Marino Llanos Villajuán

LA LÓGICA DEL CONDICIONAL Y LA IMPLICACIÓN

Mucho es lo que se ha escrito y discutido sobre el condicional desde la antigüedad hasta el presente. Según Bochenski, Calímaco el bibliotecario de Alejandría, ya en el Siglo II a.c. decía que "Hasta los cuervos graznan en los tejados sobre cuál es la implicación correcta"[1].

Sin embargo, aún quedan por aclarar y resolver algunos problemas de suma importancia en torno a la naturaleza del condicional y la implicación. El presente artículo tiene por propósito resolver un problema sustancial sobre la tercera línea de la definición tabular del condicional e indicar las alternativas propuestas para superar los defectos de la implicación material.

La lógica del condicional

Examinemos la siguiente definición tabular estándar o "filónica" del condicional que aparece en todos los libros básicos de lógica y matemática:

P	Q	(P → Q)
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

(1)

1 Bochenski, I.M.: *Historia de la Lógica Formal*. Madrid, 1976. Gredos, p. 127.

Todo el problema a ser discutido en esta primera sección se reduce únicamente al problema generado por la tercera línea de la definición tabular del condicional.

En la práctica, los matemáticos y los lógicos se apoyan en la tercera línea de la definición tabular del condicional para fundamentar y justificar la validez de sus demostraciones, para lo cual, les basta citar dicha línea diciendo: "por lógica", "por la falsedad del antecedente", "como el antecedente es falso", etc... En todas estas referencias a dicha línea de la definición en cuestión, subyace una especie de principio o fundamento, que podemos enunciar como sigue:

"Todo condicional con antecedente falso es verdadero" **(2)**

o un poco más explícitamente:

"Si el antecedente de un condicional es falso y su consecuente es verdadero entonces el condicional es verdadero" **(2a)**

Así, veamos por ejemplo la demostración de un teorema en un manual de teoría de conjuntos:

Teorema 1. El conjunto vacío Ø es un subconjunto de todo conjunto.

Prueba. Sea A cualquier conjunto. Vamos a probar que el condicional

$x \in \emptyset \rightarrow x \in A$

es verdadero para todo x. Como el conjunto vacío Ø no tiene elementos, el enunciado "$x \in \emptyset$" es falso, en cambio, "$x \in A$" puede ser verdadero o falso. En cualquier caso, el condicional ($x \in \emptyset \rightarrow$ $\in A$) es verdadero de acuerdo a la tabla de verdad para el condicional. De este modo, $\emptyset \subseteq A$ para todo conjunto[2].

2 Lin Shwu-Yengt / Lin You-Feng: *Set Theory: An Intuitive Approach*. Houghton Mifflin Company. Boston, 1974, p. 29.

Por otra parte, el principio (2) se ha generalizado también a la *implicación lógica* (o llamada también *implicación formal* o *relación de consecuencia*), por cuanto, la implicación lógica no es más que una especie del condicional, otorgándole la categoría de "principio" o "ley", que podemos enunciar como sigue:

> *"Todo condicional con antecedente inconsistente es verdadero"* **(3)**

O, combinando la tercera línea de la definición del condicional con la primera línea:

> *"Si el consecuente de un condicional es verdadero entonces el condicional es verdadero, independientemente de que su antecedente sea verdadero o falso"* **(4)**

Muchos filósofos pragmatistas, o de otra formación académica, se han apoyado en estos principios para sostener que si las consecuencias de una teoría científica –física, económica, etc.– son verdaderas, entonces la teoría científica es verdadera. No importa que sus supuestos o fundamentos teóricos sean falsos o verdaderos.

Por ejemplo, Mario Bunge muestra que:"Según Milton Friedman (1953) las premisas de una teoría no tienen por qué ser verdaderas, sólo importa que sus consecuencias sean realistas. Pues es sabido que *cualquier falsedad implica innumerables proposiciones verdaderas o falsas*"[3].

Ello es corroborado por el mismo Friedman, cuando dice que: "Para ser importante, por lo tanto, *una hipótesis deberá ser descriptivamente falsa en sus supuestos*; no tomar en cuenta ninguna de las numerosas circunstancias contingentes porque su éxito mismo revela que carecen de pertinencia para los fenómenos que trata de explicar"[4].

3 Bunge, Mario: *Economía y Filosofía*. Tecnos, 1982, p. 181.

4 Friedman, Milton: "La Metodología de la Economía Positiva". Artículo publicado en la compilación de Frank Hahnn y Martín Hollis: *Filosofía y Teoría Económica*. FCE. México, 1986, p. 58.

Toda persona que conoce lógica sabe que el concepto de *verdad* que se está usando en la tabla (1) y en los principios (2), (2a), (3) y (4) es el de *verdad material* . Y que los condicionales e implicaciones de esta forma se denominan respectivamente *condicionales materiales* e *implicaciones materiales*. Ejemplos ilustrativos de los cuales, podrían ser los siguientes:

(a) Si la Luna es cuadrada entonces la Tierra es redonda.

(b) Si la Luna es cuadrada entonces la Luna gira alrededor de la Tierra.

(c) Si la nieve es blanca o la nieve no es blanca entonces Bruto mató a César.

(d) Si el hielo flota en el agua entonces Aconcagua está en Chile.

Así pues, los defensores de los principios (2), (2a), (3) y (4) como leyes o fundamentos para justificar la validez de inferencias, tendrían que admitir que los anteriores condicionales son "verdaderos" y dignos ejemplos de dichos principios.

Ahora, contrastemos los anteriores enunciados condicionales con los siguientes enunciados condicionales:

(e) Si se calienta la cera entonces la cera se endurece.

(f) Si la temperatura baja a 0% entonces el agua se congela.

(g) Si hay oxígeno y hay chispa entonces el papel se quema.

¿Cuál es la diferencia fundamental entre estos dos grupos de enunciados condicionales? Los enunciados de (a) a (d) *no son verificables por la experiencia*, por lo tanto, en este sentido de verdad no son verdaderos ni falsos, simplemente no tienen sentido, porque son simples resultados de yuxtaponer arbitrariamente en forma mecánica dos enunciados cualesquiera, cuyas referencias y sentidos no tienen ninguna relación entre sí. En cambio, los enunciados (e), (f) y (g) son verificables por la experiencia.

En primer lugar, mi propósito es demostrar –en la lógica proposicional– que los principios (2), (2a), (3) y (4) no tienen absolutamente ningún ejemplo verificable por la experiencia. Mejor dicho, no tienen una especie de *modelo real*. Por lo tanto, no pueden fundamentar ni justificar la validez de ninguna inferencia. En consecuencia, las inferencias justificadas apoyándose en dichos principios, o no son válidas lógicamente o son válidas, por otras razones, por otros principios o fundamentos.

En segundo lugar, mi propósito es demostrar que el principio (2) tiene algunos ejemplos verificables y comprobables formalmente en la lógica de predicados, y que el "principio" (3) no tiene ejemplo verificable en ninguna lógica.

En la lógica proposicional

En la tabla (1) las condiciones necesarias para que la definición del signo "→" sea válida son:

(I) Que P y Q sean variables cuyos valores son proposiciones simples,

(II) Que dichas variables sean distintas.

Es decir, el signo "→" se defina para variables proposicionales y no para fórmulas moleculares, porque los valores de éstas últimas se obtiene precisamente a partir de los valores de sus componentes atómicos, o sea, variables.

Por otra parte, el signo "→" se define para variables distintas, porque si fuera una misma variable, se trataría de una tautología, o sea, de una fórmula de la forma "P→P", la cual no es más que un caso particular de "P→Q".

Bajo estas condiciones, sobre las referencias y sentidos de las proposiciones representadas por P y Q en la tabla (1) sólo caben dos alternativas:

1ª o, hay una relación extralógica verificable entre las referencias y sentidos de dichas proposiciones, relación simbolizada por "→",

2ª o, no hay ninguna relación extralógica verificable entre las referencias y sentidos de dichas proposiciones.

Empecemos por la última alternativa. Si entre las referencias y los sentidos de dos proposiciones atómicas no existe ninguna relación verificable, es decir, la relación simbolizada por el signo "→" no es verificable, entonces dichas proposiciones serán empírica y lógicamente independientes entre sí. Algo así dice Wittgenstein en el *Tractatus*[5]:

> A las proposiciones que no tienen argumentos de verdad en común las llamamos independientes entre sí (5.152).

Y los hechos a que se refieren ambas proposiciones elementales serán también independientes, como asimismo dice Wittgenstein:

> Los hechos atómicos son independientes unos de otros. (2.061).

En consecuencia, en este caso el principio (2) no tiene ningu na interpretación o ejemplo verdadero verificable por la experiencia.

Ahora veamos la primera alternativa. Si entre las referencias y sentidos de dos proposiciones elementales simbolizadas por "P" y "Q" existe una relación verificable –relación simbólizada por "→"– y de antemano sabemos que la proposición representada por "P" en el antecedente es falsa, entonces el condicional será falso, en contra de lo que sostiene la tabla (1) y de los principios (2) y (2a). En cambio, dada la existencia de la relación condicional verificable entre ambas proposiciones, si el antecedente es verdadero, siendo el consecuente verdadero, el condicional será verdadero.

5 Wittgenstein, Ludwig: *Tractatus Logico Philosophicus*. AU. Madrid, 1957.

Por ejemplo, en el enunciado: "Si en el Polo Norte la temperatura está por encima de 0% entonces el agua se congela", el antecedente es falso y el consecuente es verdadero y de acuerdo a la tabla (1) y los principios (2) y (2a) es verdadero, pero de acuerdo a la verificación por la experiencia es un enunciado falso. En cambio, el enunciado: "Si en el Polo Norte la temperatura no está por encima de 0% entonces el agua se congela", es verdadero, porque su antecedente es verdadero.

En síntesis, si en un enunciado condicional con antecedente y consecuente atómicos, el antecedente es falso y el consecuente es verdadero, el nexo condicional no representa ninguna relación verificable, el enunciado condicional no tiene ningún sentido veritativo, es decir, no es verdadero ni falso, sin embargo, de acuerdo a la tabla (1) y a los principios (2) y (2a) es verdadero, contraviniendo a los hechos y a la experiencia; y si en un enunciado condicional con antecedente falso y consecuente verdadero el nexo condicional es verificable, el condicional es falso, sin embargo, de acuerdo a la tabla (1) y a los principios (2) y (2a) es verdadero, contradiciendo a la experiencia y a los hechos.

De esta manera queda demostrado que en la lógica proposicional la tercera línea de la tabla (1) y los principios (2) y (2a) no tienen ningún ejemplo realmente verdadero, y en consecuencia no sirven para justificar o fundamentar la validez de ninguna inferencia, y el concepto de verdad y su definición arbitraria usados en dichos casos no transcienden a la realidad, solamente se quedan en el papel.

En la lógica de predicados

En la lógica de predicados, la tercera línea de la tabla (1) y los principios (2) y (2a), si tienen algunos ejemplos y obviamente, también tienen muchos contraejemplos. Examinemos algunos ejemplos de los siguientes esquemas que corresponden a fórmulas predicativas de un solo argumento:

1a. Si todos los S son P entonces algunos S son P.
1b. Si todos los S son P entonces algunos S no son P.
2a. Si ningún S es P entonces algunos S no son P.
2b Si ningún S es P entonces algunos S son P.
3a. Si algunos S son P entonces ningún S es P.
3b. Si algunos S son P entonces algunos S no son P.
4a. Si algunos S no son P entonces algunos S son P.
4b. Si algunos S no son P entonces todos los S son P.

Démosles ahora, las siguientes interpretaciones:

1a. Si todos los peruanos son médicos entonces algunos peruanos son médicos.
1b. Si todos los peruano son médicos entonces algunos peruanos no son médicos.
2a. Si ningún peruano es médico entonces algunos peruanos no son médicos.
2b. Si ningún peruano es médico entonces algunos peruanos son médicos.
3a. Si algunos peruanos son chilenos entonces ningún peruano es chileno.
3b. Si algunos peruanos son chilenos entonces algunos peruanos no son chilenos.
4a. Si algunos arequipeños no son peruanos entonces algunos arequipeños son peruanos.
4b. Si algunos arequipeños no son peruanos entonces todos los arequipeños son peruanos.

La presunción de quienes –para justificar sus demostraciones– se apoyan, en la tercera línea de la tabla (1) y los principios (2) y (2a), es que de acuerdo a éste último, para que un condicional sea verdadero, es condición suficiente que su consecuente sea verdadero, aunque su antecedente sea falso.

Dicho en otras palabras, si el antecedente de un condicional es falso y su consecuente es verdadero, entonces el condicional siempre debe ser verdadero, sólo por ese hecho, por una extraña necesidad.

En los ejemplos anteriores, esa presunción se cumple sólo en los condicionales 1a y 2a, y sin embargo, en todos los demás condicionales sus antecedentes son falsos y sus consecuentes son verdaderos y de acuerdo a la tabla (1) y los principios citados, todos esos condicionales son "verdaderos", no obstante que no existe ningún nexo condicional verificable por la experiencia, ni comprobable formalmente.

En consecuencia, una vez más queda demostrado que el solo recurso *a priori* a la tercera línea de la tabla (1) o a los principios (2) y (2a) no puede servir de fundamento para justificar la validez de ninguna inferencia.

Condicionales con antecedentes inconsistentes

Se trata de condicionales de la forma:

$$(P \wedge \neg P) \rightarrow Q \qquad (5)$$

donde P representa a cualquier proposición simple o compuesta y Q asimismo representa a cualquier proposición. Toda proposición inconsistente de cualquier forma es reducible a una proposición de la forma (5).

Las proposiciones de la forma $(P \wedge \neg P)$ se denominan "contradictorias", "inconsistentes" o "lógicamente falsas". Contradictorias, porque la proposición representada por P contradice a la proposición representada por $\neg P$, al igual que su recíproca. Inconsistente, porque la proposición representada por P es incompatible con la proposición representada por $\neg P$, y su recíproca. Lógicamente falsa, porque todas las interpretaciones de la fórmula $(P \wedge \neg P)$ son falsas sin excepción, debido a que no existe en la realidad ningún estado de cosas, propiedad o relación que pueda de ser descrita con una proposición que tenga esa forma.

En consecuencia, en ninguna proposición de la forma (5), el nexo "$\rightarrow$" representa una relación verificable, ya que su antecedente jamás se refiere a ningún hecho en la realidad. Sin embargo, a partir de $(P\wedge\neg P)$ con la ayuda de la *Tautología de la Adición* –tautología cuestionada y rechazada en muchos sistemas de lógica no-clásicas– se puede deducir cualquier fórmula, pero eso es simplemente un artificio formal que no transciende del papel y tinta.

Superación de los defectos de la implicación estricta

Numerosos intentos se han hecho para superar los defectos de la implicación material y evitar las llamadas *paradojas de la implicación material,* que son semánticamente absurdas. Las fórmulas más conocidas son las siguientes:

(1) $p\rightarrow(q\rightarrow p)$

(2) $\neg p\rightarrow(p\rightarrow q)$

(3) $p\rightarrow(q \vee \neg q)$

(4) $(P \wedge\neg P)\rightarrow q$

Dichas fórmulas han recibido, respectivamente, más o menos las siguientes interpretaciones:

(1') Si una proposición es verdadera, es implicada por cualquier proposición.

(2') Si una proposición es falsa, implica a cualquier proposición.

(3') Una proposición verdadera es implicada por cualquier proposición.

(4') Una proposición falsa implica a cualquier proposición.

Para que el problema resulte más espectacular, démosles también los siguientes ejemplos proposicionales sobre cada una de las anteriores fórmulas, respectivamente:

(1'') Si la nieve es blanca, entonces si los mudos hablan la nieve es blanca.

(2'') Si la nieve no es blanca, entonces si la nieve no es blanca los mudos hablan.

(3'') Si el psicoanálisis es ciencia entonces en Puno hay petróleo o en Puno no hay petróleo.

(4'') Si Alberto es mentiroso y Alberto no es mentiroso el oro es inoxidable.

En lógica moderna, el primer intento serio fue propuesto por George Edward Moore, quien en 1920 en su artículo "External and Internal Relations"[6] propuso el término *entailment* –el cual no tiene una traducción rigurosamente equivalente en castellano– para referirse a una implicación en un sentido fuerte, en oposición a la implicación material empleada por Russell y Whitehead en *Principia Mathemathica*:

> Necesitamos, en primer lugar, algún término para expresar la *conversa* de aquella relación que afirmamos que vale entre una proposición particular q y una proposición particular p cuando afirmamos que q se sigue o es deducible de p. Usemos el término "entails" para expresar la conversa de esta relación.

Es decir, *entails* expresa la conversa de "q es consecuencia lógica de p" o "q se deduce de p". Y, ¿cuál es esa conversa? Pues, "p entails q" que se ha intentado traducir por "p entraña q", "p contiene q", etc.

Esta propuesta de Moore fue puramente conceptual y él no llegó a formalizarla. Uno de los análisis y esfuerzos serios por definir el concepto de *entailment* se debe tal vez a G.H. von Wright[7],

6 Moore, G.E.: "External and Internal Relations'. *Proceedings of the Aristotelian Society*. 1919 - 1920. London, pp. 291-295 y 301.

7 Wright, G.H. von: *Logical Studies*. London, 1962. Kegan Paul, p. 181.

quien intentó definir este concepto en base a las nociones de "demostrabilidad" y "posibilidad" de la siguiente manera:

> p implica q, si y sólo si p→q es demostrable independiente de la demostración de la falsedad de p o la verdad de q[8]. Y usando los símbolos "M" y "D" para significar "posible" y "demostrado", respectivamente: "p implica q" = def. "MD (p → q) ∧ Dp ∧ Dq".

Otro intento serio de plantear formalmente el *entailment* se debe a A.R. Anderson y N.D. Belnap quienes en 1966 en su "Cálculo Puro de Entailment"[9] desarrollaron un sistema de axiomas usando únicamente a "→" como símbolo primitivo y a "L" para "necesidad" logrando desterrar de la clase de los teoremas del sistema a las fórmulas paradójicas de la implicación material.

Otro intento de superar formalmente los defectos de la implicación material de la lógica extensional excluyendo los teoremas paradójicos de la clase de los teoremas mediante el concepto de *implicación estricta* fue llevada a cabo en 1932 por C.I. Lewis y C.H. Langford en su obra *Symbolic Logic,* quienes definieron su nuevo concepto de implicación como sigue:

> ... tenemos el propósito más amplio de desarrollar un cálculo basado sobre un significado de "implica", tal que "p implica q" sea sinónimo con "q es deducible de p" ... el sistema aquí a ser desarrollado necesita un nombre. Llamaremos a su relación de implicación "implicancia estricta" ... la relación de implicación estricta puede ser definido en términos de negación, posibilidad y producto:
>
> $$p \prec q . \equiv . \sim L \ (p . \sim q)$$ [10]

De este modo, "p implica q", o "p implica estrictamente q" significa "Es falso que sea posible que p sea verdadero y q falso" o,

8 En este sistema, "→ " no tiene sentido veritativo funcional.

9 Hughes, G.E. & Creswell, M.J.: *An Introduction to Modal Logic.* London, 1968, Methuen and Ltd., pp. 298-301.

10 "⥽ " es el nexo condicional de implicación estricta.

"El enunciado 'p es verdadero y q es falso' no es autoconsistente. Cuando q es deducible de p, decir que 'p es verdadero y q es falso' es afirmar implícitamente una contradicción".

La propuesta de Lewis y Langford no ha tenido el éxito esperado, porque dentro de su mismo sistema volvieron a surgir nuevamente paradojas de la implicación material como los siguientes:

$$p \multimap (q \rightarrow p)$$

$$(p \rightarrow q) \multimap (p \rightarrow \neg q)$$

$$(p \wedge \neg p) \multimap q$$

etc.

También dentro del mismo contexto del lenguaje de la lógica extensional, y utilizado el mismo concepto de implicación estricta, hubo otro intento de evitar las llamadas "paradojas de la implicación material", debido a D. Hilbert y W. Ackermann, quienes en 1962 en su obra *Elementos de Lógica Teórica*[11] lograron eliminar los teoremas paradójicos de la clase de las paradojas, mediante ciertos ajustes formales y estipulaciones en los axiomas.

Finalmente, han habido intentos por superar los defectos de la implicación material, mediante el concepto de *relevancia* y mediante la distinción precisa entre el "condicional" y la "implicación", en el sentido de que el condicional simplemente expresa una relación al nivel del lenguaje-objeto, se refiere a hechos, y en cambio, la implicación expresa relaciones formales entre enunciados, relaciones sintácticas. Por la brevedad de este trabajo no entraré en mayores detalles.

Pues bien ¿qué relación hay entre los tres primeros intentos bosquejados arriba? Hablando estrictamente, los conceptos de "implicación material", "implicación estricta" y *entailment*, denotan un

11 Hilbert, D. y Ackermann, W.: *Elementos de la Lógica Teórica*. Tecnos. Madrid, 1962.

mismo concepto pero en distintos grados de rigor. Este rigor consiste en exigir distintos grados de atingencia entre el antecedente y el consecuente. Partiendo de algo así como del grado cero, –que correspondería al concepto de implicación material– se llega hasta el grado máximo de atingencia con el *entailment*, que exige una conexión rigurosa entre el antecedente y el consecuente. Se trata de una relación de menos a más, de tal modo que una implicación válida en el *entailment*, es también válida en la implicación estricta, y a su vez, una implicación válida en la implicación estricta es válida en la implicación material, pero la relación inversa no siempre es cierta.