

Recibido: 3 / 11 / 2008, aceptado en versión final: 21 / 11 / 2008

## Modelo en programa de ordenador para resolver problemas de balance de materia

Model in program of computer to solve problems of balance of matter

Oscar Julio Núñez Venegas\*, Carlos Francisco Cabrera Carranza\*\*,  
José Ángel Porlles Loarte\*, Máximo Medardo Leyva Caballero\*

---

### RESUMEN

Una parte importante del desarrollo de la ingeniería de procesos es el cálculo del balance de materia, que a menudo consume mucho tiempo, sobre todo cuando se trata de problemas complejos, porque implica analizar una población de variables de entrada y múltiples ecuaciones simultáneas. Este artículo presenta una metodología de solución a través de un programa de ordenador para facilitar los cálculos.

**Palabras clave:** Proceso químico, balance de materia, ecuaciones simultáneas, Programa de ordenador.

### ABSTRACT

An important part of the process of development of the engineering of processes is the calculation of the matter balance that often consumes long time, coverall when it treats complex problems, because it implies to analyze a population of entrance variables and manifold simultaneous equations. The present article presents/displays a methodology of solution through a computer program to facilitate the calculations.

**Keywords:** Chemical process, balance subject, simultaneous equations, computer program.

## I. INTRODUCCIÓN

La ingeniería de procesos está en permanente búsqueda de métodos para acortar el tiempo en la solución de problemas. Los trabajos con ayuda de simuladores es un nuevo paradigma que está revolucionando la forma de enfrentar diversos problemas complejos en tareas de simulación de procesos y procesamiento de materiales para obtener un producto o productos con mayor valor económico.

Dicho modelo bajo la forma de un programa se denomina BM\_OJNV\_08 y puede ser fácilmente instalado en una PC que contenga el software DEV-C++ para que sea ejecutable.

El propósito de este trabajo es presentar un modelo sobre la base de un programa asistido con computadora para la resolución de problemas de balance de materiales, lo que involucra la solución de ecuaciones algebraicas lineales por el método Gauss, empleando el lenguaje de programación C++, que tiene como soporte al software DEV-C++.

Es importante que el estudiante de pregrado contraste sus cálculos y resultados de balance de materiales obtenidos manualmente con los que se desarrollan con un programa computacional, dado que la tendencia en la industria es resolver problemas haciendo uso de ordenadores.

---

\* Docentes del Departamento Académico de Análisis y Diseño de Procesos, Facultad de Química e Ingeniería Química, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima-Perú.

\*\* Docente de la Facultad de Ingeniería Geológica, Minera, Metalúrgica y Geográfica de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima-Perú.  
E-mail: onunezv@unmsm.edu.pe

**II. FUNDAMENTOS TEÓRICOS**

La naturaleza impone ciertas restricciones en el intento de diseñar un nuevo proceso o durante el análisis de uno ya existente. En la etapa inicial de diseño de procesos, el ingeniero tiene que enfrentarse con la tarea de hacer el balance de materiales, cuyo desarrollo tiene como base la Ley de Conservación de la Masa [1], que establece que la masa no puede crearse ni destruirse.

Todos los problemas de balances de masa son variaciones sobre un mismo tema teniendo valores de algunas variables de corriente de entrada y salida, calcular los demás valores. La resolución de estos problemas requiere la formulación y solución de ecuaciones simultáneas, en términos del álgebra elemental, pero la formulación de las mismas a partir de la descripción de un proceso y una serie de datos puede llegar a presentar serias dificultades; como es el caso de “n” ecuaciones y “n” incógnitas, que suelen presentarse.

**Metodología: Eliminación Gaussiana**

El primer método que se presenta usualmente en álgebra, para la solución de ecuaciones algebraicas lineales simultáneas, es aquel en el que se eliminan las incógnitas mediante la combinación de las ecuaciones. Este método se conoce como *Método de eliminación*. Se denomina *eliminación gaussiana* si en el proceso de eliminación se utiliza el esquema particular atribuido a *Gauss*.

Utilizando el método de Gauss, un conjunto de n ecuaciones con n incógnitas se reduce a un *sistema triangular equivalente* (un sistema equivalente es un sistema que tiene iguales valores de la solución), que a su vez se resuelve fácilmente por “sustitución inversa”; un procedimiento simple que se ilustrará con la presentación siguiente:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = c_n \end{matrix}$$

En donde:  $a_{ij}$ : Se denomina términos.  
 $x_i$ : Se denomina variables.  
 $C_i$ : Se denomina constantes.

Aplicando la definición de producto entre matrices, este sistema de n ecuaciones algebraicas lineales con n incógnitas puede escribirse en forma matricial, de la forma  $A X = C$ , cuyo desarrollo es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix}$$

En donde **A** se llama *Matriz del Sistema*. La matriz formada por **A**, a la que al agregarse el vector de términos independientes **C**, como última columna, se le llama la *Matriz Ampliada del Sistema*, que se representa con **(A, C)**.

Entonces la matriz ampliada tiene la siguiente representación:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} & \dots & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} & \dots & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} & \dots & c_n \end{bmatrix}$$

**Teoremas sobre rangos [2]**

Para apreciar si la matriz ampliada tiene solución, primero tiene que analizarse el rango de la Matriz del Sistema y el rango de la Matriz Ampliada, para lo cual se usa los conceptos del teorema sobre rangos.

En este caso, la matriz **A** se representa con la notación  $r(A)$  y el de la matriz ampliada con  $r(A, C)$ .

En álgebra se demuestra que:

1. Para cualquier sistema,  $r(A) \leq r(A, C)$ .
2. Si  $r(A) < r(A, C)$  el sistema es *inconsistente*.
3. Si  $r(A) = r(A, C)$  el sistema de ecuaciones es *consistente*.

De otro lado, si además  $r(A) = n$ , el sistema es *determinado* y es *indeterminado* si  $r(A) < n$ , siendo **n** el número de variables en el sistema.

Este método que constituye una variación del método de eliminación de Gauss, permite resolver hasta 15 ó 20 ecuaciones simultáneas, con 8 ó 10 dígitos significativos en las operaciones aritméticas de la computadora.

El citado procedimiento se distingue del método gaussiano en que cuando se elimina una incógnita, se elimina de todas las ecuaciones restantes, es decir, las que preceden a la ecuación pivote, así como de las que la siguen.

El método se ilustra mejor con un ejemplo. Se propone el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{matrix} 3.000 X1 - 0.100 X2 - 0.200 X3 = 7.850 \\ 0.100 X1 + 7.000 X2 - 0.300 X3 = -19.300 \\ 0.300 X1 - 0.200 X2 + 10.000 X3 = 71.400 \end{matrix}$$

Primero, se expresan los coeficientes y el vector de términos independientes como una *matriz aumentada* de la forma  $r(A, C)$ . En caso que algún término de la columna  $a_{ij}$  sea negativo, se debe cambiar toda la fila, para que se encuentre dicho término con cambio de signo, a efectos de que los componentes de la columna  $a_{ij}$  sean positivos.

$$\begin{bmatrix} 3.000 & -0.100 & -0.200 & \dots & 7.850 \\ 0.100 & 7.000 & -0.300 & \dots & -19.300 \\ 0.300 & -0.200 & 10.000 & \dots & 71.400 \end{bmatrix}$$

A partir de la matriz aumentada se debe seguir una metodología hasta obtener lo que se denomina la **matriz con diagonal unitaria**, para lo cual se sigue los pasos siguientes:

1. Se normaliza la primera fila dividiendo entre el valor del término  $a_{11} = 3$  para obtener una nueva matriz modificada:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1.000 & -0.033 & -0.066 & 2.616 \\ 0.00 & 7.000 & -0.300 & -19.300 \\ 0.300 & -0.200 & 10.000 & 71.400 \end{array} \right]$$

2. Luego, se convierte a valor igual a cero todos los elementos que están por debajo de  $a_{11}$ . Para el caso de la segunda fila se multiplica  $a_{21}$  con todos los términos de primera fila. Los resultados se restan con los correspondientes términos de la segunda fila. El mismo procedimiento se sigue con la tercera fila.

El resultado de esta operación da lugar a la siguiente matriz modificada:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -0.033 & -0.066 & 2.616 \\ 0 & 7.003 & -0.293 & -19.562 \\ 0 & -0.190 & 10.018 & 70.615 \end{array} \right]$$

3. Posteriormente, se debe normalizar la segunda fila. Esto implica convertir el término  $a_{22}$  en valor = 1, de manera similar a lo efectuado en paso 1 anterior.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -0.033 & -0.066 & 2.616 \\ 0 & 1.000 & -0.042 & -2.793 \\ 0 & -0.190 & 10.018 & 70.615 \end{array} \right]$$

4. Seguidamente, se debe convertir en valor = 0, los elementos por encima y debajo del término  $a_{22}$ .

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0.068 & 2.524 \\ 0 & 1 & -0.042 & -2.793 \\ 0 & 0 & 10.010 & 70.084 \end{array} \right]$$

5. Similarmente que en el paso 3, se normaliza el  $a_{33}$  de la tercera fila.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0.068 & 2.524 \\ 0 & 1 & -0.042 & -2.793 \\ 0 & 0 & 1.000 & 7.001 \end{array} \right]$$

6. De manera continuada se debe convertir en valor = 0, los elementos que están por encima de  $a_{33}$ . De esta manera se obtiene la matriz diagonal unitaria:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3.000 \\ 0 & 1 & 0 & -2.499 \\ 0 & 0 & 1 & 7.001 \end{array} \right]$$

## DESVENTAJAS DEL MÉTODO DE ELIMINACIÓN GAUSSIANO

### I. División entre cero

Una de sus desventajas es que durante el proceso en las fases de eliminación y sustitución es posible que ocurra una división entre cero.

Para evitar esta posibilidad de truncamiento del programa se ha desarrollado la estrategia del pivoteo que elimina parcialmente estos problemas en el diseño del programa propuesto.

### 2. Errores de redondeo

La computadora maneja las fracciones en forma decimal con cierto número limitado de cifras decimales, y al manejar fracciones que se transforman a decimales que nunca terminan, se introduce un error en la solución de la computadora. Este se llama *error por redondeo*.

Cuando se va a resolver solamente un pequeño número de ecuaciones, el error por redondeo es pequeño y, generalmente, no se afecta de manera sustancial la precisión de los resultados, pero sí se van a resolver simultáneamente muchas ecuaciones, el efecto acumulativo del error por redondeo puede introducir errores relativamente grandes en la solución. Por esta razón, el número de ecuaciones simultáneas que se puede resolver satisfactoriamente con el Método de eliminación de Gauss, utilizando de 8 a 10 dígitos significativos en las operaciones aritméticas, se limita generalmente a 15 ó 20 ecuaciones simultáneas.

### 3. Sistemas mal condicionados

La obtención de la solución depende de la condición del sistema. En sentido matemático, los *sistemas bien condicionados* son aquellos en los que un cambio, en uno o más coeficientes, provoca un cambio similar en la solución.

Los *sistemas mal condicionados* son aquellos en los que cambios pequeños en los coeficientes provocan cambios grandes en la solución.

Una interpretación diferente del mal condicionamiento es que un rango amplio de respuestas puede satisfacer aproximadamente al sistema. Ya que los errores de redondeo pueden inducir cambios pequeños en los coeficientes, estos cambios artificiales pueden generar errores grandes en la solución de sistemas mal condicionados.

## III. PROPUESTA METODOLÓGICA

El aporte del programa propuesto en este trabajo, tiene las siguientes ventajas:

a) Elimina incurrir en los errores anotados.

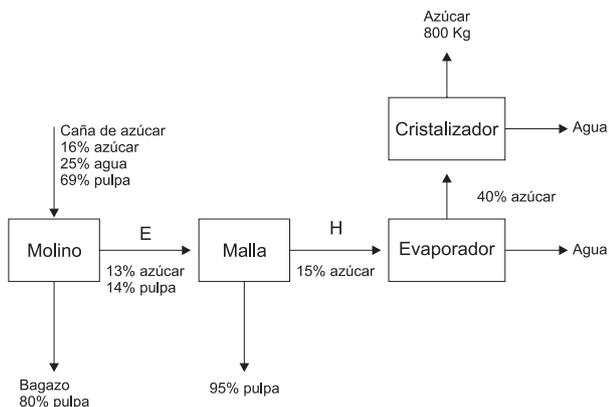
b) Facilita la labor del análisis y ejecución del programa, haciendo más operativo el modelo de Gauss. El diagrama de flujo pertinente se visualiza en la Figura N.º 1. [3].

Tomando en cuenta lo anotado líneas arriba, es posible establecer el procedimiento metodológico en la resolución de problemas de balance de materiales, usando el programa propuesto en este trabajo debidamente instalado en el software DEV\_C++ para su ejecución:

1. Establecer el diagrama de bloques, en el cual se debe visualizar las corrientes de entrada y salida, y sus flujos másicos.
2. Formular las ecuaciones lineales pertinentes.
3. Ordenar los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales o matriciales.
4. Ingresar el orden de la matriz y los datos por filas al programa propuesto (las unidades de miles sin espacio ni coma y los números reales con punto).
5. El software procesa y obtiene los resultados en la consola de todas las incógnitas.
6. Obtenido los resultados, el problema planteado está resuelto.

**IV. EXPERIMENTACIÓN USANDO EL SOFTWARE**

En la figura se muestra un diagrama de flujo simplificado de la fabricación de azúcar. La caña de azúcar se alimenta a un molino donde se extrae jarabe por trituración; el bagazo resultante contiene un 80% de pulpa. El jarabe (E) que contiene fragmentos finamente divididos de pulpa se alimenta a una malla que separa toda la pulpa y produce un jarabe transparente (H) que contiene 15% de azúcar y un 85% de agua en peso. El evaporador produce un jarabe pesado y el cristalizador produce 800 kg/h de cristales de azúcar. Determinar:



- a. El agua eliminada en el evaporador.
- b. Las fracciones de masa de los componentes del flujo de deshecho (G).
- c. El caudal de alimentación de caña de azúcar.
- d. El porcentaje del azúcar que entra con la caña, que se pierde con el bagazo.
- e. Si la operación es eficiente, se justifica el resultado.

Solución:

Primero se crea la tabla de las corrientes con los datos del problema y, posteriormente, se analizan los grados de libertad.

	F	D	E	G	H	J	K	L	M
Agua	25	?	?	?	?	100	?	100	0
Azúcar	16	?	13	?	15	0	40	0	100
Pulpa	59	80	14	95	?	0	?	0	0

Dado que el enunciado dice que toda la pulpa se separa en la malla, podemos poner que el contenido de la misma en las corrientes a partir de la H es 0%. De igual forma, sabiendo que la suma de las fracciones en peso tiene que sumar 100% se rellenan los campos de las corrientes E, H y K.

	F	D	E	G	H	J	K	L	M
Agua	25	?	73	?	85	100	60	100	0
Azúcar	16	?	13	?	15	0	40	0	100
Pulpa	59	80	14	95	0	0	0	0	0

Junto a los datos expuestos en la tabla se tiene la producción de azúcar que es de 800 kg/h.

**Análisis de los grados de libertad**

Número de incógnitas: Los caudales de las corrientes F, E, D, G, H, J, K y L y además las 4 composiciones que se indican en la tabla.

En total tenemos 12 INCÓGNITAS.

Número de ecuaciones: Como hay 4 unidades de proceso se pueden establecer balances de materia a las mismas, tantos como componentes participen en la unidad de proceso. Así, en las dos primeras se pueden establecer 3 balances y en las dos siguientes se pueden plantear dos balances independientes, en total 10 balances. Junto a los balances de materia, tenemos restricciones en la suma de las composiciones que debe ser 100%. Tenemos dos restricciones de este tipo, correspondientes a las corrientes D y G. En total 12 ECUACIONES.

GRADOS DE LIBERTAD= 12 - 12 = 0. Luego el problema está bien planteado.

**BALANCES AL MOLINO**

$$0.16 \cdot F = 0.13E + xD, azD$$

$$0.25 \cdot F = 0.73E + xD, agD$$

$$0.59 \cdot F = 0.14E + 0.8D$$

$$1 = 0.8 + xD, az + xD, ag$$

**BALANCES AL CRISTALIZADOR**

$$0.4K = M; K = 800/0.4 = 2000\text{kg/h}$$

$$K = M + L; L = 2000 - 800 = 1200\text{kg/h}$$

**BALANCES AL EVAPORADOR**

$$0.15H = 0.4K; \rightarrow H = 0.4 \cdot 2000/0.15 = 5333.3\text{kg/h}$$

$$H = J + K; \rightarrow J = 5333.3 - 2000 = 3333.3\text{kg/h}$$

**BALANCES A LA MALLA**

$$0.13E = xG, azG + 0.15H$$

$$0.14E = 0.95G$$

$$E = H + G; E = 5333.3 + G$$

De las dos últimas ecuaciones se obtiene G y E.  
 $G=921.8 \text{ kg/h}$  y  $E=6255.1\text{kg/h}$ .

Por tanto queda en la primera ecuación:  
 $xG, az = 0.13 \cdot 6255.1 - 0.15 \cdot 5333.3/921.8 = 0.0143$   
 $\rightarrow 1.43\%$

El resto de la corriente G:  $100-95-1.43$  es agua. La fracción de agua que queda:  $3.57\%$ .

Teniendo la composición de la corriente G se resuelven los balances al molino resultando:  
 $F=19659\text{kg/h}; D=13404\text{kg/h}; xD, az = 0.174$

La tabla de composiciones queda finalmente:

comp/%p	F	D	E	G	H	J	K	L	M
Agua	25	2.6	73	3.57	85	100	60	100	0
Azúcar	16	17.4	13	1.43	15	0	40	0	100
Pulpa	59	80	14	95	0	0	0	0	0

Aplicando el programa propuesto con el Método Gauss se registra la secuencia lógica siguiente:

```
#include<iostream.h>
#include<stdlib.h>
#include<dos.h>
#define N 100 // N Ecuaciones con N incógnitas
int main(){
    int n=0,i,j,k,m,cent;
    float w[N][N],x[N],aux,sum;

    cout<<"Tema:Ecuaciones Simultáneas"<<endl;
    cout<<endl;
    cout<<endl;
    cout<<"Ingrese el orden de la matriz = ";
    cin>>n;
    cout<<"Ingrese Columnas y Constante";
    cout<<" en la misma linea ";

    for(i=1;i<=n;i++){
```

```
        cout<<"Fila "<<i<<endl;
        for(j=1;j<=n+1;j++){
            if(j==n+1){
                cout<<"Constante = ";
                cin>>w[i][j];
            }
            else{
                cout<<"Coeficiente "<<j<<" = ";
                cin>>w[i][j];
            }
        }
    }

    for(i=1;i<=n;i++){
        for(j=n+1;j>=i;j--){
            w[i][j]=w[i][i];
            for(k=i+1;k<=n;k++){
                cent=0;
                for(m=i;m<=n+1;m++){
                    if(cent==0){
                        aux=w[k][m];
                        cent=1;
                    }
                    w[k][m]=aux*w[i][m]-w[k][m];
                }
            }
        }
    }

    for(i=n;i>=1;i--){
        sum=0;
        for(j=i;j<=n;j++){
            sum+=w[i][j+1]*x[j+1];
        }
        x[i]=w[i][n+1]-sum;
    }

    cout<<" RESULTADOS ";
    for(i=1;i<=n;i++){
        cout<<"\n\n x["<<i<<"] = "<<x[i]<<" lbs.";
        if(i%10==0) system("PAUSE");
    }
    system("PAUSE");
    return 0;
}
```

**V. CONCLUSIONES**

A primera vista la propuesta puede configurarse muy laboriosa, pero es en apariencia. La clave está en formular las ecuaciones y transformarlas en una matriz y desde este punto hacia delante, lo hace el programa que es posible de instalar con toda facilidad en la computadora.

Los autores esperan que este pequeño aporte motive a los docentes y estudiantes de esta área, su uso y difusión por ser de utilidad.

De acuerdo a la tendencia de los conocimientos, los ingenieros del futuro, deberán conocer temas vinculados a la programación en computadoras (Java,

