PESQUIMAT , Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XVI N°2, pp. 24 - 32, Lima - Perú, Octubre 2013

EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS MIXTO SOBRE PARTICIONES IRREGULARES PARA ANALIZAR LA CONTROLABILIDAD EN LA FRONTERA, EN RELACIÓN CON LA ESTABILIZACIÓN EN LA ECUACIÓN DE LA ONDA

Claudio Fernando Balcazar Huapaya [1], *Maruja Yolanda Gavilán Gonzales*[2],
Maria del Carmen Cáceres Huamán[3]

Resumen: Se investiga las propiedades de controlabilidad y estabilización para la semidiscretización en una dimensión de la ecuación de onda, donde en esta semidiscretización, las mallas no son uniformes. Se estudia la controlabilidad en la frontera. Se usa un esquema de elementos finitos mixtos, y se construye una sucesión de controles discretos v_n para la ecuación de onda semidiscreta. Analizamos la convergencia de esta sucesión y se prueba que asumiendo M- regularidad de las mallas la sucesión v_n converge a un control continuo.

Palabras clave: Controlabilidad en la frontera, estabilización, elementos finitos. continuo.

FINITE ELEMENT METHOD FOR PARTITIONING IRREGULAR MIXED TO DISCUSS BORDER CONTROL IN, WITH RESPECT TO THE STABILIZATION IN WAVE EQUATION

Abstract: One investigates the controllability properties stabilization for the semidiscretizacion in one dimension of wave equation; where in this semidiscretizacion the meshes are not uniforms. The controllability in the boundary studies. A scheme of mixed finite elements is used; and it is constructed a succession of discreet controls V_n for the semidiscreet equation of wave. We analyzed the convergence of this succession and test that assuming M-regularity of the meshes, the succession v_n it converges to a continuous control.

Keywords: Controllability in the boundary, stabilization, finite elements.

1. Introducción

El problema estudiado es una ecuación diferencial parcial tipo hiperbólico, específicamente, la ecuación de la onda unidimensional con término de amortiguamiento, condiciones iniciales y de frontera de la forma siguiente:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + a\,(x)\,u_t = 0, \text{ en } (0,1)\times(0,\infty) \\ u\,(0,t) = u\,(1,t) = 0, \text{ en } (0,\infty) \\ u\,(x,0) = u^0\,(x) \\ u_t\,(x,0) = u^1\,(x) \end{cases} \tag{1}$$

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: cbalcazarh@unmsm.edu.pe
[2]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail:mgavilang@unmsm.edu.pe
[3]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail:mcaceresh@unmsm.edu.pe

donde $u^0 \in H_0^1(0,1)$, $u^1 \in L^2(0,1)$ y $a(x)$ es una función de amortiguamiento el cual es acotado no negativo y existe $M > 0$ tal que $a(x) > M$ sobre un subintervalo $J \subset (0,1)$.
Consideremos la ecuación de onda con disipación sobre el intervalo $(0,1)$

$$u_{tt} - u_{xx} + a(x)\,u_t = 0,$$

donde $a(x)$ es una función de amortiguamiento el cual es asumido acotado no negativo y acotado inferiormente por número positivo sobre un subintervalo $J \subset (0,1)$.
Consideremos la energía

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(u_t^2 + u_x^2\right) dx \tag{2}$$

tenemos

$$\frac{dE(t)}{dt} = -2\int_0^1 a(x)\,u_t^2 dx$$

de donde la energía es decreciente y este decaimiento es exponencial.
Consideremos la ecuación de onda conservativa

$$\begin{cases} z_{tt} - z_{xx} = 0 \text{ en } (0,1) \times (0,\infty) \\ z(0,t) = z(1,t) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

con datos iniciales $\left(z^0, z^1\right) \in H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$.

La controlabilidad en la frontera de la ecuación de onda continua en tiempo T, es un problema que consiste en dar cualquier dato inicial $\left(u^0, u^1\right) \in L^2(0,1) \times H^{-1}(0,1)$ y luego encontrar, si es posible, una función $v(t)$ tal que que la solución de

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ en } (0,1) \times (0,T) \\ u(0,t) = v(t) \\ u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = u^0(x) \in L^2(0,1) \\ u_t(x,0) = u^1(x) \in H^{-1}(0,1) \end{cases} \tag{4}$$

satisface $u(x,T) = 0,\ u_t(x,T) = 0$ en $[0,1]$.
El sistema (4) es controlable en tiempo T si y sólo si cada solución z de (3) con datos iniciales $\left(z^0, z^1\right) \in H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$ satisface

$$E(0) \leq c\int_0^T z_x^2 dt$$

para alguna constante $c > 0$.
Definimos una malla (o partición) $S^{(n)}$ como un conjunto de $n+2$ puntos del intervalo $[0,1]$

$$0 \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1$$

se dice que S es M-regular si

$$\frac{\text{máx}\{x_{j-1} - x_j\}}{\text{mín}\{x_{j-1} - x_j\}} \leq M$$

Denotamos $h_j = x_{i+1} - x_i$. Se deduce el esquema correspondiente al problema (1):

$$\forall(\psi,\phi) \in L^2(0,1) \times H_0^1(0,1)$$

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 u(x,t)\,\psi dx = \int_0^1 z(x,t)\,\psi dx$$

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 z(x,t)\,\phi dx = \int_0^1 u_x(x,t)\,\phi_x dx - 2\int_0^1 a(x)\,z(x,t)\,\phi dx$$

con las bases

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{j-1}}{h_{j-1}} & \text{si} \quad x \in (x_{j-1}, x_j) \\ \dfrac{x_{j+1} - x}{h_j} & \text{si} \quad x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\psi_j(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x \in (x_{j-1}, x_{j+1}) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y se deduce el sistema:

$$\begin{aligned} \frac{h_{j-1}}{4}\left(u''_j + u''_j\right) + \frac{h_j}{4}\left(u''_j + u''_{j+1}\right) &= \frac{u_{j+1} - u_j}{h_j} - \frac{u_{j-}u_{j-1}}{h_{j-1}} \\ &- \frac{2h_{j-1}a_{j-1}}{4}\left(u'_{j-1} + u'_j\right) + \frac{2h_j a_j}{4}\left(u'_j + u'_{j+1}\right); j = 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{5}$$

Este sistema necesita solamente de condiciones clásicas de frontera:

$$u_0 = u_{n+1} = 0$$

En el esquema de elementos finitos mixto sobre una malla $S^{(n)}$ no uniforme para la ecuación de onda (1) se tiene que la energía $E_S(t)$ de este esquema es disipativo y tiene decaimiento exponencial uniforme con respecto a la malla.
Consideremos una sucesión de mallas $(S^n), n \in \mathbb{N}$. Asumimos que cada $S^{(n)}$ tiene exactamente $n + 2$ puntos

$$0 = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)} < x_{n+1}^{(n)} = 1.$$

Denotamos $h_j^{(n)} = x_{j+1}^{(n)} - x_j^{(n)}$ y definimos

$$h^{(n)} = \min_{1 \le j \le n} h_j^{(n)}, \; H^{(n)} = \max_{1 \le j \le n} h_j^{(n)}$$

Asumiremos para toda las subdivisiones las siguientes propiedades de los coeficientes de amortiguamiento:

$$\begin{aligned} &0 \le a_j \le k, \forall j \\ &a_j \ge \alpha > 0, \text{ si } x_j \in J, \bar{J} \subset (0,1) \end{aligned}$$

Dado $M > 0$, definimos $\mathcal{A}^M$ como el conjunto de todas las sucesiones de mallas M-regulares

$$\mathcal{A}^M = \left\{ \left(S^{(n)}\right), n \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, \frac{H^{(n)}}{h^{(n)}} \le M \right\}$$

Se define la energía discreta por

$$E^{(n)}(t) = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} h_j \left(\frac{u_{j+1}(t) - u_j(t)}{h_j}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} h_j \left(\frac{u'_{j+1}(t) - u'_j(t)}{2}\right)^2$$

Esta cantidad es decreciente de acuerdo a la relación:

$$\frac{dE^{(n)}}{dt}(t) = -2\sum_{j=0}^{n} h_j a_j \left(\frac{u'_{j+1}(t) + u'_j(t)}{2}\right)^2$$

2. Metodología

Uno de los teoremas centrales es el siguiente:
Teorema 2.1 Dado $M > 0$, existe dos constantes positivas A y μ tal que para toda sucesión de mallas $(S^n)_n \in A^M$, para todo n y para todo dato inicial $(u^{0,(n)}, v^{0,(n)})$ la solución $u^{(n)}$ de la ecuación (5) satisface:

$$E^n(t) \leq A \exp(-\mu t) E^n(0).$$

Se considerará la desigualdad de observabilidad asociado al problema discretizado (5)

$$E(0) \leq c \int_0^T \sum_{j=0}^{n} h_j a_j \Big(\frac{v'_{j+1} + v'_j}{2} \Big) dt \tag{6}$$

Para la prueba del teorema (2.1) se divide en 2 etapas:

1. Se establece la equivalencia entre el decaimiento exponencial uniforme y la desigualdad de observabilidad (6)

2. Realizamos un análisis espectral de la ecuación conservativa con cualquier hipótesis sobre la malla. Con esto se prueba la existencia de saltos positivos entre los autovalores de cada malla. Por el lema de Ingham's es suficiente probar que (6) se cumple para todos los autovectores.

3. Estabilización y Observabilidad

Prueba de la desigualdad de observabilidad (6)
Se usa el lema de Ingham's sobre series de Fourier no armónicas. Este lema es:

Lema 3.1 Sea $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de números reales y $\gamma > 0$ es tal que:

$$\lambda_n - \lambda_{n-1} \geq \gamma > 0 \ , \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Para cualquier $T > \frac{2\pi}{\gamma}$ existe una constante positiva $c = c(T, \gamma) > 0$ tal que para cualquier sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$

$$c \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mid a_n^2 \mid \leq \int_0^T \mid \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda n t} \mid^2 dt.$$

Criterio: Dada una sucesión de subdivisiones $(S^{(n)})_n$ la desigualdad de observabilidad (2.1) se cumple uniformemente si y sólo si

$$\sup_n \sup_{k\in\{1,\cdots,n\}} \frac{E^{k,(n)}}{I_J^{k,n}} < \infty \tag{7}$$

donde $E^{k,(n)}$ es la energía del k ésimo vector $(u^k, i\lambda^k u^k)$ correspondiente a la malla $S^{(n)}$ y $I_J^{k,(n)}$ la norma discreta $L^2(J)$ sobre $S^{(n)}$ de $i\lambda^k u^k$

$$I_J^{k,n} = \sum_{x_j \in J} \lambda_j \mid \lambda^k \mid^2 \Big(\frac{u_j^k + u_{j+1}^k}{2} \Big)^2$$

con este criterio se prueba que (7) implica (6). Ver[3]

4. Problema de controlabilidad exacta en la frontera

Dado cualquier dato inicial $\left(u^0, v^1\right) \in L^2(0,1) \times H^{-1}(0,1)$ encontrar una función $v \in L^2(0,T)$ tal que la solución u del siguiente problema

$$\begin{array}{l} u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ en } (0,1) \times (0,\infty) \\ u(1,t) = 0, u(0,t) = v(t) \\ u(x,0) = u^0(x), u_t(x,0) = u^1(x) \end{array} \tag{8}$$

satisface $u(T) = 0,\ u_t(T) = 0$. Usando el método de unicidad de Hilbert (HUM) (ver [4]); se ha probado en [3] que esto es posible en cualquier $T > 2$. Se puede obtener el control mínimo en la norma L^2 minimizando la funcional

$$\mathcal{J} : H_0^1(0,1) \times L^2(0,1) \to \mathbb{R}$$

$$\mathcal{J}\left(w^0, w^1\right) = \frac{1}{2}\int_0^T [w_x(0,t)]^2\, dt + \int_0^1 u^0(x)\, u_t(x,0)\, dx - \left\langle u^0, w(0,0)\right\rangle_{H^1, H_0^1} \tag{9}$$

donde w es la solución de la ecuación homogénea adjunta:

$$\begin{array}{l} w_{tt} - w_{xx} = 0 \text{ en } (0,1) \times (0,T) \\ w(x,T) = w(1,t) = 0 \\ w(x,T) = w^0(x),\ w_t(x,T) = w'(x) \end{array} \tag{10}$$

Este funcional es coerciva cuando $T > 2$ y este implica la existencia de un minimizador $\left(\widehat{w}^0, \widehat{w}^1\right)$, único debido a la convexidad de $\mathcal{J}$.
Se prueba por argumento de dualidad que $v(t) = \widehat{w}_x(0,t)$ es el control minimal (norma L^2) donde $\widehat{w}$ es la solución de (10) con dato inicial $\left(\widehat{w}^0, \widehat{w}^1\right)$.

5. Semidiscretización

Deducimos el esquema asociado al problema de controlabilidad de (8). Este esquema es similar al presentado en la sección 1.
Consideremos las variables ϕ_j y ψ_j

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{j-1}}{h_{j-1}} & \text{si } x \in (x_{j-1}, x_j) \\ \dfrac{x_{j+1} - x}{h_j} & \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}] \end{cases}$$

$$\psi_j = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \in (x_{j-1}, x_{j+1}) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y además

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{h_0} & \text{si } x \in (0, x_1) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y tenemos:

$$u = v(t)\,\phi_0 + \sum_{j=1}^{n} u_j(t)\,\phi_j$$

$$z = \sum_{j=1}^{n} b_j \psi_j$$

y la ecuación (8) conduce al siguiente esquema

$$\begin{cases} \dfrac{h_{j-1}}{4}\left(u''_{j-1}+u''_j\right)+\dfrac{h_j}{4}\left(u''_j+u''_{j+1}\right)=\dfrac{u_{j+1}-u_j}{h_j}-\dfrac{u_j-u_{j-1}}{h_{j-1}};\ j=1,2,3,\ldots,n \\ u_0\left(t\right)=v\left(t\right);\ u_{n+1}\left(t\right)=0 \\ u_j\left(0\right)=u_j^0;\ u'_j\left(0\right)=u_j^1,\quad j=1,2,3,\ldots,n \end{cases} \tag{11}$$

donde $\left(u_j^0,u_j^1\right)$ representa una discretización del dato inicial $\left(u^0,u^1\right)$ dado en (8).
El problema es entonces encontrar una función $v\left(t\right)$ tal que la solución de (11) satisface

$$u_j\left(T\right)=0,\quad u'_j\left(T\right)=0,\quad j=1,2,3,\ldots,n. \tag{12}$$

A continuación elegimos controles de (11) convergente al control HUM de la ecuación (8).
Primero construimos una sucesión v_n de controles de (11) en el tiempo T.
Dado $T>2$, elegimos $E>0$ tal que $T-4\varepsilon>2$ y una función ρ de clase C^1 tal que

$$\rho\left(t\right)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad t\in\left[2\varepsilon,T-2\varepsilon\right] \\ 0 & \text{si} \quad t\in\left[0,\varepsilon\right]\cup\left[T-\varepsilon,T\right] \end{cases}$$

y $0\leq\rho\left(t\right)\leq1,\ \forall t$. Consideramos las siguientes funcionales $\mathcal{J}^n$.

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^n\left(w_j^0,w_j^1\right)&=\frac{1}{8}\int_0^T\rho\left(t\right)\left|w'_1\right|^2\left(t\right)dt+\frac{1}{2h_0^2}\int_0^T w_1^2\left(t\right)dt \\ &-\frac{h_0}{4}\left(u_1^1w_1\left(0\right)-u_1^0{w'}_1\left(0\right)\right) \\ &-\frac{1}{4}\sum_{j=1}^n h_j\left(\left(w_j\left(0\right)+w_{j+1}\left(0\right)\right)\left(u_j^1+u_{j+1}^1\right)\right) \\ &-\left(w'_j\left(0\right)+w'_{j+1}\left(0\right)\right)\left(u_j^0+u_{j+1}^0\right) \end{aligned} \tag{13}$$

donde $w\left(t\right)=\left(w_1\left(t\right),\ldots,w_n\left(t\right)\right)$ es la solución del sistema conservativo adjunto:

$$\begin{cases} \dfrac{h_{j-1}}{4}\left(w''_{j-1}+w''_j\right)+\dfrac{h_j}{4}\left(w''_j+w''_{j+1}\right)=\dfrac{w_{j+1}-w_j}{h_j}-\dfrac{w_j-w_{j-1}}{h_{j-1}} \\ w_0\left(t\right)=w_{n+1}\left(t\right)=0 \\ w_j\left(T\right)=w_j^0;\ w'_j\left(T\right)=w_j^1,\ j=1,2,3,\ldots,n \end{cases} \tag{14}$$

La versión discreta del método HUM es enunciado en la siguiente proposición:

Proposición 5.1 La funcional $\mathcal{J}^n$ definido en (13) es estrictamente convexo, coercivo y tiene un único minimizador $\left(\widehat{w}_j^{n,0},w_j^{n,1}\right)$. Además, para todo n, si v_n es la solución de

$$\begin{cases} -\dfrac{h_0}{4}v^n+\frac{1}{h_0}v=-\dfrac{1}{4}\left(\rho\widehat{w}'_1\right)'+\dfrac{1}{h_0^2}\widehat{w}_1 \\ v'\left(0\right)=v'\left(T\right)=0 \end{cases} \tag{15}$$

donde $\widehat{w}$ es la solución de (14) con datos iniciales $\left(\widehat{w}^{n,0},\widehat{w}^{n,1}\right)$, entonces v_n es un control de (11) en tiempo T.

De esta proposición se deduce que para la sucesión v_n tenemos que la solución u de (11) con la condición de frontera $u_0(t) = v_n(t)$ satisface:

$$-\frac{h_0}{4}\left(u_1'(T)\,w_1^0 - u_1(T)\,w_1'\right) - \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n} h_j\left(\left(w_j^0 + w_{j+1}^0\right)\left(u_j'(T) + u_{j+1}'(T)\right)\right)$$
$$-\left(w_j^1 + w_{j+1}^1\right)\left(u_j(T) + u_{j+1}(T)\right) = 0$$

para todo $\left(w_j^0, w_j^1\right)$ con la notación $w_{n+1}^0 = w_{n+1}' = 0$. De aquí que se cumple

$$u_j(T) = 0,\ u_j'(T) = 0,\ j = 1, 2, 3, \ldots, n$$

6. Convergencia de los controles v_n

Consideremos las versiones discretas de las normas en L^2, H^{-1} y H_0^1 para la sucesión de mallas $(S^{(n)})_n \in \mathcal{A}^M$.

$$\begin{cases} \|a\|_0^2 = \sum\limits_{k=0}^{n} h_k\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right)^2 \\ \|a\|_{-1}^2 = \sum\limits_{k=0}^{n} h_k\left(h_k\frac{a_k + a_{k+1}}{4} + \sum\limits_{j=k+1}^{n} h_j\frac{a_j + a_{j+1}}{2}\right)^2 \\ \|a\|_1^2 = \sum\limits_{k=0}^{n} h_k\left(\frac{a_{k+1} - a_k}{h_k}\right)^2 \end{cases} \tag{16}$$

y la hipótesis:

$$\left\|u^0\right\|_0^2 + \left\|u^1\right\|_{-1}^2 \le c \tag{17}$$

Proposición 6.1 Asumiendo (17) y que $T > 2$, entonces las funcionales $(\mathcal{J}^n)$ correspondientes a una sucesión de mallas $(S^n) \in \mathcal{A}^M$ son uniformemente coercivas con respecto a n.
Observación: Se prueba está proposición, usando la hipótesis que las mallas son M-regulares y del Lema 3.1 que para cualquier autovector $\left(u^k, i\lambda^k u^k\right)$ tenemos

$$E^k \le M^2\left(\frac{\left|u_1^k\right|^2}{|h_0|} + \left|\lambda^k\right|^2\left|\frac{u_1^k}{2}\right|^2\right)$$

donde $i\lambda$ es el autovalor de

$$\frac{-\lambda^2}{4}\left(h_{j-1}\left(u_j + u_{j-1}\right) + h_j\left(u_j + u_{j+1}\right)\right) = \frac{u_{j+1} - u_j}{h_j} - \frac{u_j - u_{j-1}}{h_{j-1}}$$
$$u_0 = u_{n+1} = 0$$

Proposición 6.2: La sucesión de controles (v_n) dado en la proposición 2 satisface la siguiente estimación:

$$\int_o^T\left(\frac{h_0^2}{4}\left|v_n'(t)\right|^2 + \left|v_n(t)\right|^2\right)dt \le c_1\left(\left\|u^0\right\|_0 + \left\|u'\right\|_{-1}\right)^2$$

además, la energía de los pares minimizantes $\left(\widehat{w}_j^{n,0}, \widehat{w}_j^{n,1}\right)$ es uniformemente acotado con respecto a n y satisface

$$\int_0^T\left(\frac{\rho(t)}{4}\left|(\widehat{w}_1^n)'(t)\right|^2 + \frac{1}{h_0^2}\left|\widehat{w}_1^n(t)\right|^2\right)dt \le c$$

Prueba: ver [3]

Definición 6.1 Dada una sucesión de mallas $(S^n)_n$ diremos que la sucesión de datos discretos $(a^n, b^n)_n$ definidos sobre las mallas S^n es fuertemente convergente a (a, b) en $L^2(0,1) \times H^1(0,1)$ si:

$$\begin{aligned} pa^n &\to a \text{ en } L^2(0,1) \\ rb^n &\to \left(x \to \int_x^1 b(s)\, ds\right) \text{ en } L^2(0,1) \end{aligned}$$

La proposiciones (6.1) y (6.2) conducen al siguiente resultado.

Proposición 6.3 Sea $\left(u^0, u^1\right) \in L^2(0,1) \times H^{-1}(0,1)$. Dado $M > 0$ consideramos una sucesión de mallas $(S^n) \in \mathcal{A}^M$ y una sucesión de datos iniciales $\left(u^{0,n}, u^{1,n}\right)$ el cual converge fuertemente a $\left(u^0, u^1\right)$ en $L^2(0,1) \times H^{-1}(0,1)$ en el sentido de la definición (6.1). Entonces la sucesión de controles $(v_n)_n$ dado por la proposición (5.1) es fuertemente convergente en $L^2(0,1)$ a el control HUM v para el problema (8) con dato inicial $\left(u^0, u^1\right)$.

La proposición (6.3) se prueba aplicando la proposición (6.2), excepto la extracción de subsucesiones. Tenemos que existe un control v tal que:

$$v_n \to v \text{ en } L^2(0,T) \text{ débilmente}$$

y

$$h_0 v_n' \to 0 \text{ en } L^2(0,T) \text{ débilmente}$$

En [3] se prueba que v tiene la forma $a_x \widehat{w}(0,t)$ donde $\widehat{w}$ es una solución del sistema conservativo adjunto con dato inicial $\left(\widehat{w}^0, \widehat{w}^1\right)$ de (10).

7. Conclusiones

1. En la proposición (6.3) la función $v \in L^2(0,1)$ es un control admisible. Lo cual implica que v es dado por el método HUM en el caso continuo (1), minimizando la funcional $\mathcal{J}$ dado por (9).

2. Se ha dado un esquema semi-discreto deducido de un método de elementos finitos mixtos para la ecuación 1d de la ecuación de onda, el cual tiene un buen comportamiento con respecto a la estabilización y propiedad de controlabilidad sobre una gran clase de mallas uniformes que son las M-regular.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] S. Cox y E. Zuazua, *The rate at which energy decays in a string damped at* one end. Indiana University Math. J. 44(2):545-573,1995

[2] S. Ervedoza and F. Zuazua, *Perfectly matched layers en 1-d: Energy decay for continuoous y semi-discreta waves.* Submitted 2007.

[3] S.Ervedoza, *On the mixed finita element method for the 1d ware equation: Stabilization and controllability propertiecs on non-uniform meshes.*

[4] J.L. Lions, *Controlabilite exacta.* Tomo 1. Mason 1988.

[5] Sorin Micu and Enrrique Zuazua, *An Introduction to the Controllability of partial Differential Equantions.* Grant BFH 2002-03345 of MCYT (Spain). Num. 33, 407-438 (1999).

[6] Zuazua E., *Contrabilidad exacta y estabilización de la ecuación de ondas* 1990. Departamento de Matemática Aplicada Universidad Cumpletense 28040 Madrid.