233.40	456.51	522.65	257.29	181.55	85.87	20.79	12.45	62.18	126.30	137.91	181.22
σ	81.290	138.403	217.411	146.792	176.459	83.439	26.110	14.330	39.851	61.373	74.286	96.259
C_V	0.348	0.303	0.416	0.571	0.972	0.972	1.256	1.151	0.641	0.486	0.539	0.531

B. Estadísticos de la muestra histórica

	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
Med	233.4	456.51	522.65	257.29	181.55	85.87	20.79	12.45	62.18	126.3	137.91	181.22
S	81.29	138.4	217.41	146.79	176.46	83.44	26.11	14.33	39.85	61.37	74.29	96.26
g	0.0775	0.5681	0.847	1.3042	3.282	1.6618	2.4571	2.5397	1.2774	0.5008	0.5905	0.8238
K	2.33	4.2	3.56	5.7	17.19	5.52	8.75	10.12	4.9	2.36	2.75	4.11

C. Muestra normalizada

Año	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
1956	135.71	37.48	15.33	11.93	6.70	4.09	3.73	0.29	15.65	10.46	10.66	15.31
1957	91.34	32.44	12.68	6.54	5.37	6.72	0.98	1.90	12.37	12.76	15.48	27.33
1958	103.12	37.04	13.96	9.70	6.34	5.12	3.41	0.95	7.66	15.34	18.96	20.20
1959	95.70	36.86	15.60	10.79	6.19	3.64	0.83	0.90	8.99	14.70	16.57	36.98
1960	85.33	30.05	9.66	11.99	6.46	3.73	3.07	2.21	11.48	13.52	22.66	21.29
1961	136.10	28.69	15.46	11.90	6.32	5.04	-1.85	1.66	12.90	13.39	26.85	38.98
1962	143.05	35.31	14.43	9.48	7.02	2.76	2.14	3.43	8.70	10.05	14.59	32.26
1963	139.67	34.84	15.80	11.33	5.15	6.01	1.77	2.70	12.86	14.32	22.37	33.72
1964	107.94	37.24	14.54	13.25	7.64	1.72	1.83	3.76	15.34	17.14	30.63	24.22
1965	104.65	39.06	17.51	14.33	5.67	6.20	4.21	2.93	16.52	13.23	22.01	33.70
1966	149.26	36.65	13.22	8.99	7.95	0.94	-0.67	-0.01	11.02	18.25	22.90	36.60
1967	197.47	43.75	17.67	8.32	6.39	5.51	4.98	3.79	14.07	19.36	12.30	27.16
1968	123.60	41.30	17.28	11.18	7.32	7.77	3.95	4.96	12.42	21.51	18.89	31.51
1969	165.09	40.66	15.54	11.32	5.27	9.33	4.55	2.45	8.15	20.03	35.67	38.81
1970	186.54	38.79	13.17	13.13	8.42	9.80	6.13	3.39	21.75	18.52	34.12	29.47
1971	161.99	36.62	16.53	13.04	6.37	7.80	4.64	1.86	8.11	11.81	19.53	35.87
1972	173.90	30.62	16.03	10.61	6.87	7.40	1.64	-1.86	-1.38	14.37	15.88	29.22
1973	182.53	44.51	15.68	11.47	5.26	6.00	3.98	4.23	10.25	16.91	22.74	49.45
1974	126.62	34.83	12.69	12.62	2.93	9.19	4.36	2.83	10.26	11.46	18.29	35.84
1975	133.31	41.81	14.23	9.94	7.38	7.56	2.46	3.00	16.75	11.94	17.49	33.40
1976	189.52	32.87	13.72	9.24	4.56	5.98	2.91	2.47	12.58	9.09	14.18	25.34
1977	68.96	38.53	14.45	10.96	7.09	6.47	4.23	0.45	13.75	12.48	32.94	28.05
1978	109.40	32.51	13.36	10.02	6.48	6.38	3.20	2.02	14.06	10.99	22.90	21.26
1979	69.56	35.66	18.53	10.79	5.25	4.30	3.71	2.54	9.57	11.31	21.64	31.53
1980	122.65	35.75	14.90	10.19	6.26	5.96	4.76	2.10	11.95	14.84	20.17	22.36
1981	125.52	39.75	15.27	10.96	5.32	5.96	0.62	3.45	10.95	17.88	26.34	37.52
1982	127.72	38.03	13.72	11.28	3.73	6.38	3.72	2.47	11.95	15.57	34.89	32.59
1983	143.42	31.99	15.52	13.91	6.90	11.53	2.76	4.30	19.75	19.94	22.97	53.48
1984	191.29	43.48	17.37	14.13	7.24	8.14	4.03	3.08	14.98	19.97	34.07	51.18
1985	194.09	27.82	14.57	14.94	6.07	9.89	7.44	4.92	17.43	12.16	24.70	32.70
1986	156.53	52.27	19.27	12.62	7.01	6.19	7.57	6.40	21.04	18.91	20.76	34.11
1987	207.21	43.62	13.92	14.60	5.66	5.35	1.49	2.04	8.85	14.11	18.83	21.21
1988	208.95	29.98	13.44	12.96	8.09	3.10	0.38	1.83	17.17	12.52	29.04	36.46
1989	173.29	45.87	18.88	16.93	4.35	6.53	2.09	3.15	3.46	17.63	9.45	19.20
1990	87.88	22.26	11.92	6.76	9.80	11.33	7.65	6.41	18.53	19.94	29.66	24.84
1991	84.63	34.86	16.22	12.33	6.33	8.05	4.12	1.36	9.82	11.08	24.82	5.80
1992	52.16	30.69	12.77	8.87	4.38	10.22	4.00	3.68	9.22	6.33	5.94	9.96
1993	133.57	43.13	13.22	12.08	6.57	5.74	4.63	4.17	24.56	12.62	32.29	45.86
1994	134.42	41.93	15.53	14.42	6.01	6.74	1.88	0.51	9.78	18.27	22.73	17.75
1995	68.34	41.71	17.37	8.86	5.00	9.69	2.90	0.29	9.96	15.65	26.89	33.36
Med	134.80	37.03	15.02	11.47	6.23	6.51	3.26	2.57	12.58	14.76	22.35	30.40
σ	42.0680	5.7941	2.0184	2.2260	1.3153	2.4543	2.0544	1.6936	4.9010	3.5961	7.2904	10.2369
Asim	-0.0003	0.0000	0.0002	0.0000	0.0000	-0.0001	-0.0005	0.0004	0.0000	0.0001	-0.0009	0.0000
λ	0.8783	0.4811	0.2534	0.2477	0.0937	0.2112	0.1966	0.1946	0.4897	0.40862	0.5238	0.5648

D. Cálculo de parámetros

Tabla : Modelos autoregresivo PAR(1) de parámetros periódicos

	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
ϕ_1	0.517	0.264	0.599	0.34	-0.171	0.338	0.473	0.808	0.53	0.164	0.338	0.379
S_y	42.0680	5.7941	2.0184	2.2260	1.3153	2.4543	2.0544	1.6936	4.9010	3.5961	7.2904	10.2369
σ_ε	0.8560	0.9645	0.8007	0.9404	0.9853	0.9411	0.8811	0.5892	0.8480	0.9865	0.9411	0.9254
E*	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C

* Estacionariedad.

C : Cumple.

Los parámetros deben estar dentro del círculo unitario.

E. Cálculo de los residuales

	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
1956	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1957	-0.2711	-0.5204	-0.6877	-1.8197	-1.0335	0.3092	-1.1504	0.4978	0.1679	-0.5481	-0.7546	0.0577
1958	-0.5984	0.2009	-0.5303	-0.6146	-0.0529	-0.5932	0.3422	-1.0209	-0.4956	0.3272	-0.5189	-0.8204
1959	-0.4145	0.2155	0.3031	-0.3997	-0.0841	-1.1588	-0.6273	-0.0332	-0.2095	0.1036	-0.7865	0.9429
1960	-1.5082	-0.8944	1.9346	1.1364	0.2130	-1.1880	0.4422	-0.1401	-0.1111	-0.3092	0.1605	-0.9066
1961	0.4911	-1.4485	1.0770	0.1196	0.1063	-0.6205	-2.2042	1.4681	0.3522	-0.3922	0.7462	0.6041
1962	-0.2372	-0.3495	-0.1174	-0.7905	0.4533	-1.7316	0.1794	0.9451	-1.0602	-1.1793	-0.6209	0.5855
1963	0.0214	-0.4090	0.6138	-0.1954	-0.8265	0.0730	-0.6274	0.6564	0.0184	-0.1325	0.0454	0.3230
1964	-0.8062	0.2047	-0.2624	0.8834	1.2134	-2.3132	0.2293	1.2577	0.1939	0.5707	0.9129	-1.0347
1965	-0.4047	0.5397	1.0234	0.8681	-0.2069	0.0187	0.5261	-0.1675	0.6931	-0.5564	0.0978	0.3399
1966	0.1769	-0.1572	-0.8526	-0.8108	1.1223	-2.7104	-0.8409	0.0202	0.4898	1.0218	-0.2515	0.5771
1967	1.1764	0.7661	0.6167	-1.8590	-0.1199	-0.4465	1.0318	0.0391	-0.0774	1.2301	-1.8104	0.2062
1968	-0.1029	0.8071	0.6758	-0.5074	0.8057	0.2348	0.0958	1.1323	-0.7790	1.8831	-1.1091	0.2882
1969	0.6640	0.4364	0.1179	-0.1561	-0.7363	1.3962	0.0856	-0.5815	-0.8651	1.6124	1.3323	0.1288
1970	0.8053	-0.0210	-1.0995	1.0587	1.7936	0.7770	0.7662	-0.6512	1.6174	0.7374	1.2618	-0.7029
1971	0.6932	-0.2425	0.7903	0.4520	0.2257	0.4912	0.4227	-0.9655	-0.6876	-0.6708	-0.1095	0.6810
1972	0.6532	-1.3521	1.1597	-0.5532	0.4244	0.1972	-0.9592	-1.9797	-1.4621	0.3598	-0.8410	0.2213
1973	1.1938	0.9919	-0.4492	-0.1090	-0.7339	0.0419	0.4524	0.6884	-0.9933	0.6769	-0.1481	1.8410
1974	-1.1568	-0.3287	-0.9303	0.9095	-2.4206	1.9429	0.0192	-0.2835	-0.5525	-0.8393	-0.2468	0.7429
1975	-0.3104	0.8336	-0.8844	-0.5525	0.7559	0.1348	-0.5884	0.5624	0.7181	-0.9235	-0.4011	0.5459
1976	1.1490	-1.0611	-0.2179	-0.7804	-1.4411	0.2139	-0.0670	0.0738	0.0339	-1.5763	-0.5868	-0.0693
1977	-1.3098	0.6724	-0.4375	-0.1322	0.6153	-0.2354	0.4823	-1.6389	0.9039	-0.6736	1.6677	-0.7799
1978	-0.4854	-0.6201	-0.3573	-0.3702	0.0825	-0.1190	-0.0027	-0.3068	0.4760	-1.0984	0.4312	-0.9212
1979	-1.0896	0.1723	1.8784	-0.8966	-0.7946	-0.6496	0.6450	-0.1968	-0.6039	-0.8594	0.2278	0.1473
1980	-0.3459	-0.1447	0.0711	-0.5515	-0.0718	-0.2333	0.8378	-0.8711	0.0189	0.0447	-0.3067	-0.6719
1981	0.1853	0.5271	-0.1575	-0.2696	-0.7272	0.0082	-1.1758	1.5498	-0.6044	0.9215	0.2553	0.4878
1982	-0.5280	0.2172	-0.7486	0.1370	-1.9115	0.5879	0.2537	-0.2472	-0.0963	0.2480	1.6447	-0.4382
1983	0.0940	-0.9239	0.7677	1.0116	0.6994	1.8731	-1.2083	1.2149	0.9213	1.2007	-0.4013	2.2229
1984	0.1768	0.7578	0.4961	0.8021	0.9753	0.4044	0.0608	-0.0066	0.3322	1.3693	1.1181	1.4203
1985	0.3600	-1.9611	0.7258	1.6362	0.1465	1.4194	1.3871	-0.2618	0.2551	-0.8855	0.5671	0.1030
1986	0.4000	2.4929	0.5291	-0.1975	0.6795	-0.3271	2.1598	0.5645	0.5282	0.8720	-0.6084	0.4450
1987	1.5338	0.6831	-1.2286	1.5939	-0.1939	-0.3229	-0.6386	0.3773	-0.5922	-0.0552	-0.4213	-0.7144
1988	2.2265	-1.6822	-0.0576	0.9395	1.5317	-1.8657	-0.7452	0.6896	1.1710	-0.7751	1.1287	0.2441
1989	0.6087	1.2837	0.9984	1.8057	-1.0099	0.4919	-0.5722	0.7994	-2.0411	1.1032	-2.0386	-0.4237
1990	-0.5497	-2.2541	-0.0103	-1.5907	2.3509	1.0501	1.2098	0.5342	0.0137	1.2415	0.5166	-0.9234
1991	-0.9117	-0.0595	0.8151	0.1854	0.1404	0.6024	0.1220	-1.0559	-0.1834	-0.9303	0.6850	-2.5314
1992	-0.7221	-0.5757	-0.4631	-0.7879	-1.6014	1.9867	-0.3525	0.3584	-1.0320	-2.2311	-1.4585	-1.1433
1993	1.0029	1.0610	-1.5250	0.5792	0.3070	-0.3982	0.8155	0.4042	1.9443	-0.9948	1.5652	0.9935
1994	-0.7900	0.8472	-0.2560	1.2397	0.0616	0.1506	0.7155	-0.6760	0.0749	1.0699	-0.2770	-1.2551
1995	-0.9413	1.2237	0.6801	-1.5682	-1.1332	1.6131	-0.7882	-1.2104	0.1809	0.3361	0.5400	0.0530
Med	0.0032	-0.0018	-0.0026	-0.0039	-0.0099	0.0276	-0.0174	0.0385	-0.0335	0.0325	0.0300	0.0217
Asim	0.4481	-0.2158	-0.1168	-0.0004	-0.1216	-0.3924	-0.0039	-0.3070	0.0578	-0.0742	-0.0783	-0.1343

Los residuales se consideran normales e independientes.

F. Muestras generadas que han sido desestandarizadas y desnormalizadas

	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
1956	301.52	250.05	307.14	132.88	65.24	21.95	2.79	3.34	31.79	57.92	68.24	88.67
1957	134.47	421.71	735.79	416.78	77.30	181.31	15.43	19.35	115.71	293.72	252.45	358.66
1958	281.21	431.82	387.46	282.96	261.67	237.06	44.30	10.75	100.19	195.23	141.73	118.42
1959	276.26	532.77	373.38	59.34	240.52	108.73	14.00	6.59	28.73	142.71	73.60	186.73
1960	244.41	454.35	339.14	117.77	62.65	3.34	3.36	14.34	49.05	228.10	354.80	350.30
1961	280.81	540.67	461.65	331.41	105.66	23.30	2.78	0.19	46.41	31.85	164.73	153.13
1962	136.96	338.59	411.96	248.12	33.39	40.71	13.52	5.48	69.22	127.26	99.92	166.54
1963	191.59	358.64	282.06	350.05	31.10	14.69	21.61	8.91	23.34	80.16	205.15	225.85
1964	165.12	621.00	485.53	363.82	52.54	194.79	6.04	7.37	13.82	203.10	263.21	159.11
1965	314.62	520.65	838.23	582.91	10.14	98.78	17.71	10.37	52.30	100.65	175.10	163.45
1966	148.23	545.50	636.22	290.80	45.76	66.08	67.90	25.57	78.34	155.49	120.34	207.43
1967	246.37	320.84	351.45	155.74	82.77	135.11	14.72	12.94	164.88	74.11	95.27	51.10
1968	96.97	291.14	322.67	68.98	46.49	48.92	7.90	1.96	125.82	292.96	100.15	30.00
1969	146.82	534.61	233.67	98.07	115.53	30.71	29.70	11.49	103.39	179.34	227.06	208.32
1970	201.02	200.61	374.97	108.55	257.90	66.22	150.53	18.57	63.11	143.03	36.07	166.53
1971	217.99	704.17	859.72	380.15	212.73	43.22	6.60	2.85	51.89	86.52	89.25	163.76
1972	185.66	329.07	332.59	147.18	22.94	11.85	1.06	0.11	24.33	166.06	91.27	92.06
1973	184.94	655.07	38.27	265.49	384.69	10.30	15.19	7.30	75.42	123.83	261.48	377.46
1974	337.04	469.13	387.77	152.98	98.68	14.93	2.97	1.34	45.52	79.93	84.38	103.64
1975	337.98	470.08	504.36	284.97	176.17	42.85	2.02	12.81	85.20	72.29	86.47	320.45
1976	350.32	556.57	642.29	465.36	270.92	46.37	12.62	11.37	74.20	162.28	251.31	161.78
1977	185.12	334.27	31.81	270.53	404.38	268.32	7.31	28.66	83.14	135.88	44.13	23.96
1978	192.56	351.51	449.44	56.47	291.18	143.15	0.40	0.76	22.10	79.88	163.97	242.54
1979	173.34	237.89	323.06	111.47	91.59	27.81	0.67	1.44	39.58	47.75	84.83	132.18
1980	201.25	304.54	237.12	121.86	70.87	41.37	1.10	1.92	54.55	98.17	99.96	177.19
1981	118.36	229.61	224.03	324.13	149.31	104.68	15.44	6.85	87.75	79.62	96.23	104.57
1982	173.52	952.81	1035.31	437.79	226.08	77.42	8.45	6.28	99.46	137.25	171.47	210.71
1983	270.57	526.63	690.86	218.31	233.04	13.99	3.81	3.69	21.55	103.92	125.72	240.78
1984	239.62	451.77	234.05	114.66	45.07	42.94	12.92	7.53	37.25	228.60	169.90	85.91
1985	127.24	316.22	267.82	184.22	64.24	47.30	6.21	3.59	30.24	118.13	182.17	325.43
1986	225.02	644.46	666.65	234.69	399.44	23.13	24.69	11.24	75.99	96.53	82.73	135.38
1987	166.96	322.76	373.19	228.47	99.41	20.56	11.49	5.02	96.86	180.66	95.37	60.54
1988	136.59	592.38	618.12	291.92	208.00	25.35	3.07	1.54	8.71	221.08	278.10	191.73
1989	230.82	585.92	916.52	953.15	96.11	45.43	61.28	4.96	76.26	152.40	78.31	350.86
1990	249.71	575.40	842.31	823.30	3.15	7.85	0.61	0.35	41.91	222.42	241.21	282.55
1991	288.01	676.14	567.32	206.51	75.11	6.66	3.94	2.70	28.18	187.20	182.73	252.32
1992	270.34	270.00	178.29	172.50	120.04	17.01	0.13	0.35	27.25	112.88	110.17	68.53
1993	152.75	514.69	409.95	128.40	158.06	55.18	20.45	4.02	79.59	149.23	121.28	113.50
1994	36.67	379.40	208.22	4.38	65.91	76.12	5.71	3.28	44.24	93.36	145.44	65.42
1995	203.36	322.77	384.73	193.58	37.75	15.77	5.67	4.05	51.33	240.60	144.73	60.61
Med	210.55	453.41	474.13	261.02	161.34	70.53	18.15	7.28	60.71	144.55	149.01	174.45
σ	71.59	159.83	218.06	191.28	124.30	8.41	28.15	6.77	34.28	64.90	73.44	96.84

G. Simulación del vaso

Se presenta algunos resultados de la simulación que permite observar el comportamiento del vaso para las dimensiones propuestas, con las muestras generadas. Para un volumen de extracción mensual $V_{ext} = 1.814 \times 10^6$ m³ de agua (0.70 m³/s), para una capacidad del vaso $V_{util} = 1.687 \times 10^6$ m³ de agua, para un nivel máximo $Niv_{max} = 10$ m y un nivel mínimo de $Niv_{min} = 2$ m.

Mes de extracción	Derrame mensual esperado (miles de m ³)	Déficit mensual esperado (miles de m ³)	Tipo de extracción
Abril	48.47	2.81	conveniente
Mayo	50.13	4.51	conveniente
Junio	53.14	7.62	no conveniente
Julio	56.51	11.04	no conveniente
Agosto	56.95	11.52	no conveniente
Setiembre	52.91	7.34	no conveniente
Octubre	49.62	3.80	conveniente

Referencias

- [1] IV Foro Mundial del Agua, México 2006; Informe sobre el Desarrollo de los Recursos Hídricos, UNESCO (2006).
- [2] V. Yevjevich, *Stochastic Processes in Hidrology*, Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado (1972).
- [3] J. D. Salas, J. W. Delleur, V. Yevjevich y W. L. Lane; *Applied Modeling in Hidrologic Time Series*, Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado (1980).
- [4] J. A. Maza, V. Franco; *Técnicas experimentales, manual de diseño de obras civiles*; Comisión Federal de Electricidad, Instituto de Investigaciones Eléctricas, México D.F. (1983).
- [5] R. L. Anderson, *Distribution of the Serial Correlation Coeficients*, *Annales Math. Statistics* **13**, 1 (1942).
- [6] G. U. Yule, *On a method of investigating periodicities in disturbed series wiht special reference to Wolfer's sunspot numbers*, *Phil. Trans. Royal Soc. A* **226**, 267 (1937).
- [7] G. E. P. Box y M. E. Muller; *A note on the generation of normal deviates*, *Ann. Math. Stat.* **28**, 610 (1958).