



El método de Monte Carlo y la solución de la ecuación de transferencia radiativa

Mariella Berrocal Tito*, Carlos E. Velasquez Cabrera y Raul Carita Montero

Facultad de Ciencias Físicas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, A.P. 14-0149, Lima 14, Perú

Recibido 24 mayo 2010 — Aceptado 20 diciembre 2010

El paso de la radiación que atraviesa un medio donde ocurren los fenómenos de absorción, dispersión y emisión, es modelado por la ecuación de transferencia radiativa (ETR). Para medios puramente absorbentes, el fenómeno de dispersión es despreciado reduciendo la ETR a una ecuación diferencial lineal, con solución analítica. Para medios dispersivos, la ETR es una ecuación diferencial no lineal, sin solución analítica y su solución es aproximada por métodos numéricos determinísticos. Monte Carlo es un método estocástico, basado en probabilidades y utiliza un generador de números aleatorios para simular la ocurrencia de un evento, en este caso, el paso de la radiación por un medio. En este trabajo se utilizó el método de diferencias finitas junto con el de ordenadas discretas para resolver la ETR en una dimensión, los resultados fueron comparados con los obtenidos por el método de Monte Carlo. Algunos ejemplos de prueba son presentados, así también los programas utilizados para la solución de ambos métodos en el SciLab.

Palabras claves: Ecuación de transferencia radiativa, método de diferencias finitas, método de ordenadas discretas, método de Monte Carlo, SciLab.

The Monte Carlo method and the solution of the radiative transfer equation

The radiation pathway through a medium where occur the absorption, scattering and emission phenomena is described by the radiative transfer equation (ETR). For purely absorbing media, the dispersion phenomenon is neglected by reducing the ETR to a linear differential equation with analytical solution. For dispersive media, the ETR is a nonlinear differential equation, with non analytical solution and the solution must be approximated by deterministic numerical methods. Monte Carlo is a stochastic method based in probabilities and use random numbers to simulate the occurrence of an event, in this case, the pathways radiation in a participating media. In this study, we have used finite difference and discrete ordinates methods to solve the ETR in one dimension, the results were compared with the Monte Carlo results. Test case results are presented, also the source code used for the solution of both methods in the Scilab.

Keywords: Radiative transfer equation, finite difference method, discrete ordinates method, Monte Carlo method, Scilab.

En el presente trabajo se pretende contribuir a la enseñanza de la física aplicada en un tópico de permanente interés como lo es el transporte de radiación electromagnética a través de un medio continuo. Esta fenomenología es estudiada desde diferentes enfoques como por ejemplo en física médica[1], física estelar, ingeniería mecánica[2], transferencia de calor[2], astrofísica, tele-detección[3], física atmosférica[4], sensoramiento remoto. Los fenómenos de absorción y *scattering* producidos en un medio son denominados propiedades radiativas

de un medio y proporcionan información importante sobre la composición y dinámica del mismo. El coeficiente de absorción puede discriminar diferentes componentes cromóforos, partículas que absorben radiación electromagnética de una determinada longitud de onda y que son responsables de las sustancias de coloración de un medio. El coeficiente de *scattering* puede ser usado para caracterizar la forma, el tamaño y la concentración de los diferentes componentes de *scattering* presentes en el medio[5]. Por motivos estrictamente pedagógicos,

* mabet99@yahoo.com

mostramos el desarrollo unidimensional de la ecuación de transferencia radiativa y lo resolvemos mediante el uso de los métodos de diferencias finitas y de ordenadas discretas cuyos resultados son comparados con los obtenidos mediante el método de Monte Carlo.

La ecuación de transferencia radiativa

La ecuación de transferencia radiativa (ETR) es obtenida de la ecuación de transporte de Boltzmann[5,6] y describe el paso de las partículas neutras en un material. La ETR se describe como

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} I + \hat{\Omega} \cdot \nabla I + \sigma_t I = Q \quad (1)$$

$$Q = \int_{\Omega} \int_0^{\infty} \sigma_s I dE' d\Omega + S$$

$$I = I(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t)$$

$$\sigma_t = \sigma_t(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) \quad \sigma_s = \sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, \hat{\Omega}, t)$$

$$S = S(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t)$$

donde I es la intensidad de la radiación, σ_t es el coeficiente de extinción total dado por $\sigma_t = \sigma_s + \sigma_a$, siendo σ_a el coeficiente de absorción y σ_s el coeficiente de *scattering*, S es una o más fuentes de partículas dentro del medio, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ es la posición, E es la energía, $\hat{\Omega}$ es el ángulo sólido de radio unitario en la dirección de propagación de la partícula y t es el tiempo.

En una geometría cartesiana para un medio unidimensional en régimen permanente, considerando simetría azimutal, sin dependencia espectral, para un medio isotrópico, sin fuentes tiene la forma

$$\mu_l \frac{dI_l}{dx_l} + \sigma_l I_l = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=1}^{L_0} \sigma_s w_m I_m \quad (2)$$

$$l = 1, 2, 3, \dots, L_0; \quad 0 \leq x \leq L \quad \text{y} \quad -1 \leq \mu_l \leq 1$$

donde x es la variable espacial, μ_l es el coseno de la dirección l con el eje x , w_l es el peso de la cuadratura asociada a la dirección l , L_0 es el número total de direcciones en que se divide el dominio angular de la radiación, l indica una dirección.

La Fig.1, representa el problema físico a resolver en una placa larga de espesor L_x , mientras que, la Fig.2 muestra la posición de la fuente de intensidad I_b y dos detectores, uno de reflexión, D^r y el otro de transmisión D^t .

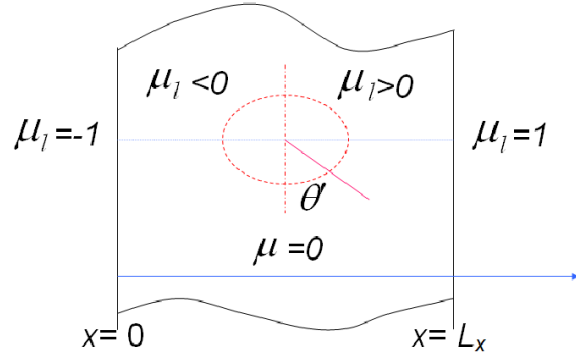


Figura 1: Medio en una dimensión.

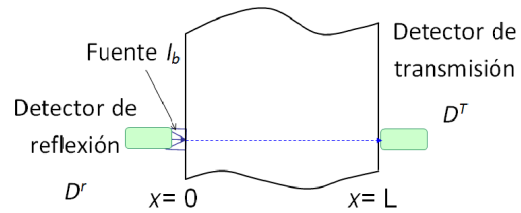


Figura 2: Posición de la fuente y los detectores.

Solución analítica de la ETR

La Ec.(2) es una ecuación diferencial no lineal que no tiene solución analítica. Pero, en el caso de que el medio fuera muy absorbente σ_s puede ser despreciado, entonces se obtiene[7-9]

$$\frac{dI}{dx} + \sigma_a I(x) = 0 \quad . \quad (3)$$

La solución analítica para la Ec.(3) está dado por

$$I(x) = I(0) \exp[-\sigma_a x] \quad (4)$$

donde $I(0)$ es la radiación incidente.

El método de Monte Carlo

Bajo el nombre de "método de Monte Carlo" se agrupan un conjunto de procedimientos que analizan distribuciones de variables aleatorias tratando de simular una experiencia real. La importancia actual del método Monte Carlo se basa en que este método da solución a una gran variedad de problemas físico-matemáticos permitiendo un análisis, a través de simulaciones con muestreo estadístico en una computadora, de los experimentos reales antes de realizarlos[10]. Además, las aplicaciones de este método inicialmente han surgido en

las matemáticas como método de solución para ecuaciones diferenciales parciales, integrales multidimensionales, matrices, redondeo aleatorios y las conocidas ecuaciones de Schrödinger y Laplace. Sus aplicaciones actuales se extienden a diversos campos científicos y técnicos tan variados como la física estadística, biología molecular[11], genética [11], redes de información, telecomunicaciones y finanzas[10]. La aplicación en usos específicos[12] se cuenta a los cálculos de la magnitud de emisiones de rayos cósmicos, tamaño crítico de los reactores nucleares, difusión y movimiento browniano, difusión de líquidos a través de sólidos, propiedades de retículos poliméricos, características de los recipientes necesarios para el transporte de neutrones, y dos aplicaciones de reciente interés tienen relación con las técnicas radiográficas y con la obtención de materiales poliméricos para aplicaciones biológicas.

La principal desventaja del método de Monte Carlo es la lentitud con la que converge. La rapidez de convergencia depende de la relación σ/\sqrt{M} , donde σ es la varianza y M el número de trayectorias. Para acelerar la convergencia se disminuye el valor de σ o se incrementa el número de trayectorias. Al incrementar el número de trayectorias se incrementa el tiempo de cálculo computacional y el uso de generadores de números aleatorios más sofisticados de modo que las secuencias numéricas sean de baja discrepancia.

El método de Monte Carlo no resuelve explícitamente la ETR. La interacción de la radiación con la materia es probabilística, σ_a está relacionada a la probabilidad del material de absorber una partícula y σ_s a la probabilidad de esparcirla, *scattering*. El método de Monte Carlo simula explícitamente el fenómeno físico, siguiendo a las partículas individuales desde su creación en una fuente hasta el término de su historia ya sea al ser absorbido o esparcido por el medio y recogido por el detector de salida[12].

Considerando un medio isotrópico, en cualquier punto del medio se cumple que:

1. La partícula que es absorbida, no es esparcida, por tanto se termina su historia.
2. La partícula esparcida, que no es absorbida, ella puede ser esparcida en diferentes ángulos. La probabilidad que la partícula sea esparcida hacia adelante, será la misma que sea esparcida hacia atrás.

El programa para los cálculos respectivos está en el apéndice al final del artículo.

Solución de la ETR con el método de diferencias finitas y de las ordenadas finitas

El dominio espacial es dividido en i_{\max} intervalos regulares de longitud Δx , cada intervalo es denominado

segmento espacial E_i , ver Fig.3, i indica un segmento dentro del dominio espacial. La longitud total del medio, L_x , es igual a $L_x = \Delta x I_{\max}$.

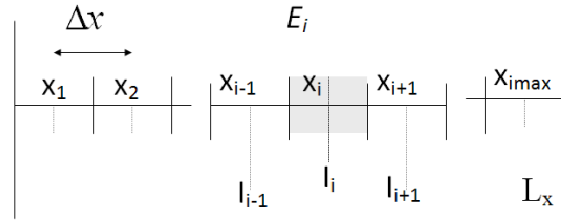


Figura 3: Discretización del dominio espacial.

Considerando los flujos Iw_i e Ie_i en los puntos de frontera del segmento E_i como se observa en la Fig. 4, la variación de la intensidad ΔI en E_i , puede ser calculada, así como la intensidad I_i en el centro de cada E_i de la forma

$$\Delta I = Ie_i - Iw_i \quad \Delta x = x_i - x_{i-1}$$

$$I_{l,i} = \frac{Ie_{l,i} + Iw_{l,i}}{2} \quad (5)$$

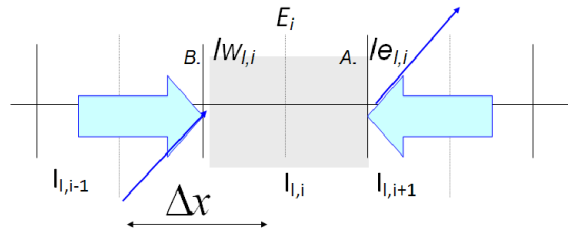


Figura 4: Aproximación por diferencias finitas.

La discretización del dominio angular, Fig. 5, es hecha en las direcciones Ω_l alrededor del eje x , ella es representada por los cosenos directores μ_l y sus respectivos pesos w_l con $l = 1, 2, \dots, L_0$. En la tabla 1, el valor μ_l está dentro del intervalo $-1 \leq \mu_l \leq 1$. Entonces el valor positivo o negativo de μ_l describe dos cuadrantes, Fig.6, en los cuales la radiación puede ser propagada o esparcida[13,14].

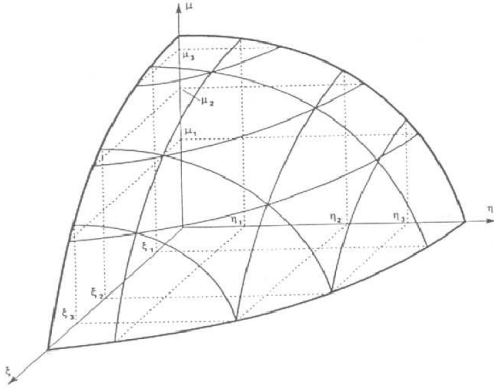


Figura 5: Discretización del dominio angular en el primer cuadrante.

Aproximando las derivadas por diferencias finitas en la Ec.(2) y ayudados de la Ec.(5), obtenemos

$$\mu_l \frac{\Delta I_{l,i}}{\Delta x} + \sigma_{l,i} I_{l,i} = \mu_l \frac{I_{e_{l,i}} - I_{w_{l,i}}}{\Delta x} + \sigma_{l,i} I_{l,i} = Q_i. \quad (6)$$

Procedemos a calcular el valor de $I_{l,i}$ para cada cuadrante, comenzando con el **Cuadrante I** tenemos que $I_{l,i}$ va a ser desde I_w a I_e , luego de la Ec.(5) tenemos

$$I_{e_{l,i}} = 2I_{l,i} - I_{w_{l,i}}. \quad (7)$$

Reemplazando la Ec.(7) en la Ec.(6), obtenemos

$$I_{l,i} = \frac{2\mu_l I_{w_{l,i}} + \Delta x Q_i}{2\mu_l + \sigma_{t,i} \Delta x} \quad (8)$$

$$l = 1, 2, \dots, L_0 \quad i = 1, 2, \dots, i_{\max}.$$

Considerando las condiciones de frontera entre los elementos de áreas adyacentes, tenemos que si

$$i < i_{\max} \quad \text{entonces} \quad I_{w_{l,i+1}} = I_{e_{l,i}}. \quad (9)$$

Punto Número	Ordenadas μ_l	Pesos w_l
1	0.1372719	2.0122
2	0.5046889	2.1071
3	0.7004129	0.5990
4	0.8523177	1.1872
5	0.9809754	0.3778
6	-0.1372719	2.0122
7	-0.5046889	2.1071
8	-0.7004129	0.5990
9	-0.8523177	1.1872
10	-0.9809754	0.3778

Tabla 1: Discretización angular.

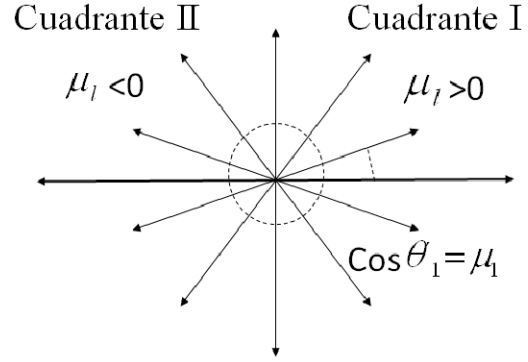


Figura 6: Cuatro cuadrantes descritos por los cosenos directores.

Cuadrante II para μ_l , tenemos que $I_{l,i}$ va desde I_e a I_w , luego obtenemos tres ecuaciones análogas al cuadrante I, dados por

$$I_{w_{l,i}} = 2I_{l,i} - I_{e_{l,i}} \quad (10)$$

$$I = \frac{-2\mu_l I_{e_{l,i}} + \Delta x Q_i}{-2\mu_l + \sigma_{t,i} \Delta x} \quad (11)$$

$$I_{e_{l,i-1}} = I_{w_{l,i}} \quad (12)$$

Para determinar I_i necesitamos de $Q_{l,i}$ y para calcular $Q_{l,i}$ necesitamos de I_i . Utilizando un algoritmo iterativo es posible calcular I_i y $Q_{l,i}$. Sea h un contador de iteraciones reescribimos

$$I_{l,i}^h = \frac{2|\mu_l| I_{w_{l,i}}^h + \Delta x Q_i^{h-1}}{2|\mu_l| + \sigma_{t,i} \Delta x}, \quad (13)$$

$$\text{con } Q_i^{h-1} = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=1}^{L_0} \sigma_{s,i} w_m I_{m,i}^{h-1},$$

$$l = 1, 2, 3, \dots, L_0$$

El programa que corresponde a este método está disponible en un apéndice al final de artículo.

Resultados

Aplicamos los dos métodos mencionados anteriormente en tres casos que enumeramos a continuación.

Ejemplo 1 Se considera un medio homogéneo de 10 cm de longitud con la geometría de la Fig. 2, con una fuente de luz de $I_0 = 10,000$ fotones en un extremo y un detector de fotones en el otro. La tabla 2 muestra el número de partículas que llegan al detector, calculado a través de una solución analítica, numérica y por el método de Monte Carlo, para un medio absorbente puro con diferentes valores de σ_a .

Número de fotones detectados			
σ_a	Analítica	Numérica	Monte Carlo
0.01	9048	9048	9044
			9025
			9055
0.05	6065	6007	6078
			6010
			6024
0.1	3679	3607	3653
			3731
			3670
0.2	1353	1299	1321
			1320
			1330
0.5	67	59	68
			62
			60
0.8	3	3	6
			5
			4

Tabla 2: Resultados obtenidos simulando el ejemplo 1.

La tabla 3 muestra los resultados de la solución numérica y el método de Monte Carlo, para un medio con diferentes valores de σ_s y σ_a .

Número de fotones en el detector			
σ_a	σ_s	numérico	Monte Carlo
0.5	0.01	54	56
			75
			59
0.1	0.05	2328	2354
			2388
			2358
0.2	0.1	524	574
			604
			572
0.2	0.2	209	242
			248
			239
0.1	0.5	38	38
			42
			40
0.05	0.8	4	5
			3
			2

Tabla 3: Resultados del ejemplo 1 con absorción y esparcimiento.

Ejemplo 2 Para un medio heterogéneo formado por tres capas, de modo que los extremos tienen las mismas propiedades y son diferentes a la del medio, Fig. 7. Se presenta los flujos de los fotones obtenidos al atravesar el medio mapeando las trayectorias en cada centímetro de las mismas, Fig. 8, estos resultados fueron calculados con el método de diferencias finitas, de ordenadas discretas y el de Monte Carlo. En la Fig. 9, se muestra la evolución del flujo de fotones respecto a las trayectorias recorridas calculado por el método de diferencias finitas y ordenadas discretas por cada iteración.

Ejemplo 3 El sistema es el mismo del ejemplo 1, un medio absorbente puro, el problema se resuelve con números de historias, NH, diferentes. Los resultados mostrados en la table 4 se usaron NH iguales a 10^4 , 10^5 , 10^6 y 10^7 . La Fig. 10 muestra el tiempo de cálculo computacional.

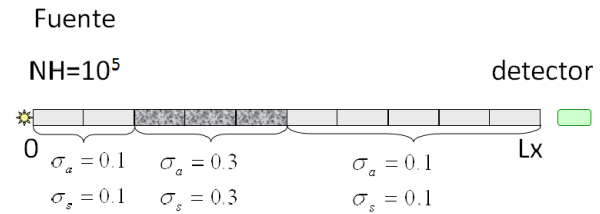


Figura 7: Medio heterogéneo considerado en el ejemplo 2.

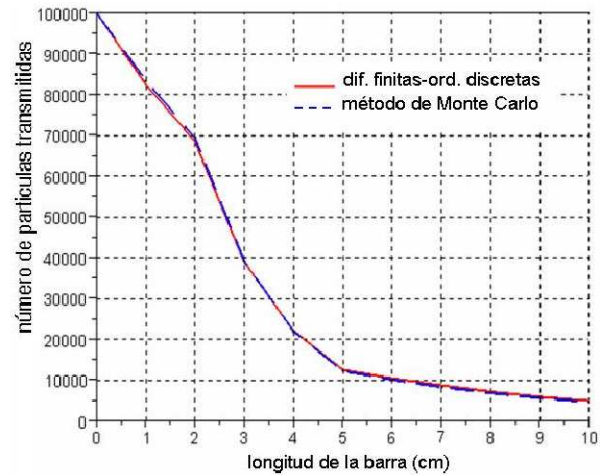


Figura 8: Medio heterogéneo analizado del ejemplo 2.

El error porcentual cuadrático medio es definido como

$$EP = 100 \% \times \sqrt{\frac{1}{E} \sum_{e=1}^E \left(\frac{\phi_{\text{exacto}} - \phi_{e,\text{calculado}}}{\phi_{\text{exacto}}} \right)^2} \quad (14)$$

donde e indica el valor calculado en cada ejecución del programa por el método de Monte Carlo y E es el número total de ejecuciones para el cálculo del EP.

En la Fig.11, se presenta el error porcentual cuadrático medio para el detector situado a la salida de un medio con $\sigma_a = 0.8$, calculado para 4 ejecuciones del método de Monte Carlo, $\phi_{e,calculado}$ con diferentes valores de NH, en relación a la solución analítica, valor exacto. Se considera que $E = 10$ para cada valor de NH. De la Fig.11 se observa una relación entre el EP y el número de historias dada por

$$EP = 1500/\sqrt{NH}$$

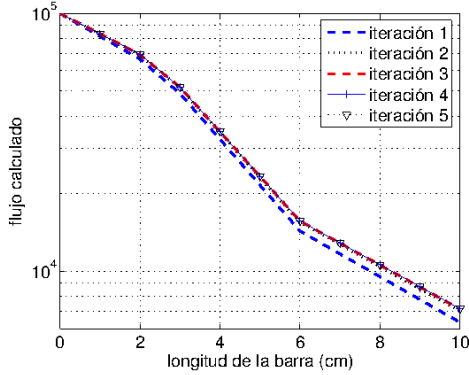


Figura 9: Aproximación de la solución en el ejemplo 2, por diferencias finitas en cada iteración.

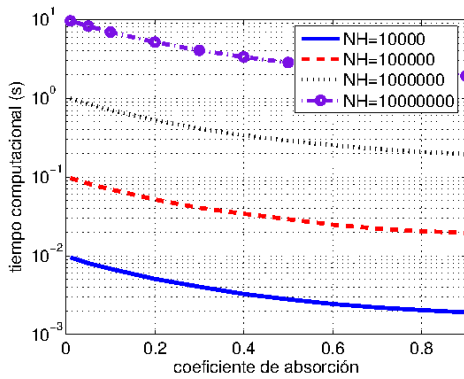


Figura 10: Tiempo de cálculo computacional para diferentes valores de NH.

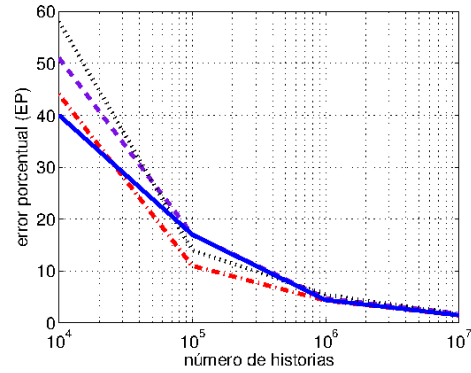


Figura 11: Error porcentual para diferentes valores de NH.

Agradecimientos

Los autores agradecen al profesor Máximo Poma Torres por las sugerencias brindadas para la realización de este trabajo.

Conclusiones

Los programas presentados en este trabajo fueron realizados en el SCILAB, un software desarrollado por el *Institut national de recherche en informatique et en automatique*, INRIA, de Francia[15,16].

En el método de Monte Carlo la probabilidad de que la partícula retroceda o avance por *scattering* en un medio isotrópico es la misma. Para determinar la probabilidad por *scattering* hacemos una aproximación, presentada en el programa 1, que proporciona buenos resultados.

Los resultados obtenidos por el método de Monte Carlo y el método numérico son similares. Lo cual nos induce a continuar el análisis en dos dimensiones y resolver problemas de tomografía óptica[17] en futuros trabajos.

σ_a	Solución analítica	Monte Carlo NH= 10 ⁴			Monte Carlo NH= 10 ⁵			Monte Carlo NH= 10 ⁶			Monte Carlo NH= 10 ⁷		
0.01	9048	9044	9025	9055	9057	9062	9065	9048	9049	9047	9048	9049	9049
0.05	6065	6078	6010	6024	6076	6092	6041	6068	6065	6078	6066	6067	6065
0.1	3679	3653	3731	3670	3667	3676	3667	3689	3679	3682	3679	3678	3682
0.2	1353	1321	1320	1330	1353	1343	1351	1353	358	1352	1354	1353	1353
0.5	67	68	62	60	66	71	68	66	68	69	67	68	67
0.8	3	6	5	4	3	3	2	3	3	4	3	3	3

Tabla 4: Resultados calculados para el sistema del ejemplo 1.

Apéndices

Programa usando el método de Monte Carlo.

```
clear; //problema de la radiación en un medio absorbente y esparcidor (scattering)
NH = 100000; //número de historias
Lx = 10; //longitud del dominio del medio de una dimensión en centímetros
//coeficiente de absorción, en cada cm, que forma el medio
ca=[0.1 0.1 0.3 0.3 0.3 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1];
//coeficiente de dispersión, en cada cm que forma el medio
cs=[0.1 0.1 0.3 0.3 0.3 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1];
P1 = 0.0321-0.1/(4*3.1416)*(1.0-cs+x^2/2-cs^3/6+cs^4/24-cs^5/120); // probabilidad de retorno
P2 = 1-exp(-ca-cs)-P1; //probabilidad de pérdida + retorno
De1 = zeros(Lx,1); //detector para el flujo transmitido
De2 = zeros(Lx,1); //detector para el flujo dispersado
for i = 1:NH
E = 1; H = 0;
  while H==0
    n = rand();
    if E==Lx & n>P2(E) then De1(E) = De1(E)+1; H = 1;
    elseif E>1 & n<=P1(E) then E = E-1;
    elseif E<Lx & n>P2(E) then E = E+1;
    else H = 1; De2(E) = De2(E)+1;
    end;
  end;
end;
De1(1)=NH-De2(1);
for i=2:Lx-1
  De1(i)=De1(i-1)-De2(i);
end
xgrid
xo=[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10];
yo=[NH De1(1) De1(2) De1(3) De1(4) De1(5) De1(6) De1(7) De1(8) De1(9) De1(10)];
plot2d(xo,yo);
```

Programa usando el método de diferencias finitas y ordenadas discretas.

```
clear;
Lx = 10; // longitud del medio
no = 20; vx = Lx/no; // número de intervalos, variación en x
lo = 10; // discretización angular, um cosenos directores, w peso de cada coseno
NH = 100000; // fuente
um = [0.1373,0.5047,0.7004,0.8523,0.981,-0.1373,-0.5047,-0.7004,-0.8523,-0.981];
w=[1.0061,1.0536,0.2995,0.5936,0.1889,1.0061,1.0536,0.2995,0.5936,0.1889];
itemax = 20; // iteracción máxima
//coeficiente de absorción
ca=[0.1 0.1 0.1 0.1 0.3 0.3 0.3 0.3 0.3 0.3 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1];
//coeficiente de scattering
cs=[0.1 0.1 0.1 0.1 0.3 0.3 0.3 0.3 0.3 0.3 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1];
B = ca+cs; // coeficiente de extinción total
//Inicializando los datos
Qt = zeros(no,1); // Ganancia por dispersión
lw = zeros(no,1);le = zeros(no,1); //las fronteras oeste y este
l = zeros(no,1); //flujo en el centro de cada elemento de línea
for int = 1:itemax
  De1 = zeros(no,1); //Detector para el flujo transmitido
```

```

De2 = zeros(no,1); //Detector para el flujo dispersado
Q = zeros(no,1);
for iu = 1:lo
    lw(1) = NH;
    le(no) = 0;
    if um(iu)>0 then
        for i = 1:no
            l(i) = (vx*Qt(i)+(2*lw(i))*um(iu))/(2*um(iu)+vx*B(i));
            if l(i)<0 then l(i) = 0; end;
            le(i) = 2*l(i)-lw(i);
            if i<no then lw(i+1) = le(i);end;
            Q(i)= w(iu)*l(i)+Q(i);
        end;
        De1 = le;
    elseif um(iu)<0 then
        for i = no:-1:1
            l(i)= (vx*Qt(i)-(2*le(i))*um(iu))/(-2*um(iu)+vx*B(i));
            if l(i)<0 then l(i) = 0;end;
            lw(i) = 2*l(i)-le(i);
            if i>1 then le(i-1) = lw(i);end;
            Q(i) = w(iu)*l(i)+Q(i);
        end;
        De2 = lw;
    end;
end; //fin de las direcciones
for i = 1:no
    Qt(i) = (cs(i)*Q(i)*0.25)/%pi;
end;
end; // fin de las iteraciones
xgrid
x=[ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10];
y=[ NH De1(2) De1(4) De1(6) De1(8) De1(10) De1(12) De1(14) De1(16) De1(18) De1(20)];
plot2d(x,y)

```

Referencias

- [1] R. Elaloufi, S. Arridge, R. Pierrat, y R. Carminati; Light propagation in multilayered scattering media beyond the diffusive regime; *Appl. Opt.* **46**, 2528 (2007).
- [2] F.P. Incropera, y D.P de Witt; *Fundamentos de Transferencia de Calor*; Cuarta edición, John Wiley & Sons, New York (1996).
- [3] S. Gandia y J. Melia; *La Teledetección en el seguimiento de los fenómenos naturales*; Recursos Renovables: Agricultura, pp. 85-94, Universidad de Valencia, Valencia (1991).
- [4] D. Plinio, P. Acevedo y E. Garrido; Un modelo de radiación UV desde medidas espectralradiométricas, *Rev. Charlas de Física*, **18**, 33 (2004).
- [5] J.J. Duderstadt y W.R. Martin; *Transport theory*, John Wiley & Sons, New York (1979).
- [6] F.M. Modest; *Radiative heat transfer*, Elsevier Science, California (1993).
- [7] M.J. Berrocal, N.C. Roberty, A.J. da Silva y J. Bravo, Inverse radiative transfer problems in two-dimensional participating media, *Inverse Problems in Science and Engineering* **12**, 103 (2004).
- [8] S. Chandrasekhar; *Radiative transfer*, Dover Publications, New York, (1960).
- [9] W.A. Fiveland; Discrete ordinates solution of the radiative transfer equation for rectangular enclosure, *J. Heat transfer*, **106** 699 (1984).
- [10] P. Saveedra y V.H. Ibarra; El método Monte Carlo y su aplicación a finanzas. Primer Coloquio de

Matemáticas de la UAM-Iztapalapa. Enero 2007, docencia.izt.uam.mx/psb/coloq.pdf.

- [11] J. González, M. Pérez y J. Méndez, Simulación del esparcimiento de la luz en medios biológicos mediante el método de Monte Carlo, Ingeniería Revista Académica **12**, 57 (2008).
- [12] X-5 Monte Carlo Team, MCNP; A general Monte Carlo N-particle transport code, Version 5, Volume I: Overview and Theory, Los Alamos National Laboratory, (2003), kevan.craufurd.org/MCNP5.pdf.
- [13] W.A. Fiveland, Discrete ordinates methods for radiative heat transfer in isotropically and anisotropically scattering media, J. Heat Transfer **109**, 809 (1987).
- [14] K.D. Lathrop, Ray effects in discrete ordinates equation, Nucl. Sci. Eng. **32** 357 (1986).
- [15] The Scilab Time, SCILAB 5.2, www.scilab.org.
- [16] A. Alfonso y C. Valero, Fundamentos de Scilab y aplicaciones, versión 0.1, GNU Free Software Foundation (2004).
- [17] S.R. Arridge, Optical tomography in medical imaging, Inverse Problems **15**, R41 (1999).