Cálculo de áreas de superficies irregulares aplicando los software Matlab® y Autocad®

Recepción: Agosto de 2007 / Aceptación: Noviembre de 2007

[1] Eduardo Raffo Lecca
[2] Oswaldo Rojas Lazo
[3] Jorge Rojas Rojas

RESUMEN

El presente artículo plantea determinar el área de una superficie irregular, donde se conoce un conjunto de coordenadas del perímetro de la superficie. El área de la superficie se determina aplicando los métodos de integración numérica y de diseño asistido por computador, los software que se utilizan para efectuar los cálculos son: Matlab® 2006 y Autocad® 2007 respectivamente. El método de interpolación segmentaría cúbica o splines es la que más se aproxima al contorno del perímetro de la superficie irregular porque une un conjunto de puntos mediante splines. La exactitud del cálculo del área de la superficie depende del número de puntos y del método a usar. Cuando se tiene definido la curva perimétrica, la aplicación de los métodos CAD en el cálculo de áreas de superficies irregulares es directa y su resultado es confiable.

Palabras clave: Área de superficies irregulares, cálculo numérico para áreas, cálculo de áreas con splines.

CALCULATION OF AREAS OF IRREGULAR SURFACES IMPLEMENTING THE SOFTWARE AUTOCAD® AND MATLAB®

ABSTRACT

This article raises determine the area of an irregular surface, where is known a set of coordinates of the perimeter of the area. The surface area was determined applying numerical integration and computer aided design methods, the software to be used for the calculations are: Matlab® and AutoCAD® respectively. The segment cubic interpolation method or splines is the most close to the perimeter boundary of the irregular surface because binds a set of points by splines. The accuracy of calculating the surface area depends on the number of points and the method to use. When the curve is defined perimeter, the application of methods in the calculation of CAD areas of irregular surfaces is direct, and its result is reliable.

Key words: area of irregular surfaces, areas for numerical calculation, calculation of areas with splines.

INTRODUCCIÓN

Muchos problemas de ingeniería necesitan evaluar áreas de superficies irregulares como: la superficie de un lago, sección transversal de un río, la fuerza neta ejercida por el viento no uniforme, afloramiento de yacimientos mineros, etc. que pueden ser representados por el valor de la integral definida $_a{}^b f(x)dx$, geométricamente esta integral representa el área limitada por la curva y = f(x), entre los límites "a" y "b". Si se conoce analíticamente f(x), la integral puede evaluarse por los métodos del cálculo integral. En los casos donde se conoce un conjunto de valores del perímetro de la superficie, la integral puede evaluarse por métodos numéricos y gráficos.

Para la solución de estos problemas, la superficie real es dividida en superficies menores de formas conocidas (triángulos, rectángulos y trapecios). Los tramos que se encuentran próximos al contorno no cubrirán toda el área real de la superficie irregular. Para tener una mayor aproximación de cálculo se debe utilizar un método apropiado y una mayor cantidad de datos (cuanto mayor sea el número de divisiones, la solución será más exacta).

Con la ayuda de los satélites y la tecnología GPS (Global Position System Sistema de posicionamiento Global), la toma de datos de puntos del perímetro de una superficie es relativamente sencilla dependiendo tan sólo del costo.

Si se tiene definida la curva del perímetro de la superficie irregular, la aplicación de los métodos CAD (Computer Aided Design Diseño asistido por computadora) es directa y se circunscribe en la aplicación de un sólo comando.

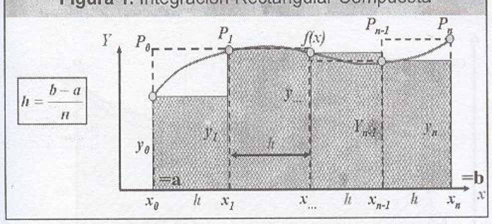
Las fotografías tomadas vía satélite o por medio de aviones son gráficos raster que debido a sus características geométricas y de ajuste radiométrico deben ser sometidas a correcciones de perspectiva, luego usando un software apropiado se digitalizan, para poder resolver el cálculo de área de la superficie mediante los métodos numéricos o gráficos.

Existen varias formas para el cálculo de las superficies irregulares, los más usados son:

1. Integración numérica.
2. Diseño asistido por computadora.

(1) Ingeniero Industrial. Profesor del Departamento de Sistemas e Informática UNMSM
E-mail: eraffol@unmsm.edu.pe.
(2) Ingeniero Industrial. Profesor del Departamento de Diseño y Tecnología Industrial UNMSM
E-mail: orojasla@hotmail.com
(3) Bachiller en Ingeniería Mecánica.
E-mail: jorger2@hotmail.com

Figura 1. Integración Rectangular Compuesta



Fuente: Elaboración Propia

3. Análisis por elementos finitos (Finite Element Analysis - FEA)
4. Monte Carlo.

Para este artículo sólo se profundizan los dos primeros mostrando los resultados del cálculo del área de la superficie de un lago.

CÁLCULO DEL ÁREA DE UNA SUPERFICIE POR INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Los métodos numéricos usados para la integración numérica se basan en la fórmula de integración de Newton Cotes, estas aplican la estrategia de reemplazar una función complicada en un polinomio de aproximación ($P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$) que sea fácil de integrar.

Las fórmulas de Newton Cotes pueden ser cerradas (usan ambas fronteras P0-P1) y abiertas (sólo usan puntos intermedios). Las variantes de las fórmulas cerradas son: la regla rectangular, la regla trapezoidal y la regla de simpson; cada una de éstas presenta una forma simple y otra compuesta; para el caso polinomial se usan las reglas compuestas.

1. **Regla rectangular compuesta [1]**
   Si sobre la curva de la función f(x) se toman los puntos $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$, y se trazan segmentos paralelos al eje "x", el área encerrada por los rectángulos formados por sus respectivas coordenadas ($y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$) y su intervalo "h" está dada por A_R como se muestra en la figura 1.

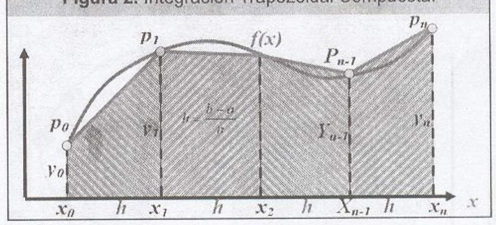
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b P_n(x)dx + \int_a^b E_T(x)dx \quad E_T(x) = h^{n+1}s(s-1)(s-2) \quad (s-n)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)}$$

Para algún $f \in [a,b]$ $\quad A_R = h\,(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})$.

El algoritmo en Matlab® para la función f(x)=**"f"** en un intervalo "h", se muestra a continuación [2]:

```
function I = rect (f, h)
I=h*(sum(f)-f(end));
```

Figura 2. Integración Trapezoidal Compuesta.



Fuente: Elaboración Propia

2. **Regla trapezoidal compuesta [3]**
   Si sobre la curva de la función f(x) se trazan las cuerdas P_0P_1, P_1P_2, ..., $P_{n-1}P_n$, P_n, (figura Nº 2) entonces el área encerrada por los trapecios estará dada por:

$$A_T = h\left(\frac{y_0 + y_1}{2}\right) + h\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) + h\left(\frac{y_2 + y_3}{2}\right) + \ldots + h\left(\frac{y_{n-1} + y_n}{2}\right)$$

$A_T = h\,[\tfrac{1}{2}(y_0 + y_n) + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}]$ Regla trapezoidal simple

   Es evidente que mientras menor sea el intervalo "h" y más plana la curva, será mejor la aproximación al área requerida. Si se requiere mayor exactitud cada intervalo se divide en dos partes obteniéndose la trapezoidal polinomial compuesta:

$$A_T = h\left(\frac{y_0 + y_1}{2}\right) + \ldots + \frac{h}{4}\left(\frac{y_{n-1} + y_k}{2}\right) + \frac{h}{4}\left(\frac{y_k + y_m}{2}\right) + \frac{h}{4}\left(\frac{y_m + y_l}{2}\right) + \frac{h}{4}\left(\frac{y_l + y_n}{2}\right)$$

   El algoritmo en Matlab® para la función f(x)= *fu* en un intervalo "h" para la fórmula trapezoidal compuesta se muestra en la figura 3.

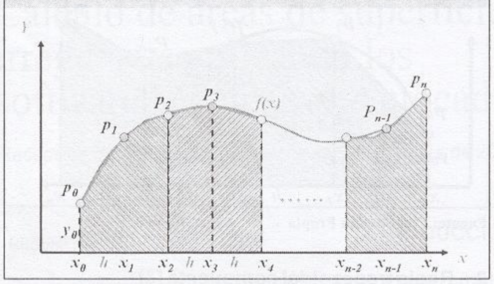
3. **Regla de Simpson 1/3 compuesta [3]**
   Si sobre la curva de la función f(x) se pasan curvas de forma cuadrática (parábola) por cada

Figura 3. Algoritmo del Trapecio Compuesto

```
function I=trapz_ug(fu,a,b,n)
n=n;
h=(b-a)/n;
x=a+(0:n)*h;
f=feval(fu,x);
I=h/2*(f(1)+ f(n+1));
if n>1 I=I+h*sum(f(2:n)); end
h2=(b-a)/100;
xc=a+(0:100)*h2;
fc=feval(fu,xc);
plot(xc,fc,'r'); hold on
title('Regla Trapezoidal'); xlabel('X'); ylabel('Y');
plot(x,f);
plot(x,zeros(size(x)))
for i=1:n; plot([x(i),x(i)],[0,f(i)]); end
hold on
```

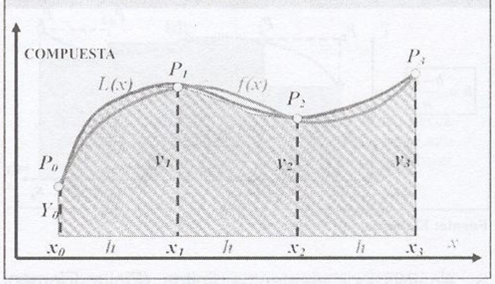
Fuente: Análisis numérico y visualización gráfica con Matlab-S. Nakamura [4]

Figura 4. Regla de Simpson de 1/3 Compuesta



Fuente: Elaboración Propia

Figura 5. Regla de Simpson de 3/8



Fuente: Elaboración Propia

tres puntos consecutivos ($P_0P_1P_2$, P_2P_3 P_4, ..., $P_{n-2}P_{n-1}P_n$) como se muestra en la figura 4, la ecuación de cada tramo tendrá la forma $y = ax^2 + bx + c$, y el área limitada por la parábola, el eje x, y las ordenadas $x = x_0$ y $x = x_2$ es:

4. **Regla de Simpson 3/8 compuesta [3]**
De manera similar a la regla de integración polinomial de Simpson 1/3 compuesta, en vez de utilizar curvas cuadráticas se utilizan curvas cúbicas (figura 5). Es útil cuando el número de segmentos es impar

$$Is_{3/8} = \frac{3}{8}h\left[y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 3y_3\right] \qquad h = \frac{b-a}{3}$$

El algoritmo en Matlab para la función f(x) en un intervalo "h" para la fórmula compuesta de Simpson de 1/3 y 3/8 (combinadas) se observa en la figura 6.

Nota [4]: Si se desea una estimación con cinco segmentos, una alternativa sería combinar las reglas de Simpson de 3/8 y 1/3, donde h = (b-a)/3.

Splines o trazadores cúbicos
La interpolación segmentaría con splines es de uso generalizado al trabajar con CAD, gráficos por computadora y representación de gráficos que usan curvas suavizadas. La interpolación se realiza mediante polinomios de grado tres llamados splines o trazadores cúbicos, que se definen en cada uno de los subintervalos (x_k, x_{k-1}) formados por las abscisas de los puntos (x_i, y_i) a interpolar como se muestran en la figura 6.

Si sobre la curva de la función f(x), se toma segmentos consecutivos [P_0P_1], [P_1P_2],..., [$P_{n-1}P_n$], los splines formados están definidos por polinomios cúbicos diferentes. Si el polinomio cúbico se representa por P(x) en el intervalo [P_iP_{i-1}], la función se puede expresar por la expresión mostrada en la figura 6.

CÁLCULO DEL ÁREA DE UNA SUPERFICIE POR MÉTODO CAD

Teniendo como dato un conjunto de puntos (coordenadas rectangulares) del contorno de una superficie, el cálculo del área usando los métodos CAD se desarrollan siguiendo dos etapas generales:

Construir la curva perimétrica de la superficie a partir de un conjunto de puntos de su perímetro. Existen dos formas generales:

a) Spline directo: Con los puntos dato y el comando respectivo a *spline* en el software Autocad® 2007, se grafican los segmentos curvos usando coordenadas relativas (@x, y), para cerrar la figura se utiliza la opción "*close*" como se muestra en la figura 7, la unión de los puntos son segmentos curvos cuya curvatura dependerá del grado de refinamiento.
b) Polinomio refinado: Con los puntos dato y el comando respectivo a *polilínea* en el software autocad@ 2007 se grafican los segmentos de la

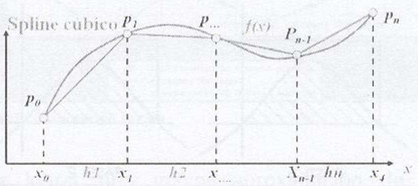
Figura 6. Algoritmo para las Fórmulas Compuestas de Simpson 1/3 Y 3/8.

```
function I=simpscomp(fd,h)
n=length(fd)-1;
if n==1,
   fprint('los datos tienen sólo un intervalo'), return;
end
if n==2,
I=h/3*(fd(1)+4*fd(2)+fd(3));
   return; end
if n==3    I=3/8*h*(fd(1)+3*fd(2)+3*fd(3)+fd(4));
   return; end
I=0;
if 2*floor(n/2)~=n,
   I=3/8*h*(fd(n-2)+3*fd(n-1)+3*fd(n)+fd(n+1));
   m=n-3
else
   m=n;
end
I=I+(h/3)*(fd(1)+4*sum(fd(2:2:m))+fd(m+1));
if m>2, I=I+(h/3)*2*sum(fd(3:2:m));
end
```

Fuente: Análisis numérico y visualización gráfica con Matlab-S. Nakamura [4]

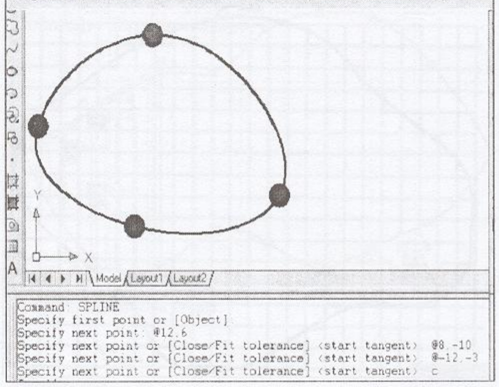
Figura 6. Splines de Grado 3

$$P(x) = \begin{cases} P_0P_1(x)\ldots \in (P_0, P_1) \\ P_1P_2(x)\ldots \in (P_1, P_2) \\ \ldots \\ P_nP_{n-1}(x)\ldots \in (P_{n-1}, P_n) \end{cases}$$



Fuente: Interpolación con trazadores o splines [5] y [7]

Figura 7. Gráfica del contorno de una superficie con Splines



Fuente: Elaboración propia.

curva usando coordenadas relativas (@x, y) y para finalizar el gráfico se escoge la opción *"close"*.

El polígono formado debe ser editado activando el comando "Pedit" y escogiendo la opción ajustar (fit) obteniendo un contorno mas suavizado como se muestra en la figura 8.

Cálculo del área de la superficie de la curva generada

Si se tiene definido el contorno de la superficie, el cálculo del área se obtiene con la aplicación del comando "area" y la selección del contorno como se muestra en la figura 9.

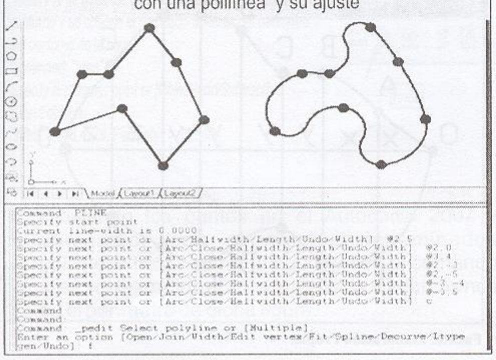
CÁLCULO DEL ÁREA DE UNA SUPERFICIE APLICANDO FEA

Para calcular el área de una superficie aplicando los métodos FEA, la superficie se divide en porciones de superficies (triángulos, rectángulos, etc.) obteniendo un enmallado el cual será rectificado según su posición (generalmente en la periferia y cerca de los vértices), la forma de superficie más utilizada es el triángulo y el rectángulo (figura 10). El área de la superficie se obtiene mediante un proceso recursivo de sumatoria de las áreas de los triángulos parciales.

CÁLCULO DE ÁREAS POR EL MÉTODO DE MONTE CARLO

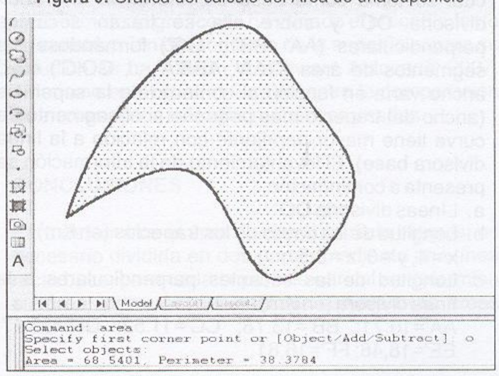
El método de Monte Carlo abarca una colección de técnicas que permiten obtener soluciones de problemas matemáticos o físicos por medio de pruebas aleatorias repetidas. Por lo general para calcular el área debajo de una curva (generada por una ecuación), se resuelve la integral de esa ecuación y se evalúa entre los límites definidos. Sin embargo, si la ecuación es muy compleja que dificulta o impide elaborar la integral entonces se aplica la técnica se muestra en la figura 11 y tiene los

Figura 8. Gráfica del contorno de una superficie con una polilínea y su ajuste



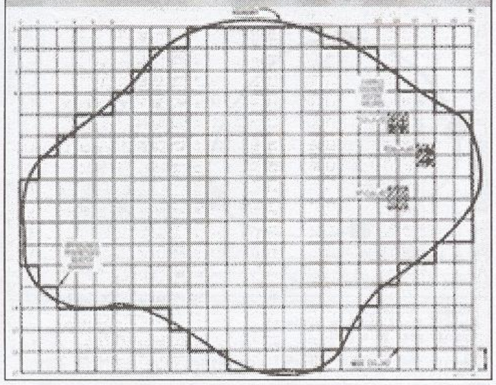
Fuente: Elaboración propia.

Figura 9. Gráfica del cálculo del Área de una superficie



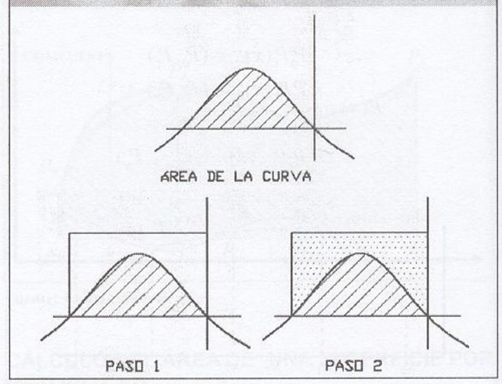
Fuente: Elaboración propia.

Figura 10. Cálculo del área de una superficie por fea.



Fuente: Modelos matemáticos y simulación numérica en arquitectura [8]

figura 11. Cálculo del área por el método de Monte Carlo



Fuente: Método Montecarlo [9].

siguientes pasos:

Paso 1: Dibujar un rectángulo que contenga en su interior el área a calcular. Las medidas del rectángulo (largo y ancho) son conocidas, por lo que el área de ese rectángulo también es conocida.

Paso 2: Colocar varios puntos al azar dentro del rectángulo, cuente los puntos que caen dentro del área de la curva

Paso 3: El cálculo del área bajo la curva será:
Área bajo la curva = Área del rectángulo * (Número puntos dentro del área de la curva / Total Puntos).

El error de esta aproximación es: 1/Raíz Cuadrada (Total Puntos).

EJEMPLO DE APLICACIÓN

Se tiene un lago que se desea determinar su superficie como se muestra en la figura 12. Para lo cual se toma como base de referencia una línea divisoria OO' y sobre ella se trazan secantes perpendiculares (AA', BB'... GG') formándose los segmentos de área (OAA', ABB'A',..., GO'G') cuyo ancho varía en función al contorno de la superficie (ancho del trapecio más pequeño si el segmento de curva tiene mayor pendiente con relación a la línea divisora base). El levantamiento de la información se presenta a continuación:

a. Líneas divisoria OO'.
b. Longitud de las bases de los trapecios (en Km).
   x = 4, y = 3, z = 3.5
c. Longitud de las secantes perpendiculares a la línea divisora (en Km).
   AA'=10,71; BB'=13.78; CC'=11.52; DD'=15.47; EE'=18,46; FF'=16,81

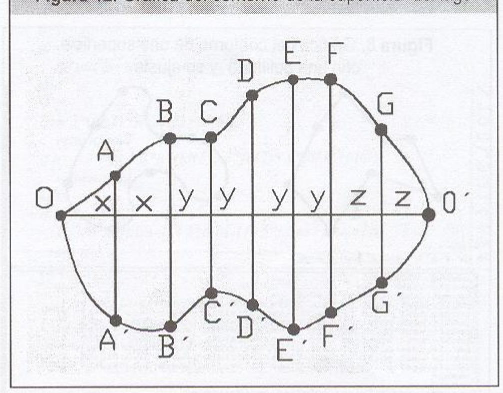
Con la ayuda de un instrumento GPS fácilmente se puede determinar la longitud y latitud correspondiente a cada punto. A partir de los datos anteriores se construye la siguiente tabla:

	O	A	B	C	D	E	F	G	O'
X	0	4,0	8,0	11,0	14,00	17,00	20,0	23,5	27,0
Ysup.	0	2,955	5,6736	5,76	8,84	10	9,7596	6,289	0
Yinf.	0	-7,755	-8,1964	-5,76	-6,63	-8,46	-7,0504	-5,031	0

PROCEDIMIENTO DE LOS MÉTODOS EMPLEADOS

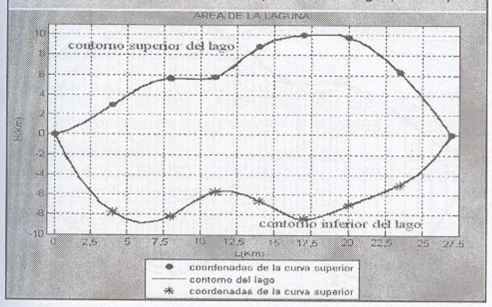
Métodos numéricos: se toma el conjunto de puntos dados como se muestra en la figura 13 y se divide en tres grupos de acuerdo a la longitud de los intervalos de las abscisas (bases de los trapecios).

Figura 12. Gráfica del contorno de la superficie del lago



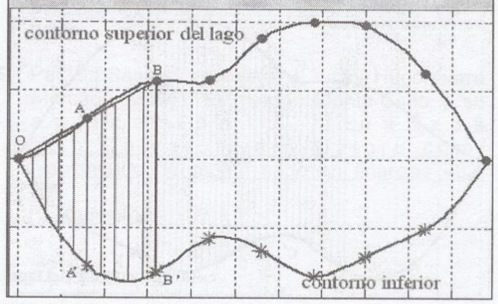
Fuente: Elaboración Propia.

Figura 13. Contorno de la superficie del lago (Matlab)



FUENTE: Elaboración Propia.

Figura 14. Área del primer tramo

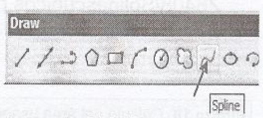


FUENTE: Elaboración Propia.

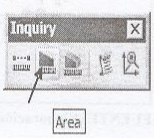
Para lograr una mayor aproximación de los polinomios, se realiza una interpolación segmentaría para hallar tres polinomios distintos para la curva del lado superior y otras tres para el lado inferior; estos polinomios son tomados de acuerdo al espaciamiento en la línea divisoria del lago y están de la siguiente manera: tramo 1 (OAB) figura 14, tramo 2 (BCDEF) figura 15 y el tramo 3 (FGO') figura 16, cada área se calcula por los métodos de integración numérica y el área total es la suma de las áreas de los tramos.

Método CAD: Para calcular el área se utiliza el software Autocad® 2007 y hay dos maneras de obtener el contorno de la superficie a calcular:

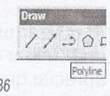
a. Aplicando Spline: Se activa la caja de herramientas "Draw", se hace clic en el ícono "Spline", se grafica la curva uniendo los puntos consecutivos mediante segmentos splines.



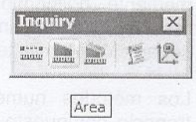
Command:" spline"
Specify first point or [Object]: hacer clic la pantalla
Specify next point: @4, 2.955
Specify next point or [Close/Fit tolerance] <start tangent>: @4, 2.7186
Y así sucesivamente. El último tramo se debe cerrar con la opción" Close"
Para determinar el área se activa la caja de herramientas "Inquiry" y se hace clic en el icono "*area*", se selecciona el contorno y se obtiene el resultado además del perímetro del contorno de la figura.
Command: "area"
Specify first corner point or [Object/Add/Subtract]: o
Select objects:
"Area" = 336.4279, Perimeter = 73.5101.



b. Dibujando los puntos en el Autocad® 2007 y uniéndolos con segmentos denominados polílineas hasta cerrar la figura y con el comando área se determina el área encerrada y además nos da el perímetro de dicha figura.



Command: "pline"
Specify first point or [Object]:
Specify next point: @4, 2.955
Specify next point or [Close/Fit tolerance] <start tangent>: @4, 2.7186
Completar todos los puntos y para finalizar el último tramo se debe cerrar con la opción "close".
Command: "area"
Specify first corner point or [Object/Add/Subtract]: o
Select objects:
"Area" = 321.9875, Perimeter = 72.1994
Para refinar la figura se utiliza el comando:
Command:"pedit"
Enter an option [Open/Join/Width/Edit vertex/Fit/Spline/Decurve/Ltype gen/Undo]: f
Command: "area"
Specify first corner point or [Object/Add/Subtract]: o
Select objects:
"Area" = 344.3792, Perimeter = 75.0459
Ver figura Nº 18.



RESULTADO DE LAS SOLUCIONES

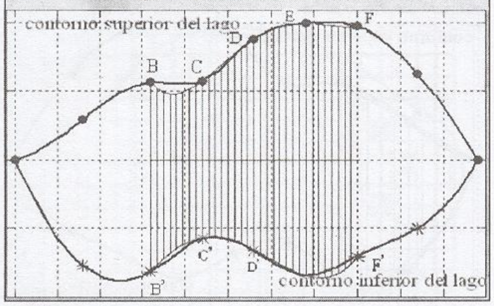
El problema se desarrolla aplicando algunas reglas para cada método, los resultados comparativos de los métodos usados se presenta en el cuadro 1. Para cada variante del método numérico se han determinado tres soluciones (variando el ancho del intervalo 'h'), dichos cálculos se ha efectuado usando el software Matlab® 2006.

Para el método gráfico se ha variado el procedimiento de construcción del contorno de la superficie, para su solución se ha usado el software Autocad® 2007. Asimismo en el cuadro 2 se muestra la comparación de errores de los métodos numéricos usados.

CONCLUSIONES

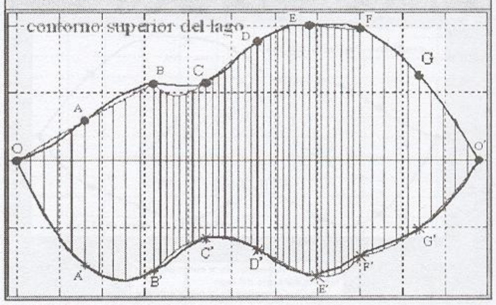
Para determinar el área de una superficie irregular es necesario dividirla en dos partes mediante una línea recta base, para cada superficie parcial se determina su área, después del cual se sumarán las áreas parciales.

Figura 15. Área del tramo 1 y 2



FUENTE: Elaboración Propia.

Figura 16. Área total del contorno de la superficie del lago



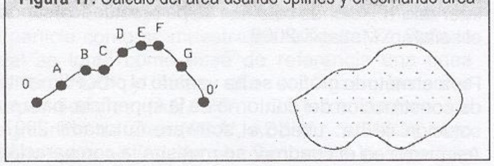
FUENTE: Elaboración Propia.

Al utilizar un polinomio interpolador de grado 8 para determinar el área de la superficie irregular se puede apreciar que no se ajusta al contorno real del lago, por lo que es conveniente dividir en partes, ajustarlos mediante polinomios interpoladores y/o splines, resolverlos parcialmente y luego unirlas, ésta separación permite tener resultados más exactos.

Los métodos numéricos utilizando la regla del trapecio compuesto y la combinación de Simpson (1/3 y 3/8 de acuerdo al número de segmentos) desarrollados con el Matlab® 2006 son los que arrojan resultados más exactos porque tienen el menor error.

El método CAD más exacto es el que calcula el área de la superficie del lago que ha sido graficado mediante Splines. Cuando se tiene definida la curva, la aplicación de procedimientos CAD es directo y tiene una buena aproximación a los métodos numéricos más confiables.

Figura 17. Cálculo del área usando splines y el comando área



FUENTE: Elaboración Propia.

Cuadro 1. Resultado de los métodos calculados

MÉTODO	DENOMINACIÓN	SOFT.	ANCHO DE INTERVALO		
			h = 0,1	h = 0,01	h = 0,001
Numérico	Rectangular compuesta	Matlab®	330,7436	330,7498	330,7499
Numérico	Trapezoidal compuesta	Matlab®	337,7878	337,7927	337,7927
Numérico	Function: Trapz	Matlab®	330,7436	330,7498	330,7499
Numérico	Simpson compuesta	Matlab®	337,7928	337,7928	337,7928
GRÁFICO	Comando: spline	Autocad®	336,4279		
GRÁFICO	Comando: polilínea	Autocad®	321,9875		
GRÁFICO	Comando: polilínea fit	Autocad®	344,3792		

FUENTE: Elaboración Propia.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Curtis, G. (2000). Análisis Numérico con Aplicaciones. México: Editorial Prentice- Hall.

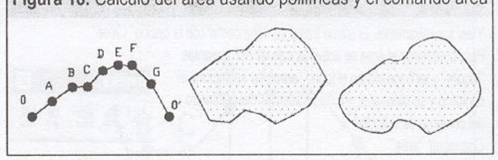
2. Pérez, C. (2002). Matlab y sus aplicaciones en las Ciencias y la Ingeniería. Madrid: Edit. Prentice Hall.

3. Chapra, S y Canale, R. (2004) Métodos numéricos para ingenieros, 4ta Ed., Mc Graw Hill Interamericana., México.

4. Nakamura, S (1997). Análisis numérico y visualización gráfica, Ed. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A.

5. Cerquera, Y., (2007) Interpolación con trazadores o splines. http://archivos.abcdatos.com/tutoriales/Z/Z6408/Splinescubicos.pdf (visitado el 19-09-2007).

Figura 18. Cálculo del área usando polilíneas y el comando área



FUENTE: Elaboración Propia.

Cuadro 2. Comparación de errores del método numérico aplicado

REGLA	ERROR
Rectangular compuesta	$-(b-a)^3 f''(\xi)/12$
Trapezoidal compuesta	$-(b-a)^3 f''(\xi)/12n^3$
Simpson 1/3 compuesta	$-(b-a)^5 f^{(4)}(\xi)/180n^4$
Simpson 3/8 compuesta	$-(b-a)^5 f^{(4)}(\xi)/6480$

Fuente: Métodos numéricos para ingenieros. steven chapra.

6. Pereira, R.(1999). Entendiendo el concepto de splines.
http://www.geocities.com/riperey/pov41.html
(visitado el 19-09-2007).

7. Ojeda, P.(2002). Generación de modelos tridimensionales de cuevas y túneles. Mapping interactivo. Nº 81
http://www.mappinginteractivo.com/plantilla-ante.asp?id_articulo=180
(vistado el 29-09-2007).

8. Método de Monte Carlo
http://docencia.50webs.com/simula11.htm
(visitado el 11/07/2007)

9. Patricia Saavedra Barrera1 y Víctor Hugo Ibarra Mercado (2004). El método Monte-Carlo y su aplicación a finanzas
http://alvarorivasvillatoro.com/files/metodo_de_monte_carlo_en_finanzas_482.pdf
(visitado el 11/10/07)