



SUPERSIMETRÍA EN MECÁNICA CUÁNTICA

Fulgencio Villegas Silva^{a*}

^aFacultad de ciencias Físicas Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Ciudad Universitaria. Av. Venezuela Cdra. 34. Lima 1- Perú.

Resumen

Usando las ideas de Supersimetría aplicada a la Mecánica Cuántica, se muestra cómo obtener funciones de onda y espectros de energía para una sucesión de Hamiltonianos usando un método que involucra operadores de creación y de aniquilación, similares a los usados en el oscilador armónico. Se examina la condición de integrabilidad denominada invarianza de forma, la cual es necesaria para reproducir el espectro original en su totalidad. Se muestra dos ejemplos que ayudan a visualizar el método.

PACS: 02.30.-f; 02.30.Hq

Palabras claves: Supersimetría, SUSY QM.

Abstract

Using ideas about supersymmetry applied to Quantum Mechanics, it is shown how to obtain wave functions and energy spectra for a Hamiltonian series using a method which involves creation and annihilation operators, similar to the ones used for the harmonic oscillator. The integrability condition, named form invariance, is tested and it is necessary in order to reproduce the original total spectrum. Two examples that help to visualize the method are shown.

Keywords: Supersymmetry, SUSY QM

1. Introducción

La supersimetría (SUSY) surgió en la década de 1970¹ en el contexto de Física de partículas y campos y permite relacionar bosones y fermiones. La supersimetría en mecánica cuántica (SUSY-QM) fue formulada por primera vez en 1981 por Witten² cuando pretendía esclarecer las propiedades esenciales de la simetría bosón-fermión; introduce la supersimetría en una teoría de campos en (1+0) dimensiones, esto es, la mecánica cuántica supersimétrica. Allí se interpretaba como una teoría de Wess-Zumino en una dimensión.

Desde que surgió la mecánica cuántica supersimétrica ha sido usada en varios contextos³, una aplicación bastante interesante de este formalismo es su uso para obtener soluciones de la ecuación de Schrödinger, resoluciones espectrales y construcción de nuevos potenciales isoenergéticos⁴ y con fases equivalentes^{5,6}.

En este trabajo, se estudiará la formulación de la mecánica cuántica supersimétrica unidimensional

(1D) y con una sola supersimetría ($N=1$) considerándose como ejemplo a una partícula confinada en un pozo potencial.

Estudiaremos también la construcción de una familia de Hamiltonianos que poseen el mismo espectro que el Hamiltoniano original, salvo que se haya corrido en sus primeros $(n-1)$ niveles de energía.

Por último, se mostrará cómo generalizar el método de operadores escalera (operadores de creación y aniquilación) introduciendo el concepto de invariancia de forma, el cual nos conducirá a la construcción exacta del espectro de energía para el Hamiltoniano original.

2. Formulación de la Mecánica Cuántica Supersimétrica

Consideremos un potencial $V_1(x)$ cuya función de onda en el estado base $\psi_0(x)$ se conoce previamente, y cuyo estado propio de energía es calibrado de tal forma que en el estado base sea nulo. Así la ecuación

* Corresponding autor. e-mail: fvillegas@unmsm.edu.pe

de Schrödinger se escribe como:

$$\hat{H}\psi_0(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi_0(x) + V_1(x)\psi_0(x) = 0 \quad (1)$$

Descomponiendo el Hamiltoniano \hat{H}_1 de la siguiente manera:

$$\hat{H}_1 = \hat{A}^\dagger \hat{A} \quad (2)$$

en donde:

$$\hat{A} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x), \quad \hat{A}^\dagger = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \quad (3)$$

Con lo cual determinamos que:

$$V_1(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x). \quad (4)$$

Al término $W(x)$ se le denomina "superpotencial". Requerimos que se cumpla

$$\hat{H}\psi_0 = \hat{A}^\dagger \hat{A}\psi_0 = 0 \quad (5)$$

con lo cual determinamos que:

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\psi_0'(x)}{\psi_0(x)} \quad (6)$$

De donde obtenemos

$$\psi_0(x) = \exp\left[-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_x W(x') dx'\right] \quad (7)$$

Definiendo el Hamiltoniano

$$\hat{H}_2 = \hat{A} \hat{A}^\dagger \quad (8)$$

de tal manera que

$$V_2(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} W(x) \quad (9)$$

los potenciales $V_1(x)$ y $V_2(x)$ se denominan potenciales adyacentes supersimétricos.

Las funciones de onda y los estados de energía de \hat{H}_1 y \hat{H}_2 están relacionados de la siguiente manera:

$$\psi_n^{(2)} = [E_{n+1}^{(1)}]^{-1/2} \hat{A}\psi_{n+1}^{(1)} \quad (10)$$

$$\psi_{n+1}^{(1)} = [E_n^{(2)}]^{-1/2} \hat{A}^\dagger \psi_n^{(2)} \quad (11)$$

Consideremos una matriz Hamiltoniana H de la forma

$$H = \begin{pmatrix} \hat{H}_1 & 0 \\ 0 & \hat{H}_2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

la cual es parte de un álgebra cerrada que contiene a dos operadores denominados "supercargas" representados como:

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \hat{A} & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{Q}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & \hat{A}^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Así pues, el álgebra supersimétrica más sencilla en una dimensión y con una sola supersimetría no trivial que puede construirse es:

$$\hat{Q}^2 = \hat{Q}^{\dagger 2} = 0, \quad [\hat{H}, \hat{Q}^\dagger] = [\hat{H}, \hat{Q}] = 0, \quad (14)$$

$$\{\hat{Q}, \hat{Q}^\dagger\} = \hat{H}, \quad \{\hat{Q}, \hat{Q}\} = \{\hat{Q}^\dagger, \hat{Q}^\dagger\} = 0, \quad (15)$$

los operadores \hat{Q} y \hat{Q}^\dagger pueden ser interpretados como operadores que cambian grados de libertad bosónicos a fermiónicos y viceversa. Para que SUSY sea una buena simetría, los operadores \hat{Q} y \hat{Q}^\dagger deben anularse en el vacío; para esto, escribimos la función de onda en el estado base para la matriz Hamiltoniana de la siguiente forma

$$\psi_0^{(s)}(x) = \begin{bmatrix} \psi_0^{(1)}(x) \\ \psi_0^{(2)}(x) \end{bmatrix} \quad (16)$$

los operadores \hat{Q} y \hat{Q}^\dagger deben cumplir

$$\hat{Q}\psi_0(x) = \hat{Q}^\dagger\psi_0(x) = 0 \quad (17)$$

Cuando sucede esto se dice que la supersimetría se conserva.

Veamos un ejemplo de cómo funciona la formulación Hamiltoniana de la mecánica cuántica supersimétrica. Consideremos una partícula de masa m en un pozo de potencial de longitud L . Para este caso la función de onda en el estado base y su respectiva energía están dadas por:

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \text{senc}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (18)$$

$$E_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \quad (19)$$

Sustrayendo el estado base de la energía reconstruimos el Hamiltoniano, de tal forma que los valores propios de la energía están dados por:

$$E_n^{(1)} = \frac{n(n+2)\hbar^2\pi^2}{2mL^2} \quad (20)$$

y las funciones de onda quedan como:

$$\psi_0^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen} \left(\frac{(n+1)\pi x}{L} \right) \quad (21)$$

de tal forma que el superpotencial viene dado por:

$$W(x) = -\frac{\hbar\pi}{\sqrt{2mL}} \cot \left(\frac{\pi x}{L} \right) \quad (22)$$

y el potencial supersimétrico por

$$V_2(x) = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} \left[2 \operatorname{cosec}^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) - 1 \right] \quad (23)$$

Ahora, las funciones de onda para el Hamiltoniano \hat{H}_2 se obtienen aplicando el operador \hat{A} a las funciones de onda de \hat{H}_1 . En particular se encuentra que:

$$\psi_0^{(2)}(x) = -\sqrt{\frac{8}{3L}} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) \quad (24)$$

$$\psi_1^{(2)}(x) = -\frac{5}{2} \sqrt{\frac{1}{L}} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi x}{L} \right) \quad (25)$$

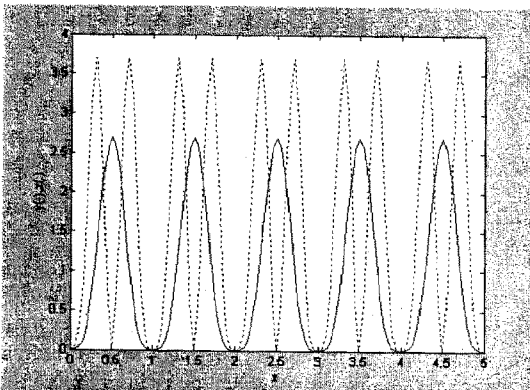


Fig. 1. Gráfica $[\psi]^2$ en función de x para las primeras funciones de onda ($[\psi_0^{(2)}]^2 = y$, $[\psi_1^{(2)}]^2 = z$) generadas por el potencial adyacente supersimétrico para el problema del pozo de potencial. Se ha considerado $\hbar = 2m = L = 1$.

donde el espectro de energías para $V_2(x)$ es el siguiente

$$E_n^{(2)} = \frac{(n+1)(n+3)\hbar^2\pi^2}{2mL^2} \quad (26)$$

de tal forma que, en el estado base, se tiene

$$E_0^{(2)} = \frac{3\hbar^2\pi^2}{2mL} = E_1^{(1)} \quad (27)$$

3. Hamiltonianos Isoespectrales.

Partiendo de $E_0^{(1)} = 0$, podemos escribir a \hat{H}_1 como (de aquí en adelante tomaremos $\hbar = 2m = 1$)

$$\hat{H}_1 = \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 + E_0^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) \quad (28)$$

en donde

$$\hat{A}_1 = \frac{d}{dx} + W_1(x), \quad \hat{A}_1^\dagger = -\frac{d}{dx} + W_1(x) \quad (29)$$

y el superpotencial lo escribimos como

$$W_1(x) = -\frac{d}{dx} \ln \psi_0^{(1)}(x) \quad (30)$$

De igual forma, el potencial supersimétrico adyacente es:

$$\hat{H}_2 = \hat{A}_1 \hat{A}_1^\dagger + E_0^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x) \quad (31)$$

donde el superpotencial $V_2(x)$ viene dado por

$$V_2(x) = V_1(x) - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \psi_0^{(1)}(x) \quad (32)$$

De las ecuaciones (10) y (11) vemos cómo se relacionan los autovalores de energía y las funciones de onda de los dos Hamiltonianos:

$$E_{n+1}^{(1)} = E_n^{(2)},$$

$$\psi_n^{(2)} = \left(E_{n+1}^{(1)} - E_0^{(1)} \right)^{-1/2} \hat{A}_1 \psi_{n+1}^{(1)}. \quad (33)$$

Realizando el mismo procedimiento anterior construimos el Hamiltoniano H_3 , el cual presenta la forma:

$$\hat{H}_3 = \hat{A}_2 \hat{A}_2^\dagger + E_1^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_3(x) \quad (34)$$

donde

$$V_3(x) = V_1(x) - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln(\psi_0^{(1)} \psi_0^{(2)}). \quad (35)$$

Por tanto, la función de onda para \hat{H}_3 viene dada como:

$$\psi_n^{(3)} = (E_{n+2}^{(1)} - E_1^{(1)})^{-1/2} (E_{n+2}^{(1)} - E_0^{(1)})^{-1/2} \hat{A}_2 \hat{A}_1 \psi_{n+2}^{(1)} \quad (36)$$

De esta forma es claro que si el Hamiltoniano original \hat{H}_1 posee p ($p \geq 1$) estados ligados con valores propios $E_n^{(1)}$, y funciones propias $\psi_n^{(1)}$ con $(p-1) \leq n \leq 0$, entonces se puede generar un ordenamiento de $(p-1)$ Hamiltonianos $\hat{H}_2, \hat{H}_3, \dots, \hat{H}_p$, de tal forma que el m-ésimo miembro de dicho ordenamiento \hat{H}_m posee el mismo espectro de energía de \hat{H}_1 excepto por el hecho de que los primeros $(m-1)$ valores propios de \hat{H}_1 están ausentes en \hat{H}_m . En particular, podemos escribir:

$$\hat{H}_m = \hat{A}_m \hat{A}_m^\dagger + E_{m-1}^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_m(x), \quad m=1, 2, 3, \dots, p \quad (37)$$

en donde

$$\hat{A}_m = \frac{d}{dx} + W_m(x), \quad \hat{A}_m^\dagger = -\frac{d}{dx} + W_m(x) \quad (38)$$

$$W_m(x) = -\frac{d}{dx} \ln \psi_0^{(m)}(x) \quad (39)$$

$$V_m(x) = V_1(x) - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln(\psi_0^{(1)} \dots \psi_0^{(m-1)}) \quad (40)$$

De tal forma que los autovalores de energía y funciones de onda del Hamiltoniano H_m vienen dadas por:

$$E_n^{(m)} = E_{n+1}^{(m-1)} = \dots = E_{n+m-1}^{(1)} \quad (41)$$

$$\psi_n^{(m)} = (E_{n+m-1}^{(1)} - E_{m-2}^{(1)})^{-1/2} \dots (E_{n+m-1}^{(1)} - E_0^{(1)})^{-1/2} \hat{A}_{m-1} \dots \hat{A}_1 \psi_{n+m-1}^{(1)} \quad (42)$$

de esta forma, conociendo todas las funciones propias de \hat{H}_m podemos conocer de inmediato de manera algebraica todas las funciones de onda y espectros de energía de la familia de $(p-1)$ Hamiltonianos.

4. Invarianza de Forma

La supersimetría tan solo relaciona funciones de onda de los Hamiltonianos supersimétricos adyacentes y sus respectivos espectros, pero no proporciona el espectro correspondiente al Hamiltoniano original \hat{H}_1 , para tal efecto es necesario introducir una condición extra de integrabilidad denominada invarianza de forma. Si el par de potenciales supersimétricos adyacentes $V_1(x)$ y $V_2(x)$ poseen forma similar y difieren únicamente en los parámetros que aparecen en ellos, se dice que son potenciales de forma invariante. En otras palabras si $V_1(x)$ y $V_2(x)$ satisfacen la condición:

$$V_2(x, a_1) = V_1(x, a_2) + R(a_1) \quad (43)$$

donde a_1 es un conjunto de parámetros, a_2 es función de a_1 y el término $R(a_1)$ es independiente de x , entonces $V_1(x)$ y $V_2(x)$ son de forma invariante. Utilizando este hecho calcularemos el espectro del Hamiltoniano \hat{H}_1 . Para este propósito, se construye una sucesión de Hamiltonianos \hat{H}_s , con $s=1, 2, \dots$, en donde:

$$\hat{H}_s = -\frac{d^2}{dx^2} + V_s(x, a_s) \quad (44)$$

podemos escribir la ecuación anterior en términos de $V_1(x)$ como:

$$\hat{H}_s = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x, a_s) + \sum_{k=1}^s R(a_k) \quad (45)$$

donde $a_s = f(a_0)$, es decir, la función f aplicada s veces. Usando las expresiones anteriores obtenemos:

$$\hat{H}_{s+1} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x, a_{s+1}) + \sum_{k=1}^s R(a_k) \quad (46)$$

o igualmente:

$$\hat{H}_{s+1} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x, a_s) + \sum_{k=1}^{s-1} R(a_k) \quad (47)$$

de tal forma que \hat{H}_s y \hat{H}_{s+1} son Hamiltonianos supersimétricos adyacentes ya que poseen el mismo espectro excepto por la ausencia del estado base de \hat{H}_s en \hat{H}_{s+1}

$$E_0^{(s)} = \sum_{k=1}^{s-1} R(a_k) \quad (48)$$

Devolviéndonos de \hat{H}_s a \hat{H}_{s-1} , podemos eventualmente alcanzar a \hat{H}_1 y a \hat{H}_2 , cuyas energías en el estado base son nulas, y el nivel enésimo coincide con el estado base del Hamiltoniano \hat{H}_n ($n=1,2,\dots$), de tal forma que el espectro total de \hat{H}_1 es:

$$E_n^{(1)} = \sum_{k=1}^n R(a_k), \quad E_0^{(1)} = 0 \quad (49)$$

Ahora vemos que se puede generalizar el método de operadores de creación y destrucción, de tal forma que podemos calcular las funciones de onda de \hat{H}_1 a partir del conocimiento de la función de onda en el estado base $\psi_0^{(1)}$, la cual viene dada en términos del superpotencial. Esto es posible ya que los operadores \hat{A} y \hat{A}^\dagger relacionan las funciones de onda que poseen el mismo espectro para los Hamiltonianos supersimétricos adyacentes \hat{H}_1 y \hat{H}_2 . Así, comenzamos desde el Hamiltoniano \hat{H}_s cuya función de onda en el estado base es $\psi_0^{(s)}(x, a_s)$.

Devolviéndonos desde \hat{H}_s hasta \hat{H}_{s-1} , luego hallamos en el n -ésimo estado la función de onda no normalizada en términos del estado base, la cual esta dada por:

$$\psi_n^{(1)} = \hat{A}^\dagger(x, a_1) \hat{A}^\dagger(x, a_2) \dots \hat{A}^\dagger(x, a_n) \psi_0^{(1)}(x, a_{n+1}) \quad (50)$$

Es conveniente tener expresiones explícitas para las funciones de onda; para tal caso, es mejor utilizar la expresión:

$$\psi_n^{(1)} = \hat{A}^\dagger \psi_{n-1}^{(1)}(x, a_2) \quad (51)$$

lo que corresponde claramente a la generalización de los operadores de creación y aniquilación usados en el oscilador armónico lineal. Así, el problema se restringe ahora a conocer el superpotencial con el cual podremos calcular la función de onda para el estado base y por consiguiente los potenciales V_1 y V_2 ; el siguiente paso sería calcular $R(a_k)$ para finalmente determinar las funciones de onda $\psi_n^{(1)}$. Con estos resultados podemos construir toda una familia de Hamiltonianos con la degeneración previamente expuesta.

Examinemos esto con un ejemplo: Considerando el oscilador armónico unidimensional con una función de onda en el estado base dado por:

$$\psi_0^{(1)} = A e^{-\frac{\lambda x^2}{2}} \quad (52)$$

en donde $\lambda = m\omega/\hbar$; si la energía es calibrada de tal forma que en el estado base es nula, los potenciales adyacentes y el superpotencial vendrían dados por:

$$V_1(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - \frac{1}{2} \hbar\omega, \quad V_2(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2} \hbar\omega \quad (53)$$

$$W(x) = \frac{m\omega}{\sqrt{2m}} x \quad (54)$$

Los potenciales $V_1(x)$ y $V_2(x)$ son de forma invariante con $R(a_1) = \hbar\omega = a_1$ y $a_2 = f(a_1) = a_1$, la función identidad, de tal forma que $a_s = a_1$. Así, el espectro de energías para \hat{H}_1 vendría dado por:

$$E_n^{(1)} = \sum_{k=1}^n R(a_k) = \hbar\omega + \hbar\omega + \dots + \hbar\omega = n\hbar\omega \quad (55)$$

De tal forma que $E_0^{(1)} = 0$, y la energía en el estado base para \hat{H}_2 será $E_0^{(2)} = R(a_1) = \hbar\omega$

Ahora podemos calcular las funciones de onda no normalizadas para los dos primeros estados excitados:

$$\psi_1^{(1)} = B x e^{-\frac{\lambda x^2}{2}}, \quad \psi_2^{(1)} = C e^{-\frac{\lambda x^2}{2}} (1 - 2\lambda x^2) \quad (56)$$

Podemos notar que los dos potenciales que difieren en su forma funcional, poseen exactamente el mismo espectro excepto por el hecho de que uno de ellos posee un nivel de energía más bajo.

5. Conclusiones

La supersimetría aplicada a la mecánica cuántica desemboca en una generalización al método de operadores escalera, similar al utilizado en la solución en el espacio de kets del oscilador armónico lineal. Para llegar a tal generalización, se mostró en primer lugar cómo construir toda una familia de potenciales que poseen el mismo espectro de energía; esto se llevó a cabo mediante la introducción de dos operadores diferenciales lineales \hat{A}^\dagger y \hat{A} , los cuales llegan a jugar el mismo papel que desempeñan los conocidos operadores escalera, pero de forma más general. Como aplicación, se construyeron potenciales a partir del pozo de potencial y se calcularon sus funciones de onda para el estado base y para el primer estado excitado; este procedimiento se lleva a cabo si se conoce previamente el espectro correspondiente al potencial original; sin embargo, la supersimetría no genera este espectro, de tal forma que para construirlo, se acudió a una condición extra

de integrabilidad denominada invarianza de forma, la cual relaciona los potenciales supersimétricos adyacentes. Si tales potenciales son invariantes, es posible reproducir exactamente el espectro del Hamiltoniano original. Como ejemplo se calculó el espectro para el oscilador armónico lineal suponiendo que su energía en el estado base fuese nula y conociendo previamente su función de onda en dicho estado; se calcularon las funciones de onda correspondientes a los dos primeros estados excitados, en plena concordancia con los resultados que encontramos en los textos convencionales.

La supersimetría aplicada a la mecánica cuántica es examinada de muy buena forma en la referencia⁷, en parte de donde surgieron las ideas centrales de este trabajo.

Referencias

- [1] Michio Kaku, "Quantum field Theory", Oxford University Press (1993), página 663
- [2] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B185**, 513 (1981)
- [3] F. Ravndal, *Elementary Supersymmetry CERN School of Physics*, CERN **85-11**, 300 (1985)
- [4] C. Sukumar, *J. Phys. A: Math. Gen.* **18**, 2917 (1985).
- [5] B. Talukda, *Phys. A: Math. Gen.* **25**, 4072 (1992).
- [6] R. de Lima Rodriguez. *Mod. Phys. Lett. A* **10**, 1309 (1995).
- [7] G. Junker, "Supersymmetric methods in quantum and statistical physics", Springer-Verlag, 1996.