



## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES DEL CAMPO DE YANG-MILLS

Fulgencio Villegas Silva<sup>a\*</sup>

<sup>a</sup> Facultad de ciencias Físicas Universidad Nacional de San Marcos. Ciudad Universitaria. Av. Venezuela cuadra 34. Lima 1- Perú

### Resumen

Se presenta una solución numérica a las ecuaciones clásicas del campo de Yang-Mills que corresponden a una línea infinita de fuentes. Dicha solución tiene simetría cilíndrica y es invariante respecto a una traslación a lo largo del eje de simetría, ella presenta un apantallamiento completo de los campos para grandes distancias.

PACS: 03.70.+k; 11.10.-z; 12.20.-m; 04.60.-m

Palabras claves: Teoría de campos; Teorías de Gauge; electrodinámica cuántica; gravitación cuántica.

### Abstract

A numerical solution of the classical field equations of the Yang-Mills theory corresponding to an infinite line of sources is presented. It has cylindrical symmetry and is also translation invariant along the symmetry axis. The configuration presents a complete screening of the fields for long radial distances.

Keywords: Field Theory; Gauge Theories; quantum electrodynamics; quantum gravity.

### 1. Introducción

En la literatura científica gran atención ha sido dedicada al problema del apantallamiento de distribuciones de carga en teoría de campos de gauge [1-4]. La importancia del estudio de este efecto radica en resolver el problema del confinamiento de los quarks.

En este trabajo se presenta una solución numérica de las ecuaciones del campo de Yang-Mills la cual muestra un apantallamiento total de la distribución de carga eléctrica, posee simetría cilíndrica y es invariante en una traslación a lo largo del eje de simetría. En el límite de grandes distancias radiales ella tiende a convertirse en una transformación de gauge y no tiene fuentes asociadas.

En la sección 1 se presenta la forma en que se busca la solución y se obtienen las ecuaciones que satisfacen las funciones a través de las cuales ellas se expresan.

En la sección 2 se obtiene soluciones asintóticas en la región de grandes distancias radiales, las cuales suministran las condiciones iniciales que fueron utilizadas para calcular a distancias cercanas al eje de simetría. Los resultados de los cálculos numéricos

para las componentes del potencial vector se presentan en forma gráfica.

Finalmente en las conclusiones se analizan algunas propiedades de la solución estudiada.

### 2. Sistema de ecuaciones

Las ecuaciones del movimiento de los campos de Yang-Mills en presencia de fuentes pueden escribirse en la forma siguiente[5-6]:

$$\partial_{\mu} G_{\mu\nu}^a + g2^{abc} A_{\mu}^b G_{\mu\nu}^c = y_{\nu}^a, \quad (1)$$

donde

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_{\mu} A_{\nu}^a - \partial_{\nu} A_{\mu}^a + g2^{abc} A_{\mu}^b A_{\nu}^c \quad (2)$$

y  $2^{abc}$  es el tensor completamente antisimétrico. En todo el trabajo se utiliza la métrica  $g$ .

Estamos interesados en soluciones con simetría cilíndrica y estáticas, por lo tanto el potencial vector se tomará en la forma siguiente:

\* e-mail: [fvillegass@unmsm.edu.pe](mailto:fvillegass@unmsm.edu.pe)

$$\vec{A}_\mu^\alpha = A_\theta^\alpha(\rho)\vec{n}_\theta + A_z^\alpha(\rho)\vec{k} \quad (3)$$

$$A_4^\alpha = 2V^\alpha(\rho) \quad (4)$$

donde  $\vec{k}$ ,  $\vec{n}_\theta$  y  $\vec{n}_\rho$  son vectores unitarios asociados a coordenadas cilíndricas con eje z coincidente con la dirección del eje de simetría,  $\rho$  y  $\theta$  son las variables radial y angular, respectivamente. Además se ha supuesto que  $A_\rho^\alpha = 0$ .

Después de sustituir (3) en (4) y en (1) pueden obtenerse las siguientes ecuaciones para  $A_\theta^\alpha, A_z^\alpha$  y  $V^\alpha$

$$\frac{d}{d\rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho A_\theta^\alpha) \right) + g^2 (A_z^{ab} A_z^{bc} - V^{ab} V^{bc}) A_\theta^\alpha = 0 \quad (5)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dA_z^\alpha}{d\rho} \right) + g^2 (A_\theta^{ab} A_\theta^{bc} - V^{ab} V^{bc}) V^\alpha = 0 \quad (6)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dV^\alpha}{d\rho} \right) + g^2 (A_\theta^{ab} A_\theta^{bc} - A_z^{ab} A_z^{bc}) V^\alpha = -q^\alpha \quad (7)$$

$$2^{abc} A_\theta^b \frac{dA_\theta^c}{d\rho} + 2^{abc} A_z^b \frac{dA_z^c}{d\rho} + 2^{abc} V^b \frac{dV^c}{d\rho} = 0 \quad (8)$$

En lo que sigue haremos nuevas suposiciones con vistas a obtener ecuaciones más simples aún. La primera consiste en suponer  $A_z^\alpha = 0$ , la segunda es la de imponer que  $q^\alpha$ ,  $V^\alpha(\rho)$  y  $A_\theta^\alpha$  tengan direcciones independientes de  $\rho$ . Bajo estas restricciones (6) y (8) se satisfacen automáticamente y (5) y (7) se transforman en

$$\frac{d}{d\rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho A) \right) \xi^a - V^2 A \eta^{ab} \eta^{bc} \xi^c = 0 \quad (9)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dV}{d\rho} \right) \eta^a + A^2 V \xi^{ab} \xi^{bc} \eta^c = -q \gamma^a \quad (10)$$

donde  $\eta^{ab} = \epsilon^{abc} \eta^c$ ,  $\xi^{ab} = \epsilon^{abc} \xi^c$  y  $A, V, q$  junto a  $\xi^a, \eta^a, \gamma^a$  son definidos por

$$gA^\alpha(\rho) = A(\rho)\xi^a \quad (11)$$

$$gV^\alpha(\rho) = V(\rho)\eta^a \quad (12)$$

$$gq^\alpha(\rho) = q(\rho)\gamma^a \quad (13)$$

aquí además se cumple

$$\xi^a \xi^a = \eta^a \eta^a = \gamma^a \gamma^a = 1 \quad (14)$$

De (9) puede concluirse que en el caso en que A y V sean diferentes de cero son válidas las siguientes relaciones:

$$\eta^{ab} \eta^{bc} \xi^c = -\xi^c \quad (15)$$

$$\xi^{ab} \xi^{bc} \eta^c = -\eta^c \quad (16)$$

$$\gamma^a = \eta^a \quad (16a)$$

Realizando el cambio de variables  $x = 1/\rho$  se puede obtener un sistema de ecuaciones útil para el análisis en el entorno del infinito. Abajo se escribe la forma final de los sistemas de ecuaciones en las variables  $x$  y  $\rho$  respectivamente.

$$\frac{d^2 A}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dA}{dx} - \frac{1}{x^2} A + \frac{V^2 A}{x^4} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dV}{dx} + \frac{A^2 V}{x^4} = 0 \quad (18)$$

y

$$\frac{d^2 A}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dA}{d\rho} - \frac{1}{\rho^2} A + V^2 A = 0 \quad (17a)$$

$$\frac{d^2 V}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dV}{d\rho} - A^2 V = -q \quad (18a)$$

### 3. Solución

Supondremos que en el entorno de  $x=0$  la solución buscada es analítica, es decir, puede escribirse según

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + O(x^5) \quad (19)$$

$$V(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + O(x^5) \quad (20)$$

En adelante, después de determinada una solución asintótica en función de los primeros términos de las series (19) y (20) y tomando los valores de A y V y sus primeras derivadas para pequeños valores de x en calidad de condiciones iniciales, se calculará la solución numérica para valores no restringidos de x. La expresión para la solución aproximada se halla imponiendo que los flujos de todas las componentes

de la intensidad de campo tiendan a cero cuando en ellas  $\rho_0 \rightarrow \infty$

$$\phi_\rho = -\eta^a \frac{dV}{d\rho}(\rho_0)(2\pi\rho_0) \quad (21)$$

$$\phi_z = \xi^a \int_{\rho_0}^{\infty} \left( \frac{dA}{d\rho} + \frac{1}{\rho} A \right) 2\pi\rho d\rho \quad (22)$$

$$\phi_\theta = g\eta^{ab}\xi^b \int_{\rho_0}^{\infty} V A d\rho \quad (23)$$

sustituyendo (19) y (20) en (21), (22) y (23) expresada en términos de la variable  $x$  se obtiene que estos límites de los flujos son nulos si los coeficientes de las potencias de  $x$  en (19) y (20) satisfacen

$$a_0 = 0 \quad (24)$$

$$b_0 a_1 = 0 \quad (25)$$

En adelante consideraremos solamente el caso en que se cumple

$$a_1 \neq 0 \quad (26)$$

$$a_0 = b_0 = 0$$

Sustituyendo las series (19) y (20) en la ecuación (17) y (18), suponiendo válido que  $b_2 \neq 0$  y que se cumple 26 se obtiene la siguiente expresión asintótica para la solución

$$V(\rho) = b_2 x^2 - \frac{1}{12} b_2^3 x^4 + O(x^6) \quad (27)$$

$$A = \pm \left\{ 2x - \frac{1}{4} b_2^2 x^3 + O(x^5) \right\} \quad (28)$$

La existencia de la transformación de escala

$$A(\rho) \rightarrow b_2 A(b_2 \rho)$$

$$V(\rho) \rightarrow b_2 V(b_2 \rho)$$

la cual transforma soluciones en nuevas soluciones de las ecuaciones iniciales, hace suficiente el trabajar con un solo representativo de todo el conjunto de soluciones para  $b^2$  arbitrario el cual tiene la siguiente expresión

$$V = x^2 - \frac{x^4}{12} + O(x^6) = \frac{1}{\rho^2} - \frac{\rho^{-4}}{12} + O(\rho^{-6}) \quad (29)$$

$$A = \pm \left\{ 2x - \frac{x^3}{4} + O(x^5) \right\} = \pm \left\{ \frac{2}{\rho} - \frac{\rho^{-3}}{4} + O(\rho^{-5}) \right\} \quad (30)$$

Con vista a obtener la forma de las funciones (29) y (30) para valores no pequeños de  $x$  se transformó el sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden (17) y (18) en el sistema de cuatro ecuaciones de primer orden

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= -\frac{1}{x}u + \frac{A}{x^2} - \frac{V^2 A}{x^4} \\ \frac{dv}{dx} &= -\frac{1}{x}v + \frac{A^2 V}{x^4} \end{aligned} \quad (31)$$

$$\frac{dA}{dx} = u$$

$$\frac{dV}{dx} = v$$

Este conjunto de ecuaciones (31) se resolvió numéricamente [7]. Las condiciones iniciales necesarias para las variables  $A$ ,  $V$ ,  $u$  y  $v$  son calculados de (29) y (30) en el punto  $x=0,01$  con el objetivo de disminuir al máximo el error cometido al desprestigiar los términos de orden igual o mayor que  $x^5$ .

Los resultados obtenidos para las funciones  $A(x)$  y  $V(x)$ , son representados en las Fig. 1 y 2 en función de  $x = 1/\rho$ .

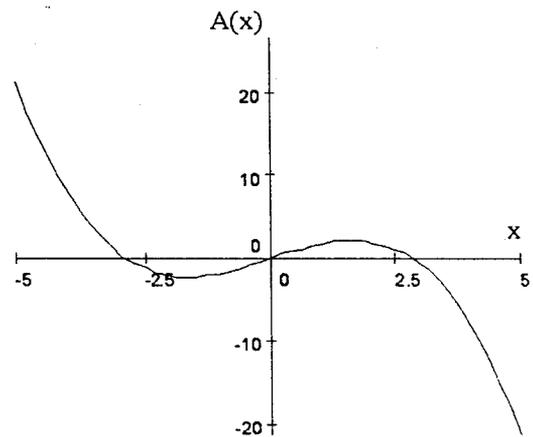


Fig.1. Representación de resultados de la función  $A(x)$ .

#### 4. Conclusiones

La solución presentada tiene la propiedad de tener flujos magnéticos y eléctricos nulos lejos del eje de simetría. Adicionalmente ella tiene un flujo magnético neto en el plano ortogonal al eje de

simetría. El valor de este flujo no cambia al obtener otras soluciones a partir de la solución característica según la transformación de escala  $A(\rho) \rightarrow bA(b\rho)$  y  $V(\rho) \rightarrow bA(b\rho)$  con  $b$  arbitrario.

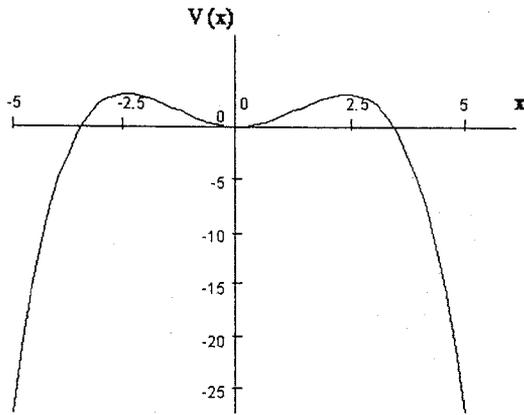


Fig.2. Representación de resultados de la función  $V(x)$ .

La distribución de campos obtenidos puede corresponder a la creada por una densidad de cargas y corrientes con simetría cilíndrica.

Ilustremos la posibilidad de que esto sea así. Consideremos el valor  $x_0$  de  $x$  para el cual la función  $A(x)$  se anula en la figura 1 y supongamos que con centro en el eje de simetría existe un cilindro hueco de radio  $\rho_0 = 1/x_0$  con densidades superficiales de carga y corriente eléctrica  $\sigma$  y  $J$  respectivamente. Escogiendo convenientemente los valores de  $\sigma$  y  $J$  puede lograrse que la solución en el interior del cilindro para  $V$  y  $A$  tome la forma

$$V(x) = V(x_0)$$

$$A(x) = 0$$

Con esto se concluye que la solución obtenida puede corresponder, entre otras posibilidades, al campo de Yang-Mills creado por un cilindro que contiene densidades superficiales de cargas y corrientes. Sin embargo, a diferencia de cómo sucede en el caso electromagnético, aquí, el campo de las cargas eléctricas se apantalla, lo cual está relacionado con el hecho de que el campo gauge no abeliano posee carga.

## 5. Referencias

- [1]. Mandula, J, *Color screening by a Yang-Mills instability*. Phys Lett. B 67(2): 175-178.
- [2]. Mandula, J ; Meiron, D. y Orzag, S, *Partial color Screening by classical Yang-Mills fields*.
- [3]. Michio Kaku, *Quantum Field Theory*. Oxford University Press. 1993
- [4]. I. J. R. Aitchison & A. J. G. Hey, *Gauge Theories in particles Physics*, Institute of Physics publishing Bristol and Philadelphia. 1996.
- [5]. Mikio Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*. Institute of Physics publishing Bristol and Philadelphia. 1996.
- [6]. J. Leite Lopes, *Gauge Field Theories an introduction*. Pergamon Press. 1981.
- [7]. M. M. Woolfson and G. J. Pert, *An Introduction to Computer Simulation*. Oxford , University Press. 1999.