



SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL ATRACTOR DE LORENZ POR EL MÉTODO DE RUNGE-KUTTA-FEHLBERG

Melchor Llosa Demartini^{a*}, Javier Gómez Barria^b

^aFacultad de Ciencias Físicas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Ap. Postal 14-0149, Lima, Perú

^bDepartamento de Cálculo, Análisis y Seguridad, Instituto Peruano de Energía Nuclear, Av. Canadá 1470, Lima-41, Perú.

Resumen

No hay solución explícita para el problema planteado en 1963 por Lorentz, por lo general se resuelve este sistema de ecuaciones diferenciales por el método de integración trapezoidal con extrapolación de Richardson o por el método mejorado de Euler. En este trabajo se plantea una solución alternativa por el método de Runge Kutta Fehlberg que requiere solo seis evaluaciones de la función, reduciendo el tiempo de cálculo.

PACS: 02.30.-f; 02.30.Hq

Palabras Claves: Atractor de Lorentz; Runge-Kutta-Fehlberg; Física Computacional; Métodos Numéricos.

Abstract

There is no an explicit solution for is proposed problem in 1963 by Lorentz. Generally, this system of differentials equations is solved by the method of trapezoidal integration with extrapolation of Richardson or by the improved method of Euler. In this work an alternative solution by the method of Runge Kutta Fehlberg is presented, which requires only six evaluations of the function, thus reducing the time of calculation.

Keywords: Lorentz Atractor; Runge-Kutta Method; Computing Physics; Numeric Methods

1. Introducción

E.M. Lorentz publicó en 1963 un importante trabajo titulado "Flujo determinista no periódico", que presenta una ecuación de aspecto simple, pero con comportamiento muy complejo. Quería entender como evoluciona una capa de fluido calentada por debajo, (una capa de aire próxima a la superficie se eleva por el calentamiento que le provoca la radiación solar absorbida en el suelo), problema de gran relevancia meteorológica y que se conoce como convección de Benard o de Rayleigh-Benard. Unos años mas tarde, se pudo comprender que la complejidad del sistema de Lorenz es debida a que tiene un atractor extraño, estudiado intensamente desde entonces.

2. El método de Runge-Kutta-Fehlberg

Una forma de garantizar precisión en la solución

de una ecuación diferencial es resolver el problema usando dos veces los tamaños de paso h y $h/2$ y comparar respuestas en los puntos de acoplamiento correspondientes al tamaño de paso más grande. Pero esto requiere una cantidad significativa de cálculo para el tamaño de paso más pequeño y debe ser repetida si se determina que el resultado no es bastante bueno. El método de Runge-Kutta-Fehlberg es unidireccional; se intentará resolver este problema. Tiene un procedimiento para determinar si se está utilizando el tamaño de paso apropiado h . En cada paso, dos diversas aproximaciones para la solución se hacen y se comparan.

Si las dos respuestas están según lo acotado, se acepta la aproximación. Si las dos respuestas no contienen una exactitud especificada, se reduce el tamaño de paso. Si las respuestas contienen más dígitos significativos que los pedidos, se aumenta el tamaño de paso.

Cada paso de Runge-Kutta-Fehlberg, requiere los siguientes 6 valores:

* Corresponding author. Tel.: 051-1-98755166;
fax: 511-4526688; e-mail: mllosa@lycos.com

$$k_1 = hf(t_j, y_j)$$

$$k_2 = hf\left(t_j + \frac{1}{4}h, y_j + \frac{1}{4}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(t_j + \frac{3}{8}h, y_j + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right)$$

$$k_4 = hf\left(t_j + \frac{12}{13}h, y_j + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right)$$

$$k_5 = hf\left(t_j + h, y_j + \frac{439}{216}k_1 - \frac{3680}{513}k_2 - \frac{845}{4104}k_3\right)$$

$$k_6 = hf\left(t_j + \frac{1}{2}h, y_j - \frac{8}{27}k_1 + \frac{3544}{2565}k_2 + \frac{1859}{4104}k_3 - \frac{11}{40}k_5\right)$$

Entonces una aproximación a la solución de la ED se hace usando el método de Runge-Kutta de orden 4:

$$y_{j+1} = y_j + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_2 + \frac{2197}{4104}k_3 - \frac{1}{5}k_5,$$

y el mejor valor para la solución se determina usando el método de Runge-Kutta de orden 5:

$$y_{j+1} = y_j + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_2 + \frac{28561}{56430}k_3 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6.$$

El tamaño de paso óptimo sh puede ser determinado multiplicando los tiempos escalares de s por el tamaño de paso actual h . El s escalar es:

$$s = \left(\frac{\varepsilon h}{2|z_{j+1} - y_{j+1}|} \right)^{1/4} = 0,840896 \left(\frac{\varepsilon h}{|z_{j+1} - y_{j+1}|} \right)^{1/4}$$

Donde ε es la tolerancia especificada en el control del error.

3. El Atractor de Lorentz

Lorentz obtuvo el siguiente sistema de tres diferentes ecuaciones ordinarias.

$$\dot{X} = -\sigma X + \sigma Y \tag{1}$$

$$\dot{Y} = -XZ + rX - Y \tag{2}$$

$$\dot{Z} = XY + bZ \tag{3}$$

Donde $\sigma = \mu/\rho\kappa$, es el llamado número de Prandtl, $b = 4/(1+a^2)$ y r es el parámetro de control, proporcional a ΔT .

Vemos que se trata de un sistema aparentemente simple, pero que se comporta de un modo muy complejo. Y conviene puntualizar dos cosas:

- 1) Las cantidades X, Y, Z no son coordenadas espaciales, sino que representan la velocidad y la temperatura del fluido a través de los valores de ψ y θ .
- 2) El modelo de Lorentz describe el fenómeno de Rayleigh-Benard sólo en la proximidad de la transición de la conducción térmica a la convección por rodillos simples. Por ello, el comportamiento caótico que se observa en los experimentos para valores altos del número de Rayleigh, no tiene nada que ver con ψ y θ .

El modelo de Lorentz ha sido investigado en gran detalle por métodos numéricos, pues no hay soluciones explícitas en forma analítica.

Se ha construido un programa hecho con FORTRAN 90, empleando el método de Runge-Kutta-Fehlberg para determinar el comportamiento del sistema dinámico de Lorentz en el intervalo $0 \leq t \leq 200$ con los mismos parámetros que originalmente uso Lorentz:

$$\begin{aligned} \sigma &= 10,0 \\ \rho &= 28,0 \\ b &= 8/3 \end{aligned}$$

Considerando las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} X(0) &= -1,3560 \\ Y(0) &= -2,492152 \\ Z(0) &= 12,317410 \end{aligned}$$

Posteriormente estos valores iniciales y con los parámetros de Lorentz son remplazados en las ecuaciones (1), (2) y (3). La solución de ésta se muestra en la Fig. 1 que es la proyección en el plano Y-Z y la Fig. 2 es la proyección en el plano X-Z, que en lugar de una simple estructura geométrica o curva compleja, la estructura conocida como atractor de Lorentz va emergiendo conforme se iteran las ecuaciones⁵.

4. Conclusiones

1. Si $0 < r \leq 1$ sólo hay una solución estacionaria

$X=Y=Z=0$ que es estable y representa la solución de equilibrio en la que el fluido está en reposo y la transmisión del calor se hace por convección.

- Si r crece y pasa por el valor 1, la solución se hace estable y se crea dos nuevos puntos de equilibrio C y C' en:

$$X = Y = \pm \sqrt{b(r-1)}, \quad Z = r-1$$

Lo cual constituye un atractor, pues todas las soluciones iniciales tienden asintóticamente a ella. En su interior hay una fuerte *sensibilidad a las condiciones iniciales* para el desarrollo de las ecuaciones diferenciales que planteo Lorentz. Este concepto explica una conducta irregular, en el cual un pequeño cambio es un sistema recursivo se magnifique hasta alterar drásticamente los resultados esperados, a esto se conoce como *el efecto mariposa*⁵.

Referencias

- [1] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in FORTRAN: The art of Scientific Computing*, 2nd ed. Cambridge University Press (1992).
- [2] H A Watts and L F Shampine. RKF45.f90, Sandia Laboratories, Albuquerque, New Mexico. Junio (2002).
- [3] L F Shampine, H A Watts, S. *SIAM Review* **18**, 376 (1976).
- [4] E. Fehlberg, *Low-order Classical Runge-Kutta Formulas with Step-size Control*, NASA Technical Report R-315.
- [5] Cesar Monroy Olivares. *Teoría del Caos*. Ed. Alfaomega S.A. (1997).

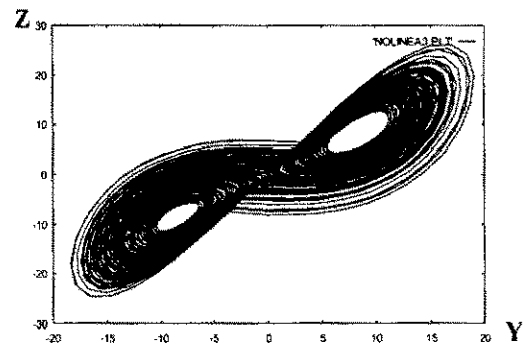


Fig. 1. Proyección sobre el plano Y-Z (máscara de buho), del Atractor de Lorentz

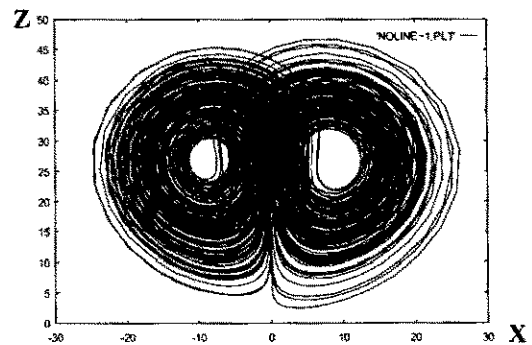


Fig. 2. Proyección sobre el plano X-Z (mariposa), del Atractor de Lorentz