

# APLICACIÓN DE LAS DIFERENCIAS FINITAS PARA EL FLUJO DE CONTAMINANTES EN EL ACUÍFERO DE AYAMONTE

## APPLICATION OF FINITE DIFFERENCES FOR POLLUTANTS FLOW IN THE AYAMONTE WATER BEARER

Alfonso Romero Baylón\*, Daniel Lovera Dávila

### RESUMEN

Si planteamos un modelo para el flujo de aguas subterráneas en un acuífero, implícitamente se modeliza el flujo de contaminantes móviles disueltos; teniendo en cuenta esta premisa, nuestro análisis del flujo de contaminantes en el acuífero de Ayamonte quedará representada en el estudio del flujo de las aguas subterráneas en un medio hidrogeológico estable y uniforme, condiciones que detallamos en los análisis posteriores de este documento. Sin embargo, debo advertir que para contaminantes en suspensión y de otro tipo, el tratamiento difiere del presente análisis. Mediante la aplicación de las diferencias finitas y el lenguaje de programación Fortran para la solución del flujo y transporte de contaminantes en aguas subterráneas, este trabajo se ha desarrollado en gabinete y campo.

El método de solución utilizado en este problema, son los algoritmos de interpolación polinómica de Newton Gregory; y para la solución de las ecuaciones con derivadas parciales de Laplace, se ha utilizado el algoritmo de La Derivada primera y segunda de Stirling con el método de las diferencias finitas; además, hemos añadido un módulo de programa en Fortran para plataforma Unix, que consiste en una rutina de aceleración de las condiciones de límites en las ecuaciones diferenciales consideradas para flujo de aguas subterráneas. Este método de solución es interactivo y aproxima las ecuaciones diferenciales parciales a través de una solución aproximada mediante el uso de algoritmos de solución.

El modelo se ha condicionado para acuíferos en estado estable, usando los mismos niveles estáticos como condición inicial, y teniendo en cuenta el modelo hidrogeológico conceptual (confinado-libre) con transmisividad y coeficiente de almacenamiento constante en un medio homogéneo.

**Palabras clave:** Modelamientos numéricos, geometrización volumétrica, simulación del flujo de agua, calidad de agua, diferencias finitas.

### ABSTRACT

If we modelling the flux of subterranean waters in an aquiferous, implicitly modelling the flux of mobile polluting agents dissolves, keeping in mind this premise, our analysis of the flux of polluting agents in the aquiferous thing of Ayamonte, will remain represented in the study of the flux of the subterranean waters in a hydrogeological halfback regular guest and it provide with uniforms, agree that detail in the later analysis of this document. However, the treatment, must notice that for polluting in suspension and other type of polluting agents, the treatment it differs of the analysis that here carry out.

By means of the application of the finite differences and the language of fortran programming for the solution of the flux and transports of polluting agents in water subterranean this work has developed in cabinet and excel.

The method of used solution in the solution of this problem, it are the algorisms of polynomial interpolation of Neuton Gregory, and for the solution of the equations with derived partial of Laplace, has used the algorism of derived first and second of Stirling with the method of the finite differences, moreover have added a modulate of program in fortran for linux platform, that consists in a routine of acceleration of the conditions of limits in the

\* Facultad de Ingeniería Geológica, Minera, Metalúrgica y Geográfica; Universidad Nacional Mayor de San Marcos.  
E-mail: aromerob@unmsm.edu.pe / dloverad@unmsm.edu.pe

considerate differential equations for flux of subterranean waters. This method of solution is interactive and, approximates the partial differential equations through an approximate solution by means of the use of algorithms of solution.

The model calculates has agreed for aquiferous in stable state, using the same static levels as initial condition, and keeping in mind the hydrogeological conceptual model (bordered-gives birth) with remissive and coefficient of constant storage in a homogeneous halfback.

**Keywords:** Numeric modelling, volumetric geometric, water flow simulated, quality of water, finite differences.

## 1. INTRODUCCIÓN

En la década de los 60 y 70, se realizaron simulaciones electrónicas, para ello se construía una maqueta de acuífero, donde una maraña de resistencias y condensadores simulaban, respectivamente, las distintas permeabilidades y los distintos coeficientes de almacenamiento. Como era evidente, el flujo eléctrico hacia el papel del agua y el potencial eléctrico representaba equitativamente al potencial hidráulico. La solución era considerada muy laboriosa y engorrosa.

Estudiaremos en modo muy básico el fundamento de los modelos de flujo subterráneo en un acuífero, para comprender cómo el ordenador puede predecir el comportamiento del agua subterránea mediante la Ley de Darcy.

El problema de predecir el comportamiento de los niveles piezométricos de un acuífero, el mismo que puede ser tomado como resultado de explotación de aguas por medio de pozos de extracción mediante bombeo u otros eventos similares; existen soluciones deterministas o analíticas, que en métodos numéricos conocemos como las soluciones continuas (caso de las fórmulas de Theis, Jacob, entre otros), estas soluciones son muy alejadas de la realidad, cuando el medio hidrogeológico u otros factores son complejos; entre estas variables podemos mencionar: Varias capas del acuífero con cambios laterales, caudales de extracción variables, etc. El problema se vuelve más complicado aún cuando queremos calcular el comportamiento del acuífero a lo largo de varios años, interviniendo en este caso las precipitaciones pluviométricas y caudales drenados por ríos, entre otras variables [1,2,3].

## 2. UBICACIÓN DEL ACUÍFERO DE AYAMONTE

El acuífero de Ayamonte está ubicado en el suroeste de la provincia de Huelva, correspondiente a la Junta de Andalucía; el objetivo de esta investiga-

ción monográfica es mostrar y evaluar el modelo hidrogeológico conceptual planteado, con un modelo numérico de flujo de tipo interpretativo; es decir, que los resultados que se obtuvieron por el modelo son ajustados de tal manera que los niveles hidráulicos coincidiesen con los niveles observados.

A la zona de recarga del Acuífero Ayamonte, condicionamos como un acuífero isotrópico permeable con el potencial de flujo horizontal, ya sea libre o confinado, dependiendo de las partes donde aflora y donde no, respectivamente. La extensión de la región estudiada abarca las áreas con mayor y mejor información.

Para lograr acoplar el modelo a los datos medidos, se tiene en cuenta el nivel de certidumbre de los parámetros indexados. Dado que se conoce la transmisibilidad, y por ende las conductividades, este es el dato con mayor grado de conocimiento. Se encontrará la recarga obtenida del balance hídrico, suponiendo los demás datos como coeficiente de almacenamiento, desplazamiento de la variable temporal y espacial conocidos.

## 3. CARACTERÍSTICAS DEL ACUÍFERO DE AYAMONTE

El abastecimiento de agua potable en la zona es crítico, debido a la ausencia de agua superficial, tanto en calidad como en cantidad; la ciudad de Ayamonte, como el 60% de los municipios de Andalucía, se abastecen del agua subterránea; de allí la importancia regional de los acuíferos y en forma específica del acuífero de Ayamonte.

Este acuífero corresponde a la unidad hidrogeológica 04.12 de la Cuenca del Guadiana. Se extiende entre el río Odiel y el río Guadiana, tiene una longitud de unos 40 km y una anchura entre 5 y 27 km, con una superficie de 676 km<sup>2</sup> [4].

En este sistema se distinguen dos niveles permeables bien diferenciados:

a) **Formación hidrogeológica inferior.** Constituida por conglomerados y arenas del Mioceno Superior. Su potencia media es de una decena de metros los mayores espesores se alcanzan en el sector meridional, en el área comprendida entre lepe y el río Piedras y las proximidades de Aljaraque. Se trata de un acuífero confinado excepto al oeste del río Piedras, donde aflora y es libre.

b) **Formación hidrogeológica superior.** Se dispone sobre la formación anterior a la que recubre de forma discontinua, pues está muy erosionada. Su potencia media es de unos 20 m y, a menudo, no se encuentra saturada, por lo que su potencial hidrogeológico es limitado. No obstante, su comportamiento hidrodinámico es interesante en cuanto al drenaje, por alimentación indirecta y retardada hacia el acuífero infrayacente, y a la posibilidad de constituir pequeños acuíferos colgados (A. González, 1997). Está constituida por sedimentos muy heterogéneos, que incluyen depósitos de glaciares, aluviales, terrazas, eólicos, de playa y marismas de Edad Cuaternaria. Se explota mediante pozos de gran diámetro y escasa profundidad. Según el Atlas Hidrogeológico de Andalucía (1998), las entradas al sistema son fundamentalmente la infiltración de las precipitaciones y de la escorrentía superficial generada en su borde norte (97 hm<sup>3</sup>/año) y, en menor medida, el retorno de riegos (6 hm<sup>3</sup>/año). Las salidas se producen por bombeos (31,5 hm<sup>3</sup>/año) y, de forma natural, a ríos y marismas (54 hm<sup>3</sup>/año) y al Océano Atlántico (19,5 hm<sup>3</sup>/año). Este acuífero presenta problemas de salinización por intrusión marina en el sector Lepe-Ayamonte debido a la explotación intensiva para regadío. Es de esperar que la explotación haya disminuido en los últimos años, debido a que se están sustituyendo las aguas subterráneas para el riego por aguas superficiales del sistema Chanza-Piedras. En este sector es donde también se tienen los mayores problemas por contaminación agrícola [5].

#### 4. HIDROGEOLOGÍA DEL ACUÍFERO DE AYAMONTE [6,7]

La zona que nos interesa de los acuíferos que se encuentran en la zona de Huelva, es el acuífero de Ayamonte; sin embargo, no descartamos la presencia de dos acuíferos más, los mismos que son el acuífero de Almonte-Marismas y Niebla-Posadas, clasificado el primero como Ayamonte-

Huelva, aquella en la que el flujo del agua subterránea, y por tanto los posibles contaminantes que ésta transporte, se dirige hacia la Ría de Huelva.

Los límites hidrogeológicos del acuífero de Ayamonte quedan definidos por los ríos Guadiana y Odiel, en sus cursos bajos, terrenos paleozoicos y el Océano Atlántico. Se puede observar la presencia de dos niveles de acuíferos bien definidos, uno superficial y otro profundo, separados entre sí por un espesor de margas azules que desaparece al oeste del río Piedras.

a) **Acuífero libre superficial.** Está constituido por arenas finas del Mioceno Superior y por gravas gruesas y medias en general, muy arcillosas del plioceno continental. La potencia no suele superar los 20 metros, salvo en la zona donde se superponen ambos acuíferos donde los espesores alcanzan entre los 70 a 80 metros. La alimentación o carga se realiza por infiltración directa de las lluvias, con niveles de agua a profundidades generalmente inferiores a los 10 metros, el drenaje natural es de norte a sur.

b) **Acuífero profundo.** Lo constituyen arenas, areniscas, gravas y conglomerados del Mioceno Basal que aflora entre Niebla y Posadas, tienen una estructura monoclinial que se sumerge suavemente hacia el sur con una potencia entre 2 y 10 m. La zona de carga se encuentra en la zona del acuífero libre a partir de la infiltración de agua de lluvias y de escorrentía superficial. La descarga natural se produce hacia el mar o al acuífero superior, la gradiente varía en la parte alta de 8% en la parte baja o zona costera de 2%.

#### 5. BALANCE HÍDRICO

El balance hídrico para el año 1998, según los reportes del IGME con datos de explotación de 32 hm<sup>3</sup>/año para actividades agrícolas y 1,5 m<sup>3</sup>/año para consumo humano.

ENTRADA	hm <sup>3</sup> /año	SALIDA	hm <sup>3</sup> /año
Recarga de lluvias	97	Bombeo regadío	30
Retorno de riegos (15%)	6	Bombeo para consumo urbano	1,5
Entrada de mar	2	Bombeo de uso industrial	0
Total	105	Salida natural a río	54
		Salida natural al mar	19,5
		Total	105

## 6. BASES TEÓRICAS DEL MODELO MATEMÁTICO [8, 9, 10, 11]

El método de solución elegido para resolver la matriz de diferencias finitas fijaremos mediante el uso de los algoritmos de Derivadas Doble de Stirling (D2ST), basados en los algoritmos Derivada segunda de Newton Gregory (D2NG) y éstas a su vez se sustentan en la interpolación polinómica combinadas con técnicas de Euler Cauchy para solución de ecuaciones diferenciales de derivada simple, pero que, con la utilización adecuada de estas técnicas algorítmicas, se encuentra una buena solución a nuestro problema, el mismo que se reduce a la solución de la ecuación de Laplace dado por la siguiente fórmula:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_{zz} \frac{\partial h}{\partial z} \right) + Q(x, y, z) = S_x \frac{\partial h}{\partial t}$$

La solución de esta ecuación es la que al final nos dará los resultados que estamos buscando, pues la variable  $h$ , representa los niveles piezométricos del acuífero en estudio, el cual fundamentaremos en un primer momento, en la bidireccionalidad estabilizada del gradiente hidráulico adecuado para este fin, este método es una rutina de aceleración de las condiciones límites en las ecuaciones de flujo del agua subterránea y su solución es por el método iterativo. Este método de solución aproxima el gran arreglo de ecuaciones diferenciales parciales a través de una solución aproximada. El método además precondiciona la ecuación matricial para dar una solución más eficiente.

El modelo lo vamos a calcular asumiendo que se encuentra en estado estable, usando los mismos niveles estáticos como condición inicial, y teniendo en cuenta el modelo hidrogeológico conceptual, cada capa representa una parte de un acuífero confinado/libre con transmisividad y coeficiente de almacenamiento variables. Además la recarga sólo fue aplicada en las celdas superiores de la malla.

Como primera etapa del estudio realizaremos un modelo numérico del área de recarga, ya que en la actualidad es la zona de mayor explotación y por consiguiente de mayor información disponible. Este modelo es interpretativo y pretende estudiar y actualizar datos existentes e involucrarlos en el mismo, con el fin de presentar un sistema de flujo regional. Según Anderson (1992), los modelos numéricos son usados para ayudar a establecer

características de las fronteras del acuífero y poder cuantificar la cantidad de agua dentro del sistema y la recarga potencial del acuífero. Adicionalmente, podemos decir que la realización de este modelo es importante para la ejecución de posteriores modelos predictivos o genéricos.

## 7. EL MODELO MATEMÁTICO

Considerado también como el modelo numérico o digital, este modelo consiste en la representación virtual del medio físico en un ordenador que, mediante las operaciones adecuadas, calculará la evolución de los niveles piezométricos y el flujo hídrico producido, y todo esto con el paso del tiempo  $\Delta t$  (en nuestros programas en fortran lo conocemos como paso), que se lo indique en el programa y poder ver para distintos períodos el comportamiento del agua subterránea.

## 8. DISCRETIZACIÓN DEL MEDIO HIDROGEOLOGICO

El problema real ocurre en tres dimensiones, más otra que es añadida que es el paso  $\Delta t$ , lo que hace que el problema se vuelva más complejo y de cuatro dimensiones, únicamente la parte de las variables  $x$ , y además de  $z$  representarían el medio hidrogeológico, tal como mostramos en el siguiente esquema los gráficos siguientes:

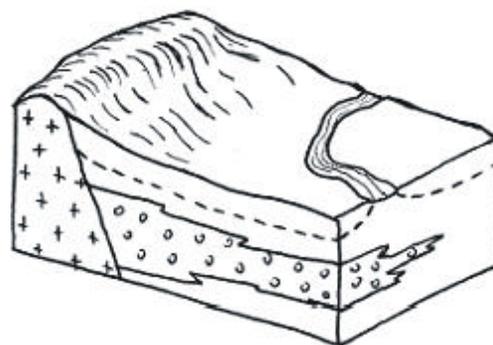


Gráfico N° 1. Medio hidrogeológico real.

En el gráfico N° 1, se observa parte del cuerpo hidrogeológico en el campo, donde se pueden ver las estructuras litológicas y el lecho de río, así como la geometría del acuífero.

En el gráfico N° 2, observamos el mismo medio hidrogeológico de la gráfica N° 1, pero esta vez discretizada en el espacio.

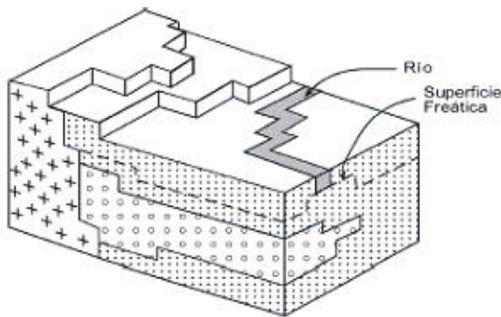


Gráfico N° 2. Medio hidrogeológico discretizado.

Para efectos de nuestro modelo numérico elaboramos una rejilla sobre el mapa cartográfico del acuífero, los cuales debemos considerar como pequeños intervalos, que llamaremos posteriormente como los elementos finitos, con la diferencia de que en clases vimos en una dimensión y en este caso será de dos dimensiones, esta discretización lo esquematizamos en el gráfico N° 3, además de discretizar los contactos hidrogeológicos, también quedan discretizadas todas las líneas de las alturas piezométricas, esta discretización muestra desde una vista de planta al modelo inicial del medio hidrogeológico.



Gráfico N° 3. Medio hidrogeológico vista en planta.

Una de las condiciones que consideraremos para resolver este problema es que asumimos que dentro de cada celda el medio es homogéneo, es decir las variables de permeabilidad, altura de piezómetro, entre otras variables son constantes, y el modelo podrá diferenciar la variabilidad de estos parámetros en cada celdilla, lo que significa que, si en una celdilla el nivel piezométrico es más elevado que en alguna de las cuatro adyacentes, el flujo se producirá perpendicularmente a las superficies laterales de las celdillas.

Como en todo problema de elementos finitos, el tamaño de las celdillas determinará que las líneas piezométricas escalonadas se ajusten a la real (ver gráfico N° 4).

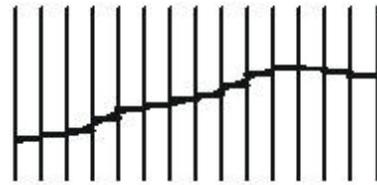


Gráfico N° 4. Alturas piezométricas discretizadas.

## 9. DISEÑO DEL MODELO MATEMÁTICO

Consideramos dos celdas volumétricas cuyas dimensiones en los tres ejes será  $\Delta x$ , por lo tanto en lugar de tener elementos finitos, esta vez tenemos cubitos finitos de arista muy pequeña representado por  $\Delta x$ , tal como mostramos en el Gráfico N° 5.

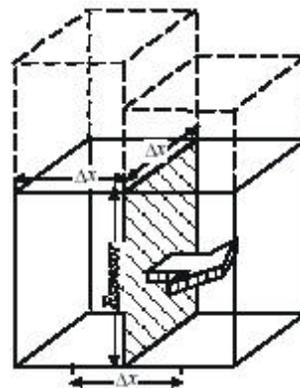


Gráfico N° 5. Volúmenes finitos de lado  $\Delta x$ .

El flujo de agua que pasa de una celda a otra se encuentra en la cara sombreada de los prismas adyacentes, con dirección hacia donde indica la flecha, el agua siempre fluye de un lugar más alto a más bajo en estado normal. El caudal que fluye está expresado por la ley de Darcy.

$$Q = \text{Sección} \times K \times \Delta h / \Delta l \dots (1.0)$$

Donde:

Sección, es el área sombreada entre las dos celdas adyacentes.

K, es la conductividad hidráulica (m/día).

Aquí,  $\Delta l = \Delta x$ , por ser las celdas prismas de aristas  $\Delta x$ .

Considerando  $\Delta l = \Delta x$ , la ecuación (1), queda expresada como:

$$Q = \text{Sección} \times K \times \Delta h / \Delta x \dots (2.0)$$

Pero la sección por donde fluye el agua en la figura 4, podemos expresar por el producto de espesor  $x \Delta x$ , además  $\Delta h$ , está expresado por una diferencia de altura que llamaremos  $h_1-h_2$  indistintamente de la dirección del flujo de agua, por lo que la ecuación (2), queda expresada por:

$$Q = \Delta x \cdot \text{Espesor} \times K \times (h_1-h_2) / \Delta x$$

Simplificando  $\Delta x$ , y de la ley hidrogeológica de la transmisividad  $T = b \times K$ , donde  $b$  es el espesor del acuífero por donde fluye el agua, la ecuación expresada por:

$$Q = T \times (h_1-h_2) \dots (3.0)$$

Donde:

$T$ , es la transmisividad del medio acuífero ( $m^2/s.$ ),  $h_1$ ,  $h_2$ , son los niveles piezométricos del agua en el acuífero (m).

Pero en una celda muy pequeña, existen caudales de carga y descarga, así como el almacenamiento entre otros aspectos, en el gráfico N° 6, representamos un esquema de estos caudales de flujo de agua.

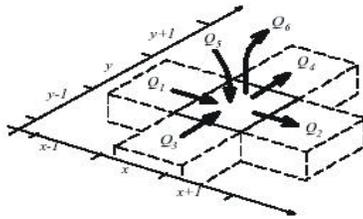


Gráfico N° 6. Caudales de carga y descarga.

Por principio del BALANCE HÍDRICO, el análisis hidráulico del flujo de agua en esta celda, para el paso de un tiempo  $\Delta t$ , se expresa así:

$$3\text{Entradas} = 3\text{salidas} + \Delta\text{almacenamiento}$$

Luego de la figura N° 5, tenemos:

$$Q_1 + Q_3 + Q_5 = Q_2 + Q_4 + Q_6 \pm \Delta\text{almacenamiento}$$

Debemos expresar el incremento o decremento de almacenamiento en unidades físicas de caudal para que esta expresión sea adecuada, ya que este factor de almacenamiento, tal como está, representa incremento o decremento de volumen, por lo que al dividir por un incremento del paso del tiempo  $\Delta t$ , quedará expresado en términos de caudal, así:

$$Q_1 + Q_3 + Q_5 = Q_2 + Q_4 + Q_6 \pm \Delta\text{volumen} / \Delta t \dots (4.0)$$

Pero de la figura N° 5:  $\Delta\text{volumen} = (\Delta x)2 \times (h_1-h_2)$ , por lo que la ecuación 4, queda expresada por:

$$Q_1 + Q_3 + Q_5 = Q_2 + Q_4 + Q_6 \pm S \times (h_1-h_2) \times (\Delta x) 2 / \Delta t$$

Reemplazando la ecuación (3) en (4) y utilizando  $i, j$  para las variables espaciales y  $t$  para la variable temporal, asumiendo que  $t$ , está en el eje de las  $z$ , en el gráfico N° 6 y tal como indica la siguiente, tenemos:

$$T_1 (h_{i-1,j,t}-h_{i,j,t}) + T_3 (h_{i,j-1,t}-h_{i,j,t}) + T_5 (h_{\text{recarga}}) = T_2 (h_{i,j,t}-h_{i+1,j,t}) + T_4 (h_{i,j,t}-h_{i,j+1,t}) + T_6 (h_{\text{descarga}}) \pm S_x (h_{i,j,t+1}-h_{i,j,t}) \times (\Delta x)2 / \Delta t$$

A esta expresión lo llamaremos como ecuación ( $\alpha$ )

Esta ecuación tiene sus orígenes generales en la ecuación diferencial de Laplace para flujo de aguas subterráneas, expresado por:

$$\frac{\partial}{\partial x} (K_{xx} \frac{\partial h}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (K_{yy} \frac{\partial h}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (K_{zz} \frac{\partial h}{\partial z}) + W(x, y, z) = S_x \frac{\partial h}{\partial t} \dots (5.0)$$

Donde:

$K$  = Conductividad hidráulica (m/día).

$S$  = Coeficiente específico de almacenamiento (1/m).

$h$  = Niveles piezométricos a encontrar.

Para nuestro caso de estudio consideraremos  $W(x,y,z)$  igual a cero por la condición de estabilidad homogénea del acuífero que consideramos al inicio de nuestros análisis. Por otro lado, trabajaremos solamente en las coordenadas  $x$  e  $y$ , debido a nuestro análisis gráfico, y posteriormente este análisis se simplificará en un análisis unidimensional que es el elemento básico matemático de comportamiento del flujo del agua de manera similar a las demás coordenadas, esto significa que hecho el análisis unidimensional, el análisis en  $x,y,z$  además de  $t$ , se hace en forma similar. Por lo dicho la ecuación (5.0). Queda expresada como:

$$\frac{\partial}{\partial x} (K_{xx} \frac{\partial h}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (K_{yy} \frac{\partial h}{\partial y}) = S_x \frac{\partial h}{\partial t} \dots (6.0)$$

La solución de la ecuación 6, matemáticamente para una función no discretizada estará expresada de la siguiente forma:

$$K_{xx} \iint \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_{yy} \iint \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = S \int \frac{\partial h}{\partial t} \quad \dots (7.0)$$

Aplicando el algoritmo de Derivada segunda de Stirling (D2ST), para derivadas dobles y simples, respectivamente, además utilizando la notación n para la variable temporal t, el cual colocaremos en la parte superior de la variable incógnita h, y los índices i,j para las variables espaciales x,y los cuales irán como subíndice, respectivamente, tenemos:

$$\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)^m_{xi,yj} \equiv [h_{xx}]^m_{i,j} \approx \frac{1}{(\Delta x)^2} [h^{n+1}_{i+1,j} - 2h^n_{i,j} + h^{n-1}_{i-1,j}]$$

$$\left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)^m_{xi,yj} \equiv [h_{yy}]^m_{i,j} \approx \frac{1}{(\Delta y)^2} [h^{n+1}_{i,j+1} - 2h^n_{i,j} + h^{n-1}_{i,j-1}]$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_{xi,yj} \equiv [h_t]_{i,j} \approx \frac{1}{2\Delta t} [h^{n+1}_{i+1,j} - h^{n-1}_{i-1,j}]$$

Esta última expresión, según la derivada primera de Stirling-D1ST.

Reemplazando estas tres últimas ecuaciones en la ecuación (6.0), y corrigiendo la variable temporal que en el análisis del gráfico 5, los índices i,j son constantes, tenemos:

$$\frac{Tx}{(\Delta x)^2} [h^n_{i+1,j} - 2h^n_{i,j} + h^n_{i-1,j}] +$$

$$\frac{Ty}{(\Delta y)^2} [h^n_{i,j+1} - 2h^n_{i,j} + h^n_{i,j-1}] =$$

$$\frac{S}{2\Delta t} [h^{n+1}_{i,j} - h^{n-1}_{i,j}] \quad \dots (\beta)$$

La ecuación (β) es la solución numérica de la ecuación alfa, cuyos análisis iniciales los hicimos para x, y y t. por lo tanto al resolver la ecuación beta, encontraremos la solución del modelo.

**10. SOLUCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO**

Para resolver la ecuación beta, consideramos inicialmente un análisis unidimensional en el eje x, por lo que la parte correspondiente al eje y, queda

anulada, quedando la ecuación beta expresada de la siguiente forma:

$$\frac{Tx}{(\Delta x)^2} [h^n_{i+1,j} - 2h^n_{i,j} + h^n_{i-1,j}] =$$

$$\frac{S}{2\Delta t} [h^{n+1}_{i,j} - h^{n-1}_{i,j}] \quad \dots (8.0)$$

Como podemos observar en el análisis unidimensional los valores correspondientes a la variable espacial j, permanecen constantes, por lo que la ecuación anterior (8.0), se puede expresar como:

$$\frac{Tx}{(\Delta x)^2} [h^n_{i+1} - 2h^n_i + h^n_{i-1}] =$$

$$\frac{S}{2\Delta t} [h^{n+1}_i - h^{n-1}_i] \quad \dots (9.0)$$

Despejamos  $h_i^{n+1}$ , para encontrar fn, que será casi igual a la función solución, tenemos:

$$\frac{2\Delta t Tx}{S(\Delta x)^2} [h^n_{i+1} - 2h^n_i + h^n_{i-1}] = [h_i^{n+1} - h_i^{n-1}]$$

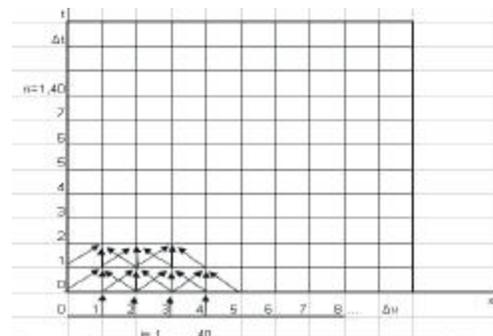
Hacemos  $b = \frac{2\Delta t Tx}{S(\Delta x)^2}$

Entonces la expresión queda como:

$$h_i^{n+1} = h_i^{n-1} + b[h^n_{i+1} - 2h^n_i + h^n_{i-1}] \quad \dots (10.0)$$

La ecuación (10.0) es el algoritmo que da la solución al problema planteado, es necesario aclarar que estamos utilizando para las variables espaciales la segunda derivada de Stirling y para la variable espacial, la primera derivada de Stirling, por lo que elaboramos el programa en fortran con las condiciones siguientes:

De acuerdo a nuestro análisis lógico de la ecuación (10.0), la secuencia lógica del proceso de iteraciones se desarrollan tal como mostramos en el siguiente gráfico:



Las flechas indican las interpolaciones y el sentido de las iteraciones a lo largo de la matriz solución, donde en las abscisas representamos a la variable espacial  $x$ , y en las ordenadas a la variable temporal  $t$ , cada celda es de dimensiones  $\Delta x$  y  $\Delta t$ , respectivamente.

Para que el algoritmo sea de tipo selft-starting, como vemos requiere de valores que están por debajo del eje  $x$ , estos valores los aproximaremos a cero para hacer que el algoritmo de la solución encontrada sea de tipo selft-starting.

Los valores de inicio están en el eje  $x$  y  $t$ , estos valores son los que expresamos en la siguiente tabla, el mismo que debe estar en un archivo tipo «dat», en el ordenador para que el programa se ejecute.

**Tabla 1.** Datos de entrada del programa que representan variaciones de  $h_i$ , en el tiempo  $t_0$ , por meses.

Año 1: 0.8, 1, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6, 0.5, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.2  
 Año 2: 1.1, 1.3, 1.9, 1.9, 2, 1.8, 1.7, 1.6, 1.6, 1.4, 1.3, 1  
 Año 3: 2.3, 2.4, 2, 2, 1.8, 1.7, 1.3, 1.3, 1.4, 1.7, 1.9, 2  
 Año 4: 2, 2.4, 2.5, 2.2

## 11. FUNCIONAMIENTO DEL MODELO MATEMÁTICO

Datos de entrada (INPUT)

Aparte de la tabla 1, que son las cargas y descargas del acuífero ayamonte, también se debe ingresar los siguientes datos:

Variación de la variable  $x$ ,  $\Delta x = 1000$  metros.

Coefficiente espec. almac.  $S = 10^{-8}$  m<sup>-1</sup>.

Coefficiente de transmisiv.  $T = 0.125$  m<sup>2</sup>/día.

Variación de la variable  $t$ ,  $\Delta t = 1$  mes.

Procesos de cálculo (PROCESO).

Cual será la evolución de las  $h$  alturas piezométricas  $h_i^{n+1}$  ha partir de un instante inicial, sin estímulos externos o teniendo en cuenta casi todos los datos conocidos como los caudales, infiltraciones, precipitaciones y caudales de salida, según el análisis inicial hecho.

Para simplificar el problema, suponemos que nuestro modelo será de una sola capa horizontal, que hemos discretizado con una rejilla de celdas cuadradas de tamaño  $\Delta x$ .

Representado por la ecuación:

$$h_i^{n+1} = h_i^{n-1} + b[h_{i+1}^n - 2h_i^n + h_{i-1}^n]$$

Información de salida (OUTPUT)

Un archivo denominado hidrogeo.dat, con los valores de  $h_i^{n+1}$ , en los 40 kilómetros de extensión del acuífero de Ayamonte, es decir a lo largo de su longitud total.

## 12. PROGRAMA EN FORTRAN PARA LINUX

El programa debe ejecutarse desde plataforma linux, con el compilador g77, cuya orden para compilar desde la consola es:

G77 - o hidrogeo.exe hidrogeo.f

Donde el archivo ejecutable se va a crear y el archivo de extensión f, es el programa fuente, cuyo contenido es:

```
implicit none
c Declaración de variables
c Vectores de selft-starting
real*4 ht(40), hx(40), aux1(40), aux2(40)
c Vector de operación
real*4 hc (40,2)
real*4 hp (40,40)
integer m,n,i,l,k,ii,nn,p,q,w,z
real*4 tiempo, deltat, x, deltax, T,S
real*4 b,AA,BB,CC,ss
c Lectura de datos de archivos txt
open (unit=2,file='hx.dat', status='old')
open (unit=3,file='ht.dat', status='old')
read (2,*) (hx(l), l=0,9)
read (3,*) (ht(k), k=0,9)
c Inicialización de variables
x = 0
l = 0
k = 0
```

```

nn = 0
ii = 0
i = 0
m = 0
tiempo = 0
deltax = 1000
deltat = 360
S = 0.0001
T = 0.0125
b = 0.d0
AA = 0.d0
BB = 0.d0
CC = 0.d0
c Inicialización de vector de operación hc (i,n)
do p = 0,1
do q = 0,9
if (p .eq. 0) hc(q,p) = hx(q)
if (p .EQ. 1) hc(q,p) = ht(q)
c write (*, *) q,p, hc(q,p)
enddo
enddo
c Declaración de archivo de salida
c open (unit=4, file='hidro.dat', status='new')
c Loop de iteraciones matriciales
n=0
i=0
do n=0,8
tiempo=tiempo+deltat
do i = 1,9
x = x+deltax
b = (2*tiempo*T)/(x**2)*S
if (n .EQ. 0) then
AA = hx(i-1)
Aux2(i-1) = hx(i-1)
else
AA = hc(i,n-1)
Aux2(i-1) = hc(i,n-1)
endif
if (i .EQ. 1) then
CC = ht(i-1)
else
CC = hc(i-1,n)
endif
if (i .EQ. 9) then
BB = hc(i,n)
else
BB = hc(i+1,n)
endif
hp(i,n+1) = AA + b*(BB - 2*hc(i,n) + CC)
Write(*, *) 'i,n, x, tiempo,b, hp'
write(*, *) i,n,x,tiempo,b,hp(i,n+1)
Aux1(i-1) = hp(i,n+1)
enddo
x = 1000
k = n+1
l = k+1
write(*, *) k,l
do m = k,l
do p = 0,9
if (m .EQ. k) hc(p,m) = hx(p)
if (m .EQ. l) hc(p,m) = aux2(p)
enddo
enddo
c write(*, *)
enddo
c stop
c imprime resultados de niveles piezometricos en
archivo Niv05.dat
open(unit = 1, file = 'Niv05.dat', status='new')
tiempo = 0
deltat = 360
x = 0
deltax = 1000
do w = 1, 9
tiempo = tiempo+deltat
do z = 1,9

```

```

x = x+deltax
write(1,*)'i,n, x, tiempo, b, hp'
write(1,*) z,w,x,tiempo,b,hp (z,w)
enddo
x = 0
enddo
stop
end

```

```

2 2 2000. 720. 8.09999984E-11 1.5
3 2 3000. 720. 8.09999984E-11 1.00999999
4 2 4000. 720. 8.09999984E-11 1.20000005
5 2 5000. 720. 8.09999984E-11 1.29999995
6 2 6000. 720. 8.09999984E-11 1.39999998
7 2 7000. 720. 8.09999984E-11 1.5
8 2 8000. 720. 8.09999984E-11 1.60000002
9 2 9000. 720. 8.09999984E-11 1.70000005

```

### 13. RESULTADOS DEL PROGRAMA

Como podemos observar en los resultados, debido a los parámetros S, cuyo valor es de 10-8, y T, que está en el orden de las décimas y, a todo ello el cálculo de la constante b, la variación de los niveles piezométricos calculados para variación de la variable x en 10 puntos y la variable t en 10 puntos (es decir en una matriz de 10,10), no son significativos, como podemos observar en los resultados donde el valor de b, es casi cero, por lo que los niveles piezométricos h (i,j), casi no varían significativamente.

Los valores de b, están definido por:

$$\frac{2\Delta t T x}{S(\Delta x)^2}$$

Los resultados del programa muestran el número de iteraciones representadas por i, n, la variación de x y t, el valor de la b y el nivel piezométrico, cuyos valores son los siguientes:

```

I n x tiempo b hp
1 1 1000. 360. 8.09999984E-11 1.20000005
2 1 2000. 360. 8.09999984E-11 1.39999998
3 1 3000. 360. 8.09999984E-11 1.5
4 1 4000. 360. 8.09999984E-11 1.00999999
5 1 5000. 360. 8.09999984E-11 1.20000005
6 1 6000. 360. 8.09999984E-11 1.29999995
7 1 7000. 360. 8.09999984E-11 1.39999998
8 1 8000. 360. 8.09999984E-11 1.5
9 1 9000. 360. 8.09999984E-11 1.60000002
1 2 1000. 720. 8.09999984E-11 1.39999998

```

```

1 3 1000. 1080 8.09999984E-11 1.39999998
2 3 2000. 1080. 8.09999984E-11 1.5
3 3 3000. 1080.8.09999984E-11 1.00999999
4 3 4000. 1080. 8.09999984E-11 1.20000005
5 3 5000. 1080. 8.09999984E-11 1.29999995
6 3 6000. 1080. 8.09999984E-11 1.39999998
7 3 7000. 1080. 8.09999984E-11 1.5
8 3 8000. 1080. 8.09999984E-11 1.60000002
9 3 9000. 1080. 8.09999984E-11 1.70000005
1 4 1000. 1440. 8.09999984E-11 1.39999998
2 4 2000. 1440. 8.09999984E-11 1.5
3 4 3000. 1440. 8.09999984E-11 1.00999999
4 4 4000. 1440. 8.09999984E-11 1.20000005
5 4 5000. 1440. 8.09999984E-11 1.29999995
6 4 6000. 1440. 8.09999984E-11 1.39999998
7 4 7000. 1440. 8.09999984E-11 1.5
8 4 8000. 1440. 8.09999984E-11 1.60000002
9 4 9000. 1440. 8.09999984E-11 1.70000005
1 5 1000. 1800. 8.09999984E-11 1.5
2 5 2000. 1800. 8.09999984E-11 1.00999999
3 5 3000. 1800. 8.09999984E-11 1.20000005
4 5 4000. 1800. 8.09999984E-11 1.29999995
5 5 5000. 1800. 8.09999984E-11 1.39999998
6 5 6000. 1800. 8.09999984E-11 1.5

```

7 5 7000. 1800. 8.09999984E-11 1.6000002  
 8 5 8000. 1800. 8.09999984E-11 1.7000005  
 9 5 9000. 1800. 8.09999984E-11 1.7000005  
 1 6 1000. 2160. 8.09999984E-11 1.0099999  
 2 6 2000. 2160. 8.09999984E-11 1.2000005  
 3 6 3000. 2160. 8.09999984E-11 1.2999995  
 4 6 4000. 2160. 8.09999984E-11 1.3999998  
 5 6 5000. 2160. 8.09999984E-11 1.5  
 6 6 6000. 2160. 8.09999984E-11 1.6000002  
 7 6 7000. 2160. 8.09999984E-11 1.7000005  
 8 6 8000. 2160. 8.09999984E-11 1.7000005  
 9 6 9000. 2160. 8.09999984E-11 1.7000005  
 1 7 1000. 2520. 8.09999984E-11 1.5  
 2 7 2000. 2520. 8.09999984E-11 1.0099999  
 3 7 3000. 2520. 8.09999984E-11 1.2000005  
 4 7 4000. 2520. 8.09999984E-11 1.2999995  
 5 7 5000. 2520. 8.09999984E-11 1.3999998  
 6 7 6000. 2520. 8.09999984E-11 1.5  
 7 7 7000. 2520. 8.09999984E-11 1.6000002  
 8 7 8000. 2520. 8.09999984E-11 1.7000005  
 9 7 9000. 2520. 8.09999984E-11 1.7000005  
 1 8 1000. 2880. 8.09999984E-11 1.5  
 2 8 2000. 2880. 8.09999984E-11 1.0099999  
 3 8 3000. 2880. 8.09999984E-11 1.2000005  
 4 8 4000. 2880. 8.09999984E-11 1.2999995  
 5 8 5000. 2880. 8.09999984E-11 1.3999998  
 6 8 6000. 2880. 8.09999984E-11 1.5  
 7 8 7000. 2880. 8.09999984E-11 1.6000002  
 8 8 8000. 2880. 8.09999984E-11 1.7000005  
 9 8 9000. 2880. 8.09999984E-11 1.7000005  
 1 9 1000. 3240. 8.09999984E-11 1.5  
 2 9 2000. 3240. 8.09999984E-11 1.0099999  
 3 9 3000. 3240. 8.09999984E-11 1.2000005

4 9 4000. 3240. 8.09999984E-11 1.2999995  
 5 9 5000. 3240. 8.09999984E-11 1.3999998  
 6 9 6000. 3240. 8.09999984E-11 1.5  
 7 9 7000. 3240. 8.09999984E-11 1.6000002  
 8 9 8000. 3240. 8.09999984E-11 1.7000005  
 9 9 9000. 3240. 8.09999984E-11 1.7000005

#### 14. CONCLUSIONES

1. Por efectos de límite de presentación del artículo, los resultados del programa que se encuentra en este artículo han sido ejecutados para una matriz de 10x10, al inicio el problema plantea una matriz de 40 por 40 dada la longitud geométrica del acuífero, sin embargo debemos decir que el programa hidrogeo.f, se puede ejecutar para la matriz inicial planteada.
2. El análisis y todo el desarrollo en el presente artículo, están realizados para la generalización del modelo matemático capaz de funcionar con tres variables espaciales y una variable temporal, lo que hace que el modelo matemático se convierta en un modelo multidimensional.
3. Aunque existen diversos programas informáticos como el Visual Mod Flow, Hidráulica, entre otros, lo que pretendemos en este trabajo es explicar el fundamento científico de la aplicación de los elementos finitos aplicados a la ingeniería, y precisamente lo expuesto aquí, es el principio básico utilizado en casi todo los programas informáticos existentes en el mercado.
4. El modelo matemático estudiado en este trabajo, es capaz de simular el flujo de los contaminantes disueltos en aguas subterráneas o acuíferos.

#### 15. BIBLIOGRAFÍA

1. Domenico, P.A. & Schwartz (1998). Physical and chemical hydrogeology, Edit. Wiley.
2. McDonald, M.G., Harbaugh, A.W. (1988). A modular three-dimensional finite difference ground-water flow model, US. Geological Survey, Techniques of Water-Resources Investigations. US.
3. Prickett, T.A. Lonquist, C.G. (1971). Select digital computer techniques for ground water resource evaluation, Illinois state water survey, US.

4. González Martínez, A. (1986). Hidrogeología de la región sur occidental de la provincia de Huelva. Tesis Doctoral. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Huelva.
5. Grande, J.A. (1995). Contaminación de aguas subterráneas en el sector costero occidental de Huelva. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Huelva. IGME.
6. Informe Técnico, Madrid. Salvany, J.M. y Custodio, E. (1995). Características litoestratigráficas de los depósitos pliocuaternarios del bajo Guadalquivir en el área de Doñana: implicaciones hidrogeológicas. *Revista de la Sociedad Geológica de España*, 8(1-2): 21-31.
7. Atlas hidrogeológico de Andalucía (1998). Ed. ITGE-Junta de Andalucía. Atlas hidrogeológico de la Provincia de Huelva (1993). Ed. Diputación Provincial de Huelva.
8. Custodio, E. (1995). Comportamiento y papel de las aguas subterráneas en Doñana: consecuencia de las extracciones. *Hidrogeología y recursos hidráulicos*, XX: 281-310.
9. Romero, E. (1998). Progresos en la investigación en zona no saturada. Universidad de Huelva. Servicio de Publicaciones. Huelva, España.
10. Charlote, Harbord (1998). Estimated Economic Value of Resource, USA.
11. Arthington, A. and B. Pusey. (1994). Essential Flow Requirements of River Fish Communities. AWWA Environmental Flows Seminar. Australia,

#### NOMENCLATURA UTILIZADA

- b Espesor del acuífero en metros (m).
- h Carga hidráulica en (m).
- K Conductividad hidráulica (m/día).
- Q Caudal (l/s).
- S Coeficiente de almacenamiento (constante).
- Ss Coeficiente de almacenamiento específico (m-1).
- Sy Coeficiente de producción específica (constante).
- s Abatimiento (m).
- T Transmisividad en (m<sup>2</sup>/día).
- Q Alteraciones adicionales del sistema, como la recarga o los bombeos (m<sup>3</sup>/s).