Revista de Investigación de Física. Vol 5 (2002) 48 - 50

Solución estática axialmente simétrica de las ecuaciones de Einstein en coordenadas esferoidales generalizadas

Fulgencio Villegas S[a*]

[a]*Facultad de Ciencias Físicas Universidad Nacional Mayor de San Marcos.Ciudad Universitaria. Av. Venezuela cdra 34. Lima 1-Perú*

Resumen

Se obtiene una solución general exacta de las ecuaciones de Einstein en el vacío para la métrica estática axialmente simétrica, en términos de un sistema de coordenadas que contiene como casos particulares las coordenadas prolatas, oblatas y esféricas. La solución obtenida es una generalización de las soluciones correspondientes a cada uno de estos tres casos.

Palabras clave: Gravitación; relatividad general; teoría de campos.

Abstract

A general solution of the Einstein's equations in the vacuum and for a static and axial symmetric is obtained in terms of a coordinate system, which has as particular cases the prolates, oblates and spherical coordinates. The solution obtained is a generalization of the solutions corresponding to each of the three cases mentioned.

Keywords: Gravity; general relativity; field theory

1. Introducción

Este trabajo está enmarcado dentro del campo de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein. Específicamente estudiaremos el campo gravitacional estático axialmente simétrico, el cual define una geometría espacio-temporal dada por [8]:

$$ds^2 = -e^{\psi(\rho,z)}dt^2 + e^{-\psi(\rho,z)}\left\{\rho^2 d\phi^2 + e^{\gamma(\rho,z)}(d\rho^2 + dz^2)\right\} \tag{1}$$

que es la expresión general de la métrica estática axialmente simétrica en coordenadas cilíndricas de Weyl. Esta métrica, escrita en coordenadas esferoidales prolatas[6], oblatas y esféricas[2], ha sido ampliamente utilizada en numerosos trabajos para modelar sistemas con simetría axial (discos, elipsoides, esferas, etc.). En este trabajo introduciremos un nuevo sistema de coordenadas que reúne a los tres sistemas mencionados anteriormente. Lo llamaremos "Sistema de Coordenadas Esferoidales Generalizadas" (CEG), y tendremos las coordenadas prolatas, oblatas y esféricas como sus casos particulares. Una vez escrita la métrica (2) y sus respectivas ecuaciones de Einstein en el vacío, en CEG, obtendremos su solución exacta en términos de las nuevas coordenadas. Evidentemente, esta solución obtenida reunirá como casos particulares las soluciones en prolatas, oblatas y esféricas.

2. Coordenadas esferoidales generalizadas

Definimos el sistema CEG (ξ, η, ϕ) de la siguiente forma

$$\xi = \frac{a}{2}\left[(1+k)\cosh\alpha + (1-k)\mathrm{senh}\,\alpha\right] \tag{2}$$

* Corresponding author. e-mail: fvillegas@unmsm.edu.pe.

$$\eta = \cos\theta \qquad (3)$$

Donde las variables θ y ϕ son las mismas coordenadas angulares del sistema de coordenadas esféricas: $0 \leq \theta < \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$. Por otra parte, cada valor de α define un elipsoide co-ordenado centrado en el orígen, con focos en a y $-a$.

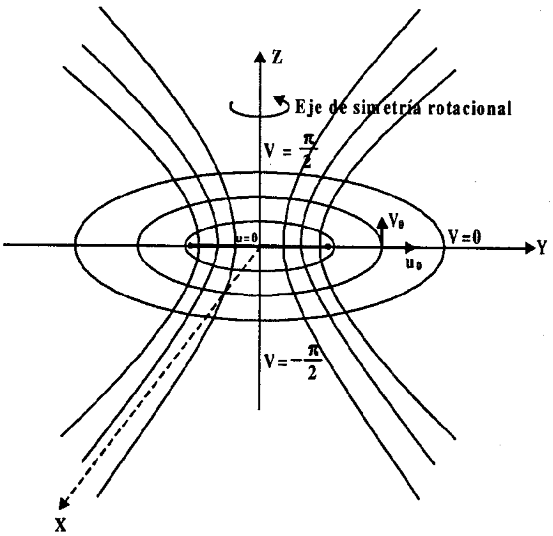

Fig 1: Coordenadas esferoidales oblatas: X = a cosh u cos v cosϕ; Y = a cosh u cos v senϕ; Z = a senh u senv

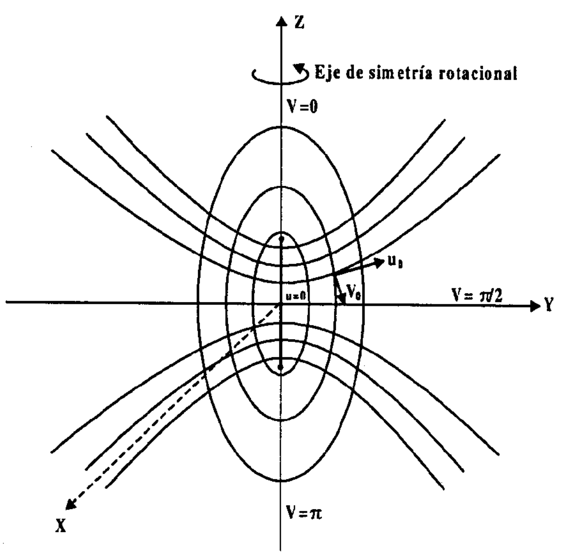

Fig 2. Coordenadas esferoidales prolatas; X = a senh u sen v cosϕ; Y = a senh u sen v senϕ; Z = a cosh u cos v

Donde las variables θ y ϕ son las mismas coordenadas angulares del sistema de coordenadas esféricas: $0 \leq \theta < \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$. Por otra parte, cada valor de α define un elipsoide co-ordenado centrado en el orígen, con focos en a y $-a$.

Aquí, a es una constante real positiva, y k sólo puede tomar los valores 1 ó - 1. Si introducimos $\sigma = ka$, es fácil ver que $\sigma = 1$, $\sigma = -1$ y $\sigma = 0$ definen, a través de (2), los sistemas de coordenadas prolatas, oblatas y esféricas[1].

Las coordenadas cilíndricas de Weyl y las CEG se relacionan de la siguiente manera[1]:

$$\rho = \sqrt{(\xi^2 - \sigma^2)(1-\eta^2)} \qquad (4)$$

$$z = \xi\eta \qquad (5)$$

Si introducimos esta transformación de coordenadas en (2), obtenemos la expresión para la métrica estática axialmente simétrica en CEG[1]:

$$ds^2 = e^{2\psi}dt^2 - e^{-2\psi}\left\{e^{2\gamma}(\xi^2 - \sigma^2\eta^2)\left(\frac{d\xi^2}{\xi^2+\sigma^2} + \frac{d\eta^2}{1-\eta^2}\right) + (\xi^2 - \sigma^2)(1-\eta^2)d\phi^2\right\} \qquad (6)$$

Las funciones ψ y γ, desconocidas por el momento, sólo dependen de las coor-denadas ξ y η. Su forma explícita podrá ser determinada resolviendo las ecuaciones de Einstein en el vacío, $R_{ab} = 0$.

3. Solucion general en CEG

Las ecuaciones de Einstein en el vacío para la métrica (6) tienen la siguiente forma[1]:

$$[(\xi^2 - \sigma^2)\psi_\xi]_\xi + [(1-\eta^2)\psi_\eta]_\eta = 0 \qquad (7)$$

$$\gamma_\xi = \frac{1-\eta^2}{\xi^2 - \sigma^2\eta^2}\left[\xi(\xi^2 - \sigma^2)\psi_\xi^2 - \xi(1-\eta^2)\psi_\eta^2 - 2\eta(\xi^2 - \sigma^2)\psi_\xi\psi_\eta\right] \qquad (8)$$

$$\gamma_\eta = \frac{\xi^2 - \eta}{\xi^2 - \sigma^2\eta^2}\left[\eta(\xi^2 - \sigma^2)\psi_\xi^2 - \eta(1-\eta^2)\psi_\eta^2 + 2\xi(\xi^2 - \eta^2)\psi_\eta\right] \qquad (9)$$

Donde los subíndices denotan derivación parcial

La expresión (7) es simplemente la ecuacón de Laplace 2-dimensional en CEG, para ψ. Su solución general, de interés físico, puede escribirse como[1]:

$$\psi(\omega,\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{n+1} Q_n(\omega) P_n(\eta) \qquad (10)$$

donde los P_n y Q_n son los polinomios de Legendre y las funciones asociadas de Legendre de segunda clase, respectivamente. Las d_n son constantes arbitrarias y determinan las soluciones particulares de (7).

Las igualdades (9) y (10) constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales sobredeterminado, para γ.

Introduciendo (10) en este sistema, obtenemos la siguiente solución general:

$$\psi(\omega,\eta)=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{d_n d_m}{n+m+2}\Gamma^{mn} \qquad (11)$$

donde:

$$\Gamma^{mn}=\frac{1}{2}\ln\left[\frac{\omega^2-1}{\omega^2-\eta^2}\right]+(k_n+k_m-2k_n k_m)\ln\left[\frac{\omega+\eta}{\omega-1}\right]$$
$$+(\omega^2-1)[\omega(A_{n,m}Q'_n Q_m+A_{m,n}Q'_m Q_n)-C_{n,m}Q_n Q_m]$$
$$+(\omega^2-1)\{(1-k_n)S_m+k_n S_{m+1}$$
$$\frac{k_n}{m+1}[P_m-(-1)^m]Q'_m\}+(\omega^2-1)^2\{Q_m B_{m,n}-Q'_m F_{m,n}$$
$$+\frac{1}{n+1}F_{m,n}Q'_m Q'_n\}$$

donde $\omega=\xi/\sigma$ y k_n es 1 si n par y 0 si n es impar.

Los términos $A_{m,n}$, $C_{n,m}$, S_m, $B_{m,n}$ y $F_{m,n}$ son combinaciones de los polinomios de Legendre, de sus funciones asociadas de segunda clase y de sus primeras derivadas.

4. Conclusiones

Las coordenadas prolatas, oblatas y esféricas, y sus respectivas soluciones generales del vacío para el espacio-tiempo estático axialmente simétrico, pueden interpretarse como casos particulares de una generalización establecida mediante la introducción del sistema de coordenadas esferoidales generalizadas. La solución definida por (10) y (11) representa algo así como una "generalización de soluciones generales" y constituye, por lo tanto, un compendio de diversos resultados obtenidos en el área de investigación relacionada con la búsqueda de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein (Ver referencias [2]-[7]).

5. Referencias

[1] McCREA, J.D. Static axially symmetric gravitational fields with shell sources.Journal of Physics A Mathematical and General vol 9 No 5 (1976)

[2] BONNOR, W. B. and SACKFIELD, A.The Interpretation of Some Spheroidal Metrics.Comm. Math. Phys. 8, 338 (1968).

[3] CURZON, H. E. J. Cylindrical Solutions of Einstein's Gravitation Equa-tions. Proc. London Math. Soc. vol 23, pp 477 (1924).

[4] LETELIER, P. S. On the gravitational field of static and stationary axial symmetric bodies with multipolar structure.Preprint.

[5] MORGAN, T. and MORGAN, L. The Gravitational Field of a Disk.Phys. Rev. vol 183, No 5 (1969).

[6] QUEVEDO, H. General static axisymetric solution of Einstein's vacuum field equations in prolate spheroidal coordinates..Physical Review D, vol 39, No 10, pp 2904-2911 (1989).

[7] VORHEES, B. H. Static Axially Symmetric Gravitational Fields.Physical Review D, vol 2, No 10,pp 2119-2122 (1970).

[8] WEYL, H. Bemerkung Über die Axialsymmetrischen Lösungen der Einstein-schen Gravitationsgleichungen.Ann. Physik. vol 59, p. 185 (1919).