

MODELO BÁSICO PARA EXPLICAR EL PROCESO DE LA TOMOGRAFÍA COMPUTARIZADA USANDO LA RECONSTRUCCIÓN ALGEBRÁICA

*Edwin Chávez Ramírez*¹, *Efraín Carbajal*², *Victoriano Yauri Luque*³,
*Andrés Guardia Cayo*⁴, *Cristian Loli Prudencio*⁵

Resumen: La tomografía computarizada (TC) es uno de los grandes avances tecnológicos utilizados en medicina para el diagnóstico de enfermedades, sin embargo es también una técnica usada en otras áreas, tales como química aeroespacial, radioastronomía, etc. El objetivo de la TC es reconstruir la parte interna de un objeto sin tener la necesidad de abrirlo, dicho procedimiento es conocido como ensayo no destructivo. Para lograr dicho propósito, la TC usa la atenuación que sufren los rayos X al atravesar por dicho objeto con dicha información se reconstruye la parte interna del objeto, es decir un problema inverso. En este artículo nos salimos de la teoría y nos centramos en la práctica mostrando de manera concreta cómo se reconstruye la parte interna de un objeto usando un método algebraico conocido como reconstrucción algebraica.

Palabras clave: Tomografía computarizada, reconstrucción algebraica, TC, problema inverso.

BASIC MODEL TO EXPLAIN THE COMPUTED TOMOGRAPHY USING ALGEBRAIC RECONSTRUCTION PROCESS

Abstract: Computed tomography (CT) is one of the major technological advances used in medicine to diagnose diseases, but it is also a technique used in other areas, such as aerospace chemistry, radio astronomy, etc.. The goal of CT is to reconstruct the inside of an object without the need to open it, this process is known as non-destructive testing. To achieve this purpose, the TC uses suffering atenuación X-rays to go through said object with said internal information of the object is reconstructed, this is an inverse problem. We got out of the theory and we focus on the practice showing concretely how the inside of an object using an algebraic method known as algebraic reconstruction for a specific event is reconstructed.

Keywords: Computed tomography, algebraic reconstruction, CT, inverse problem.

1. Introducción

Desde la década de los 70 se han desarrollado diversos métodos (ver [8]) para poder partir a la gente de forma virtual, lo cual es de gran utilidad en la práctica médica. En este artículo, veremos un método sencillo llamado de *reconstrucción algebraica* (se trata a detalle en [3]). La TC emplea la atenuación que sufren los rayos X al atravesar los tejidos, lo que nos lleva a introducir un pequeño modelo, el cual es una versión simplificada de la llamada ecuación del transporte los detalles se pueden ver en [10].

¹UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: edwin.chavez@unmsm.edu.pe

²UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: ecarpe@yahoo.com

³UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: victoriano_yauri@hotmail.com

⁴UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: agcbayo@yahoo.es

⁵UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: cristianhz@hotmail.com

Es claro que cuando una muestra es atravesada por un fino haz de rayos X de intensidad I , la disminución de dicha intensidad depende de la densidad ρ de la muestra¹ y de su grosor². Si dividimos la zona atravesada por los rayos en pequeñas rodajas transversales de tamaño infinitesimal (ver figura 1), en las que la densidad sea prácticamente constante, es natural suponer que la proporción en que disminuye la intensidad es directamente proporcional a ambas cantidades, digamos con constante de proporcionalidad uno mediante una elección adecuada de las unidades.

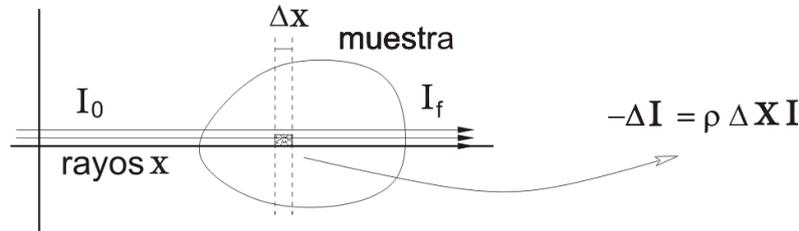


Figura 1: Muestra siendo atravesada por los rayos

Pasando al límite en la anchura de las rodajas, la expresión $-\Delta I = \rho \Delta x I$, se transforma en

$$-dI = \rho I dx \Rightarrow I' = -\rho I \Rightarrow -(\ln I)' = \rho.$$

De modo que si I_0 es la intensidad inicial (antes de entrar en la muestra) e I_f es la intensidad final (después de salir), integrando se tiene

$$\ln I_0 - \ln I_f = \int \rho.$$

Evidentemente, si los rayos siguen una recta L , en vez del eje OX , la integral anterior es la integral de línea a lo largo de L .

En definitiva, lo que debemos tener presente es que midiendo intensidades iniciales y finales podemos saber las integrales de la densidad a lo largo de las líneas rectas que siguen los rayos. (Este modelo se conoce como la ley de Beer-Lambert, ver [6]).

Ahora, si la muestra, es una parte del cuerpo humano y hacemos un corte transversal y emitimos un haz delgado de rayos X en dirección de la recta L , obtenemos, que nuestra intensidad, varía de acuerdo a la densidad de la muestra, entonces nuestro modelo sería:

$$\frac{\Delta I}{I} = -f(x, y) \Delta(x, y)$$

donde $f(x, y)$ es la función que denota la densidad de la muestra en el punto (x, y) .

Integrando esta ecuación a lo largo de la recta L obtenemos:

$$\ln \left(\frac{I_0}{I} \right) = \int_{L(\delta, s)} f(x, y) dL, \quad (1)$$

donde I_0 es la intensidad del rayo antes de atravesar la muestra e I es la intensidad del rayo después de atravesar la muestra y la recta L tiene la ecuación

$$L(\delta, s) = \{(s \cos \delta, s \sin \delta) + \mu(-\sin \delta, \cos \delta); \mu \in \mathbb{R}, \delta \in (0, \pi)\}.$$

Ahora podemos calcular esta integral de línea sobre cada una de las rectas.

$$\mathcal{R}f(s, \delta) = \int_{L(\delta, s)} f(x, y) dL. \quad (2)$$

¹Si los rayos X atraviesan plomo es distinto a que atraviesen el aire

²Si atraviesan un muro de dos metros atenúa menos que otro de cinco

El operador que asigna a una función escalar su integral de línea sobre cada recta es lo que se llama la Transformada de Radon de f . (Ver la sección 1.2 de [3])

El problema de calcular la *transformada de Radon* ($\mathcal{R}f$) cuando se conoce el valor de f , es conocido como *problema directo*, mientras que determinar la densidad f cuando se conoce la transformada de Radon $\mathcal{R}f$ es conocido como *problema inverso*, más detalles se pueden ver en [1], [3], [5], [7].

Matemáticamente podemos decir que la reconstrucción tomográfica trata de mostrar una imagen a partir de sus proyecciones³, y la solución matemática fue descubierta en 1917 por el matemático Johann Radon. El problema es hallar la fórmula para la inversa de la transformada de Radon. La dificultad con la fórmula de inversión de Radon es que no nos proporciona un algoritmo que pueda ser implementado computacionalmente, de allí la necesidad de buscar otros métodos⁴ los cuales muestren un algoritmo que pueda ser implementado computacionalmente.

2. Preliminares

Teorema 2.1

Sea un sistema compatible determinado por N ecuaciones con N incógnitas:

$$(\vec{f}_1, \vec{x}) = b_1, \quad (\vec{f}_2, \vec{x}) = b_2, \quad (\vec{f}_3, \vec{x}) = b_3, \quad \dots \quad (\vec{f}_N, \vec{x}) = b_N, \quad (3)$$

donde $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ es el vector de incógnitas. Introduciendo las aplicaciones afines $L_i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ definidas como

$$L_i(\vec{x}) = P_i(\vec{x}) + b_i \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} \quad \text{con} \quad P_i(\vec{x}) = \vec{x} - (\vec{f}_i, \vec{x}) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} \quad (4)$$

se tiene que para cualquier $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^N$, el algoritmo iterativo

$$\vec{x}_{n+1} = (L_N \circ L_{N-1} \circ \dots \circ L_2 \circ L_1)(\vec{x}_n)$$

genera una sucesión que converge a la solución del sistema.

Demostración.

Primeramente veamos que $\vec{P}_i(\vec{v})$ es el operador proyección ([4]). En efecto:

- Probemos que P_i es una proyección, i.e., debemos probar que $P_i(P_i(\vec{v})) = P_i(\vec{v})$, para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} P_i(P_i(\vec{v})) &:= P_i(\vec{v}) - (\vec{f}_i, P_i(\vec{v})) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} \\ &= P_i(\vec{v}) - (\vec{f}_i, \vec{v} - (\vec{f}_i, \vec{v}) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2}) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} \\ &= P_i(\vec{v}) - (\vec{f}_i, \vec{v}) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} + (\vec{f}_i, \vec{v}) (\vec{f}_i, \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2}) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} \\ &= P_i(\vec{v}) - (\vec{f}_i, \vec{v}) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} + (\vec{f}_i, \vec{v}) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} \\ &= P_i(\vec{v}). \end{aligned}$$

Por lo tanto P_i es una proyección.

³Básicamente, una proyección en un ángulo dado, es un conjunto de integrales de línea en dicha dirección

⁴que calculen la inversa de la transformada de Radon

- Probemos que $P_i(\vec{v})$ proyecta el vector \vec{v} sobre el hiperplano $(\vec{f}_i, \vec{x}) = 0$, i.e., debemos probar $(\vec{f}_i, P_i(\vec{v})) = 0$, en efecto tenemos:

$$\begin{aligned} (\vec{f}_i, P_i(\vec{v})) &= (\vec{f}_i, \vec{v} - (\vec{f}_i, \vec{v}) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2}) \\ &= (\vec{f}_i, \vec{v}) - (\vec{f}_i, \vec{v}) (\vec{f}_i, \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $P_i(\vec{v})$ está en el hiperplano $(\vec{f}_i, \vec{x}) = 0$.

- Probemos que L_i es también un operador proyección, i.e., debemos probar que $L_i(L_i(\vec{v})) = L_i(\vec{v})$, para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} L_i(L_i(\vec{v})) &:= P_i(L_i(\vec{v})) + b_i \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} \\ &= L_i(\vec{v}) - (\vec{f}_i, L_i(\vec{v})) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} + b_i \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} \\ &= L_i(\vec{v}) - (\vec{f}_i, P_i(\vec{v}) + b_i \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2}) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} + b_i \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} \\ &= L_i(\vec{v}) - (\vec{f}_i, P_i(\vec{v})) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} - b_i (\vec{f}_i, \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2}) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} + b_i \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} \\ &= L_i(\vec{v}) - (\vec{f}_i, P_i(\vec{v})) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} \\ &= L_i(\vec{v}) - (\vec{f}_i, \vec{v} - (\vec{f}_i, \vec{v}) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2}) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} \\ &= L_i(\vec{v}) - (\vec{f}_i, \vec{v}) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} + (\vec{f}_i, \vec{v}) (\vec{f}_i, \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2}) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} \\ &= L_i(\vec{v}) - (\vec{f}_i, \vec{v}) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} + (\vec{f}_i, \vec{v}) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} \\ &= L_i(\vec{v}). \end{aligned}$$

Por lo tanto L_i es un operador proyección.

- Veamos que $L_i(\vec{v})$ proyecta el vector \vec{v} sobre el hiperplano $(\vec{f}_i, \vec{x}) = b_i$, i.e., $(\vec{f}_i, L_i(\vec{v})) = b_i$, en efecto tenemos:

$$\begin{aligned}
(\vec{f}_i, L_i(\vec{v})) &= (\vec{f}_i, P_i(\vec{v}) + b_i \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2}) \\
&= (\vec{f}_i, P_i(\vec{v})) + b_i (\vec{f}_i, \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2}) \\
&= (\vec{f}_i, P_i(\vec{v})) + b_i \\
&= (\vec{f}_i, \vec{v} - (\vec{f}_i, \vec{v}) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2}) + b_i \\
&= (\vec{f}_i, \vec{v}) - (\vec{f}_i, \vec{v}) (\vec{f}_i, \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2}) + b_i \\
&= b_i.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $L_i(\vec{v})$ proyecta el vector \vec{v} sobre el hiperplano $(\vec{f}_i, \vec{x}) = b_i$.

Observación 2.2 Nótese que $P_i(\vec{x})$ es la proyección cuando el hiperplano correspondiente $L_i(\vec{x})$ se traslada al origen.

Por otro lado, para cualquier $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$ se tiene que $\|P_1(\vec{v})\| < \|\vec{v}\|$, excepto si \vec{v} pertenece al plano, en cuyo caso tendríamos $(\vec{f}_1, \vec{v}) = 0$ y también $P_1(\vec{v}) = \vec{v}$. De la misma forma $\|(P_2 \circ P_1)(\vec{v})\| < \|\vec{v}\|$, excepto si $(\vec{f}_1, \vec{v}) = (\vec{f}_2, \vec{v}) = 0$, si seguimos este mismo argumento sucesivamente hasta llegar a N , donde se tendría $\|(P_N \circ P_{N-1} \circ \dots \circ P_2 \circ P_1)(\vec{v})\| < \|\vec{v}\|$, excepto si

$$(\vec{f}_1, \vec{v}) = (\vec{f}_2, \vec{v}) = (\vec{f}_3, \vec{v}) = \dots = (\vec{f}_{N-1}, \vec{v}) = (\vec{f}_N, \vec{v}) = 0,$$

como por hipótesis tenemos que el sistema es compatible, es decir que las \vec{f}_i son linealmente independientes, entonces la única solución de

$$(\vec{f}_1, \vec{v}) = (\vec{f}_2, \vec{v}) = (\vec{f}_3, \vec{v}) = \dots = (\vec{f}_{N-1}, \vec{v}) = (\vec{f}_N, \vec{v}) = 0$$

es la trivial.

Luego, podemos concluir que $\|(P_N \circ P_{N-1} \circ \dots \circ P_2 \circ P_1)(\vec{v})\| \leq C \|\vec{v}\|$ para algún $C < 1$, podemos también decir que $\|P_N \circ P_{N-1} \circ \dots \circ P_2 \circ P_1\| \leq C < 1$.

Observación 2.3 Notar que por la compacidad de la bola unitaria se tiene que el operador

$$\|(P_N \circ P_{N-1} \circ \dots \circ P_2 \circ P_1)(\vec{v}/\|\vec{v}\|)\|$$

alcanza un máximo, menor que 1, en $\mathbb{R}^N - \{\vec{0}\}$.

Consideremos el operador $Q : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ definido como

$$Q = L_N \circ L_{N-1} \circ \dots \circ L_2 \circ L_1,$$

Veamos que Q así definido es un operador de contracción. En efecto tenemos

$$\begin{aligned}
\|Q(\vec{x}) - Q(\vec{y})\| &= \|(L_N \circ \dots \circ L_1)(\vec{x}) - (L_N \circ \dots \circ L_1)(\vec{y})\| \\
&= \|(L_N \circ L_{N-1} \circ \dots \circ L_2 \circ L_1)(\vec{x} - \vec{y})\| \\
&= \|(P_N \circ P_{N-1} \circ \dots \circ P_2 \circ P_1)(\vec{x} - \vec{y})\| \\
&\leq C \|\vec{x} - \vec{y}\|
\end{aligned}$$

Como $C < 1$ podemos concluir que Q es un operador de contracción.

Por otro lado por el teorema del punto fijo (ver teorema asegura que tiene un solo punto fijo que puede obtenerse con el algoritmo iterativo

$$\vec{x}_{n+1} = (L_N \circ L_{N-1} \circ \dots \circ L_2 \circ L_1)(\vec{x}_n)$$

para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Este punto fijo es la solución del sistema lineal (3), ya que los L_i dejan invariante a dicha solución pues al estar dicha solución en todos los hiperplanos es invariante bajo proyecciones sobre ellos. ■

Una ventaja del método es que se puede aplicar incluso en el caso en el que exista más ecuaciones que incógnitas simplemente aumentando el valor de N en el sistema (3). Así pues haciendo más mediciones de las que necesitamos podemos estar bastante seguros de que el sistema no es indeterminado, aunque corremos el riesgo que por errores experimentales o en el modelo, el sistema sea incompatible. Incluso en este caso, si los errores no son muy graves, la solución \vec{x}_n oscilará alrededor de la solución real.

3. Metodología

Los algoritmos de reconstrucción algebraica comienzan considerando una versión discretizada de la sección que se quiere examinar. Con tal fin, introducimos una malla cuadrada de $M \times M$ cuadraditos. Si la malla es suficientemente fina, la densidad es aproximadamente constante en cada cuadradito. Así que se puede considerar que hay una matriz de densidades $M \times M$ donde el elemento ρ_{ij} es la densidad en el cuadradito c_{ij} . Por otra parte, la atenuación de un rayo a lo largo de una recta L permite conocer $\int_L f(x, y) dL$, que en esta versión digitalizada, se aproxima por una suma de Riemann, y de hecho coincide con ella suponiendo $f(x, y)$ es realmente constante en cada c_j .

$$\ln \left(\frac{I_0}{I} \right) = \int_L f(x, y) dL = \sum f_j |c_i \cap L| \quad (5)$$

Aparentemente el problema ya está resuelto: queremos calcular el valor de las incógnitas $x_1 = \rho_{11}, x_2 = \rho_{12}, x_3 = \rho_{13}, \dots, x_{M^2} = \rho_{MM}$ y, según (5), para cada rayo tenemos una ecuación lineal en estas incógnitas; basta tomar un número suficiente de rayos y resolver el sistema lineal correspondiente.

Puede que esto resuelva el problema desde el punto de vista teórico, pero la aplicación práctica requiere ir más allá. Supongamos por ejemplo que deseamos tener una resolución comparable a la de un monitor y para ello imaginamos una malla de 1000×1000 *pixels* que contiene la sección del cuerpo humano que vamos a examinar (en [6]) se apunta 256×256 *pixels* como una resolución posible en la práctica, y por la imágenes allí mostradas 128×128 pudiera ser a veces deficiente). Entonces habrá 106 incógnitas ρ_{ij} que calcular.

El sistema lineal correspondiente tendrá una matriz de $106 \times 106 = 1012$ elementos lo cual podrá causar algunos problemas de memoria en ordenadores convencionales si los tenemos que almacenar todos (necesitaríamos algo comparable a un Terabyte de memoria libre). Las estimaciones generales del número de operaciones para resolver un sistema lineal por eliminación de Gauss es del orden del cubo del número de variables, en nuestro caso 1018. A una velocidad de $1GHz$ esto llevaría del orden de 30 años.

Necesitamos, por tanto, un método maravilloso que requiera incomparablemente menos operaciones que el de Gauss. Quizá tal método no exista en general, pero aquí estamos considerando sistemas muy especiales y hay esperanzas sobre todo si nos contentamos con soluciones aproximadas. Nótese que típicamente un rayo atraviesa M cuadraditos (*pixels*), con lo cual en cada ecuación sólo aparecen M incógnitas de las M^2 que hay en total. Es decir, la matriz de coeficientes es muy dispersa, está llena de ceros.

Vamos a mostrar un método iterativo creado por S. Kaczmarz en 1937 que no altera la dispersión de la matriz, de hecho no modifica la matriz de coeficientes, lo que redundaría en que las operaciones sólo se hacen con los ‘‘pocos’’ coeficientes no nulos. La idea subyacente es la generalización a

dimensiones mayores de un hecho muy sencillo: Podemos aproximar el punto donde se cortan dos rectas en R^2 partiendo de un punto cualquiera y proyectando alternativamente en cada una de las rectas, luego entonces si usamos el teorema 2.1, podemos resolver el problema.

Experimento

El objetivo es explicar las nociones básicas de uno de los métodos con los que se hacen tomografías y su relación con los algoritmos iterativos para resolver sistemas lineales, para ello usaremos los siguientes materiales:

- Cartulina.
- Plástico semitransparente (por ejemplo papel celofán).
- Una linterna.
- Una calculadora.

Como todos sabemos los tejidos del cuerpo humano no se traslucen, entonces no podemos cambiar en las aplicaciones médicas los rayos X por la luz visible; lo que vamos a hacer aquí es sustituir los tejidos por unos cubitos translúcidos con los que podamos ilustrar como se reconstruye la parte interna de un objeto usando el método de reconstrucción algebraica.

Con la cartulina fabricaremos nueve cubos y en sus caras laterales abriremos “ventanas” para que pueda pasar la luz, las cuales cubriremos algunos de ellos con el plástico semitransparente. Al poner tres cubos seguidos y enfocarlos con la luz de la linterna, se pueden detectar en una pantalla (una hoja de papel) cuatro posibles intensidades dependiendo de si ninguno, uno, dos o los tres cubos tienen plástico en sus ventanas, como se ilustra en la figura 2.

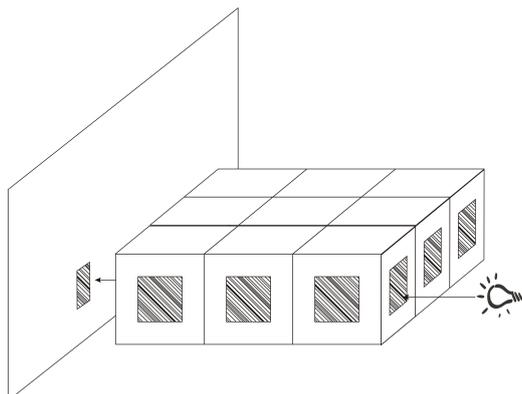


Figura 2: Los cubos siendo atravesados por la luz.

Convencionalmente designaremos estas intensidades por $I = 1; 1/2; 1/3; 1/4$ respectivamente. Para llevar a cabo el experimento, es importante familiarizarse con las intensidades de manera que podamos distinguirlas a simple vista. Si esto no es posible, debemos cambiar el tipo de plástico.

Dispongamos los cubos formando un cuadrado, como se muestra en la figura 3, donde los cuadraditos pintados significan que son cubitos que tienen sus ventanas cubiertas con plástico.

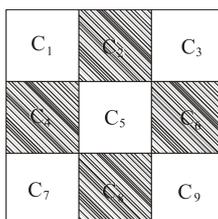


Figura 3: Formando un cuadrado con los cubos.

Usando la ley de Beer-Lambert, tenemos

$$\frac{\Delta I}{I} = -f(x)\Delta x$$

Podemos reescribirla como

$$-\frac{I_f - I_i}{I_f} = f(x)\Delta x \quad (6)$$

Donde:

* I_f : Es la intensidad final (al momento de la salida).

* I_i : Es la intensidad inicial (al momento de la entrada).

* $f(x)$: Es el coeficiente de densidad (lo que estamos por reconstruir).

* Δx : Es la intersección del rayo con el cubo (en este caso será igual a 1).

Denotemos por C_j el coeficiente de densidad del j -ésimo cuadradito, entonces $f(x)$ puede ser reescrito como una sumatoria, además estamos asumiendo que $I_i = 1$, luego la ecuación (6), se transforma en

$$I_f^{-1} - 1 = \sum_{j=1}^3 C_j$$

Si hacemos pasar la luz de la linterna en cada una de las direcciones (horizontales, verticales y diagonales) como se muestra en la figura 4.

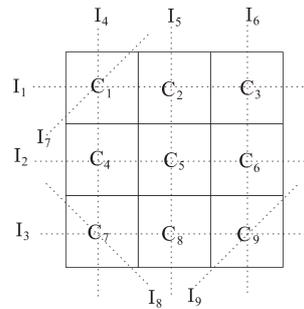


Figura 4: Forma en que los rayos de luz atraviesan el cuerpo.

Entonces luego obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 &= I_{f_1}^{-1} - 1 \\ C_4 + C_5 + C_6 &= I_{f_2}^{-1} - 1 \\ C_7 + C_8 + C_9 &= I_{f_3}^{-1} - 1 \\ C_1 + C_4 + C_7 &= I_{f_4}^{-1} - 1 \\ C_2 + C_5 + C_8 &= I_{f_5}^{-1} - 1 \\ C_3 + C_6 + C_9 &= I_{f_6}^{-1} - 1 \\ C_1 &= I_{f_7}^{-1} - 1 \\ C_7 &= I_{f_8}^{-1} - 1 \\ C_9 &= I_{f_9}^{-1} - 1 \end{aligned} \quad (7)$$

Obteniendo así un conjunto de 9 ecuaciones con 9 incógnitas, supongamos que numeramos los cubos como en la figura 4 y asignamos al cubo j -ésimo el valor $C_j = 0$, si está hueco y $C_j = 1$, si es semitransparente. Luego, para esta ordenación (de los cubitos), obtenemos las siguientes intensidades finales

$$\vec{I} = (I_1, I_2, \dots, I_8, I_9) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 1, 1 \right).$$

Luego, reemplazando estas intensidades en las ecuaciones de (7), obtenemos

$$\begin{aligned}
 C_1 + C_2 + C_3 &= 1 \\
 C_4 + C_5 + C_6 &= 2 \\
 C_7 + C_8 + C_9 &= 1 \\
 C_1 + C_4 + C_7 &= 1 \\
 C_2 + C_5 + C_8 &= 2 \\
 C_3 + C_6 + C_9 &= 1 \\
 C_1 &= 0 \\
 C_7 &= 0 \\
 C_9 &= 0
 \end{aligned} \tag{8}$$

Podemos verificar que el sistema (8) es un sistema incompatible indeterminado, ya que si ponemos al sistema matricialmente, este tiene determinante 0. Entonces para conseguir un sistema determinado, añadimos una ecuación más que es la que pasa por la esquina de C_3 , entonces tendría una intensidad $I_{10} = 1$.

Evidentemente si en vez de nueve celdillas tuviéramos miles, sería muy costoso de comprobar si el sistema es determinado, y en la práctica simplemente añadiríamos más ecuaciones de las necesarias, pensando que habría que tener muy mala suerte para que todavía el rango de la matriz no fuera el adecuado.

El sistema se resuelve directamente haciendo los cálculos respectivos, y la solución es $\vec{C} = (C_1, \dots, C_9) = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$. Pero como queremos ilustrar la reconstrucción algebraica, usaremos el algoritmo que se muestra en el teorema 2.1

$$\vec{x}_{n+1} = (L_{10} \circ L_9 \circ \dots \circ L_2 \circ L_1)(\vec{x}_n) \tag{9}$$

partiendo de $\vec{x} = \vec{0}$. Donde L_i son las proyecciones en los hiperplanos que definen las ecuaciones de (8) y la añadida después (de hecho podríamos reemplazar una de las ecuaciones por ella). Con una calculadora y un poco de paciencia, se pueden hacer una o dos iteraciones. Usando el programa (4.1)⁵ de la siguiente sección, se puede calcular con mucha más facilidad las iteraciones como por ejemplo, algunos de los \vec{x}_n obtenidos de esta forma son

$$\begin{aligned}
 \vec{x}_5 &= (0, 0.7225, 0, 0.7225, 0.5549, 0.7225, 0, 0.7225, 0) \\
 \vec{x}_{10} &= (0, 0.8460, 0, 0.8460, 0.3079, 0.8460, 0, 0.8460, 0) \\
 \vec{x}_{15} &= (0, 0.9146, 0, 0.9146, 0.1709, 0.9146, 0, 0.9146, 0) \\
 \vec{x}_{25} &= (0, 0.9737, 0, 0.9737, 0.0526, 0.9737, 0, 0.9737, 0) \\
 \vec{x}_{50} &= (0, 0.9986, 0, 0.9986, 0.0028, 0.9986, 0, 0.9986, 0)
 \end{aligned}$$

Nótese que la aproximación de \vec{x}_n a la solución hace posible adivinar enseguida dónde están los cubos semitransparentes ($C_i = 1$) y los huecos ($C_i = 0$). En el límite $\vec{x}_n \rightarrow \vec{C}$.

Si adicionalmente nos apetece mostrar una vista de la ubicación de los cubitos, con el programa (4.1), obtenemos la figura 5, si bien es cierto esta gráfica no nos da más información, pero se ve bonita.

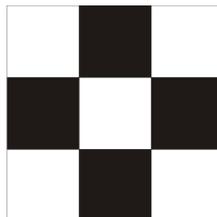


Figura 5: Grafica.

⁵Este programa se usa con $I_f = (I_1, I_2, \dots, I_9, I_{10}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 1, 1, 1)$.

Adicionalmente hacemos más experimentos, teniendo presente el orden de los rayos como se muestra en la figura 6.

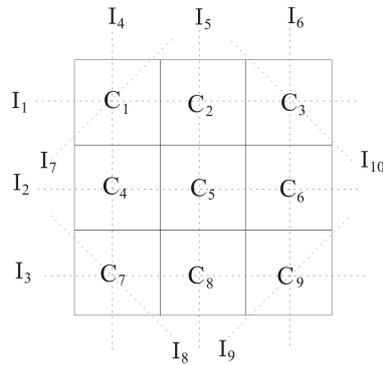


Figura 6: Orden en que son tomados los rayos.

Seguimos tomando $\vec{x} = \vec{0}$, y consideramos las distribuciones de los cubitos:

- Si usamos la distribución que se muestra en la figura 7

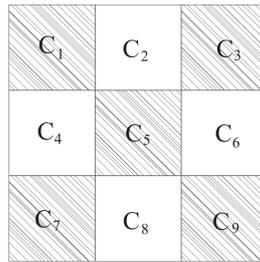


Figura 7: Distribución de los cubitos

Entonces las intensidades finales serán

$$I_f = (1/3, 1/2, 1/3, 1/3, 1/2, 1/3, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$$

luego usando el programa (4.1) de la siguiente sección obtenemos

$$\vec{x}_{50} = (1, 0.0263, 1, 0.0263, 0.9474, 0.0263, 1, 0.0263, 1)$$

Usando el programa (4.2) de la siguiente sección obtenemos la figura 8

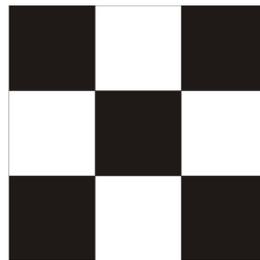


Figura 8: Gráfica.

4. Programas para la reconstrucción algebraica

Programa 4.1

Tipo: Matlab

Descripción: Hace las iteraciones para mostrar la reconstrucción algebraica, se guardó con el nombre tomografía.m, se resalta el nombre pues el programa (4.2) hace uso de este programa, los datos de entrada son \vec{x}_0 y el número de iteraciones n , arroja como respuesta la iteración \vec{x}_n , para correrlo ingresamos $x = \text{zeros}(9,1)$ y el n deseado.

```

%% Cálculos del experimento "tomografía simulada"
If=input('Ingresa la intensidades finales If = ');
x=input('ingresa la aproximación inicial x=');
n=input('Da el número de iteraciones que se desea realizar n=');
i=1;
while i<=n
b=-ones(10,1)'+(If).^(-1);
L1=[1 1 1 0 0 0 0 0 0]; x=x+(b(1)-L1*x)*L1'/(L1*L1');
L2=[0 0 0 1 1 1 0 0 0]; x=x+(b(2)-L2*x)*L2'/(L2*L2');
L3=[0 0 0 0 0 0 1 1 1]; x=x+(b(3)-L3*x)*L3'/(L3*L3');
L4=[1 0 0 1 0 0 1 0 0]; x=x+(b(4)-L4*x)*L4'/(L4*L4');
L5=[0 1 0 0 1 0 0 1 0]; x=x+(b(5)-L5*x)*L5'/(L5*L5');
L6=[0 0 1 0 0 1 0 0 1]; x=x+(b(6)-L6*x)*L6'/(L6*L6');
L7=[1 0 0 0 0 0 0 0 0]; x=x+(b(7)-L7*x)*L7'/(L7*L7');
L8=[0 0 0 0 0 0 1 0 0]; x=x+(b(8)-L8*x)*L8'/(L8*L8');
L9=[0 0 0 0 0 0 0 0 1]; x=x+(b(9)-L9*x)*L9'/(L9*L9');
L10=[0 0 1 0 0 0 0 0 0]; x=x+(b(10)-L10*x)*L10'/(L10*L10');
i=i+1;
end
fprintf('La aproximación es: % 10.5 f',x)

```

Programa 4.2

Tipo: Matlab

Descripción: Hace las gráficas de la forma en que están distribuidos los cubos, usando la reconstrucción algebraica, usa el programa anterior.

```

%%%%%%%%%%%% INICIO%%%%%%%%%%%%
%% RECONSTRUCCIÓN ALGEBRAICA DE UNA MUESTRA
I=ones(256,256);
%% VALORES INICIALES
%% n=0;
%% x=zeros(9,1);
%% LLAMADA AL PROGRAMA ANTERIOR
tomografia
n=n+1;
%%%%%%%%%%%% DIBUJA%%%%%%%%%%%%
Imag=[x(1)*I x(2)*I x(3)*I;...
x(4)*I x(5)*I x(6)*I;...
x(7)*I x(8)*I x(9)*I];
imshow(1-Imag)

```

5. Conclusiones

- Es posible reconstruir la estructura interna de los objetos, sin necesidad de abrirlos.
- Existen otras fórmulas de reconstrucción $y = \mathcal{K}x$
- Una variante sería tomar proyecciones en otra forma como por ejemplo en forma de abanico (ver figura 9):

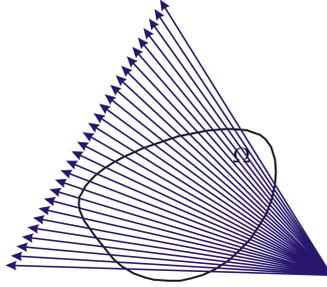


Figura 9: Proyección en forma de abanico.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Carbajal Peña E. (1999) *Problemas inversos y sus aplicaciones*. Serie A: Monografías, Colección de Matemáticos del Perú
- [2] Chamizo Fernando. (2003) *Notas del curso Modelización II*.
- [3] Chávez Ramírez E. (2009) *Solución al Problema Inverso Tomografía Computarizada Tratamiento Numérico*. Tesis de Licenciatura.
- [4] C.W. Groetsch. (1999) *Inverse Problems: activities for undergraduates*. Mathematical Association of America.
- [5] Hansen Christian Per. (1998) *Rank-Deficient and Discrete Ill-posed Problems*. Technical University of Denmark. Siam.
- [6] Kak, A.C. Slaney, M. (1998) *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. New York: I. Press. Versión electrónica Iam.
- [7] Kirsch Andreas. (1996) *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*. Texts in Applied Mathematics. Springer.
- [8] Natterer. F.(2001) *The Mathematics of Computerized tomography*. (New York: Wiley)
- [9] Quarin. *Tomografía por rayos X*. Acceso: nov. 2007. Disponible en: www.geocities.com/tomografiademadeira/autor2.html.
- [10] A.G. Ramm, A.I. Katsevich. *The Radon Transform and Local Tomography*. CRC Press.