PESQUIMAT , Revista de la F.C.M. de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos Vol. XVI N°2, pp. 18- 23, Lima - Perú, Octubre 2013

REGULARIDAD ESCONDIDA DE LA SOLUCIÓN PARA UNA ECUACIÓN DE ONDA CON EL OPERADOR p-LAPLACIANO

Eugenio Cabanillas Lapa [1]***, Willy Barahona Martínez***[2]***,***
Luis Macha Collotupa[3]***, Gabriel Rodríguez Varillas***[4]***,***
Rocío De La Cruz Marcacuzco [5]

Resumen: En este trabajo se estudia la Regularidad Escondida de las soluciones de una ecuación de onda con el operador p-Laplaciano

$$u_{tt} - \Delta_p u = f.$$

De hecho, vamos a demostrar que la derivada normal

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \in L^p(\Sigma), \qquad 2 < p < \infty.$$

Palabras clave: Regularidad escondida, Método de Galerkin, solución débil.

HIDDEN REGULARITY OF SOLUTION FOR A WAVE EQUATION WITH THE p-LAPLACIAN OPERATOR

Abstract: In this paper we study the hidden regularity of solutions for a wave equation with the p-laplacian operator

$$u_{tt} - \Delta_p u = f.$$

Indeed, we will prove that the normal derivative

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \in L^p(\Sigma), \qquad 2 < p < \infty.$$

Keywords: Hidden regularity, Galerkin method, weak solution.

1. Introducción

Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$ con frontera regular Γ . Consideramos el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} & u_{tt} - \Delta_p u = f && \text{en} \quad Q = \Omega\times]0,T[\\ & u = 0 && \text{sobre} \quad \Sigma = \Gamma\times]0,T[\\ & u(x,0) = u^0(x), && u_t(x,0) = u^1(x) \quad \text{en} \quad \Omega \end{aligned} \tag{1}$$

J.L. Lions en [2] estudió la regularidad escondida de la solución del sistema (1) con $p = 2$ agregándole un término no lineal $g(u) = u|u|^\rho$ donde $\rho \geq 0$. En [3], Milla Miranda-L.A.

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: cleugenio@yahoo.com
[2]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail:wilbara_73@yahoo.es
[3]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail:lmachac@hotmail.com
[4]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: grodriguezv@unmsm.edu.pe
[5]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: rodema_71@yahoo.es

Medeiros generalizaron el resultado obtenido en [2], obtuvieron la misma regularidad de una ecuación de onda semilineal con una no linealidad general. En [1] F.Araruna y otros investigaron la regularidad escondida para la ecuación de Kirchhoff. El objetivo principal de este trabajo es estudiar la regularidad escondida para la solución del problema dado en (1), con $2 < p < \infty$, se demostrará que tiene sentido la traza de la derivada normal y, además vamos a obtener la siguiente regularidad

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \in L^p(\Sigma). \tag{2}$$

2. Teorema Central

En esta sección, mediante el método de Faedo-Galerkin probaremos la existencia de la solución débil, adicionalmente se conseguirá la regularidad escondida.

Teorema 2.1 Sea $\{u^0, u^1, f\}$ un elemento del espacio $W_0^{1,p}(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(Q)$. Entonces existe una función $u : Q \to \mathbb{R}$ tal que

$$u \in L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$$

$$u_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$$

$$u_{tt} - \Delta_p u = f \qquad \text{en} \qquad L^2(0, T; W^{-1,q}(\Omega))$$

donde $\quad p^{-1} + q^{-1} = 1$. Además

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \in L^p(\Sigma)$$

Demostración. Sea $r > 0$, tal que $H_0^r(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$; como $W_0^{1,p}(\Omega)$ es separable, existe una base de Schauder $\{w_\nu\}_{\nu \geq 1}$.

Para cada entero m sea $V_m = span\{w_1, w_2, ..., w_m\}$, el espacio generado por los m primeros elementos de la base. Determinaremos una solución aproximada para el problema (1) de la forma

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j$$

tal que satisface

$$(u_m'', w_j) - (\triangle_p u_m, w) = (f, w_j) \tag{3}$$

$$u_m(0) = u_{0m} \longrightarrow u^0 \quad \text{en} \quad W_0^{1,p}(\Omega) \tag{4}$$

$$u_m'(0) = u_{1m} \longrightarrow u^1 \quad \text{en} \quad L^2(\Omega) \tag{5}$$

Por la teoría de las EDOs, el sistema (3) - (5) tiene una solución local $u_m(t)$ en un intervalo $[0, T_m[$.

Probaremos que para cualquier $T > 0$, esta solución puede ser extendida a todo el intervalo $[0, T]$ vía la siguiente estimativa a priori.

En efecto, multiplicando (3) por $g_{jm}'(t)$ luego sumando las ecuaciones resultantes sobre j, e integrando por partes se obtiene.

$$E_m'(t) = (f(t), u_m'(t)); \forall t \geq 0. \tag{6}$$

donde

$$E_m(t) = \frac{1}{2}\|u_m^{'}(t)\|_2^2 + \frac{1}{p}\|\nabla u_m(t)\|_p^p. \tag{7}$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue que

$$\int_0^t (f(s), u_m^{'}(s))ds \leq \int_0^t \|f(s)\|_2 \|u_m^{'}(s)\|_2 ds \tag{8}$$

Debido a las convergencias de (4) y (5) y aplicando la desigualdad de Gronwall, obtenemos

$$\|u_m^{'}(t)\|_2^2 + \|\nabla u_m(t)\|_p^p \leq C. \tag{9}$$

Con esta estimación podemos extender las soluciones aproximadas $u_m(t)$ al intervalo $[0, T]$. Además:

$$(u_m)_{m\geq 1} \quad \text{es acotada en } L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \tag{10}$$

$$(u_m^{'})_{m\geq 1} \quad \text{es acotada en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \tag{11}$$

$$(u_m^{'})_{m\geq 1} \quad \text{es acotada en } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \tag{12}$$

Con cálculos adicionales obtenemos ambos lados

$$(-\triangle_p u_m)_{m\geq 1} \quad \text{es acotada en } L^\infty(0, T; W^{-1,p^{'}}(\Omega)), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p^{'}} = 1 \tag{13}$$

Usando el argumento de la proyección, como en [3], de la ecuación aproximada (3), y las estimaciones $(10) - (11)$, podemos inferir que

$$(u_m^{''})_{m\geq 1} \quad \text{es acotada en } L^2(0, T; H^{-r}(\Omega)) \tag{14}$$

De $(10) - (12)$, existe u tal que

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{débil * en } L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \tag{15}$$

$$u_m^{'} \rightharpoonup u' \quad \text{débil * en} \quad L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \tag{16}$$

$$u_m^{'} \rightharpoonup u' \quad \text{débilmente en} \quad L^2(0, T; L^2(\Omega)) \tag{17}$$

$$-\triangle_p u_m \rightharpoonup \chi \quad \text{débil * en } L^\infty(0, T; W^{-1,p^{'}}(\Omega)) \tag{18}$$

Aplicando el lema de Lions-Aubin [5], seguimos de (10) y (11) que

$$u_m \to u \quad \text{fuertemente en } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \tag{19}$$

$$u_m^{'} \to u' \quad \text{fuertemente en } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \tag{20}$$

Con estas convergencias y el paso al límite de la ecuación aproximada tenemos

$$\frac{d}{dt}(u'(t), v) + \langle \chi(t), v \rangle = (f(t), v) \tag{21}$$

para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ en el sentido de las distribuciones.

Con la teoría de operadores monótonos, no es difícil probar que $\chi(t) = \triangle_p u$.

Para la prueba de (2), usaremos argumentos de perturbación y nos basaremos en dos lemas. Consideramos la siguiente ecuación aproximada

$$\begin{aligned} w_{tt}^{\epsilon} + A_{\epsilon} w^{\epsilon} + \epsilon \Delta w_t^{\epsilon} &= 0 \\ w &= 0 \\ w(0) = w^0, \quad w_t(0) &= w^1 \end{aligned} \tag{22}$$

donde

$$A_{\epsilon} w(x) = -div\{(\|\nabla w(x)\|^2 + \epsilon)^{\frac{p-2}{2}} \nabla w(x)\}; \epsilon > 0$$

Probaremos que (22) admite una única solución fuerte.

$$w^0 \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap H^2(\Omega); w^1 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \tag{23}$$

Lema 2.2 Asumiendo (22). Existe una única solución $w^{\epsilon}(.)$ de (22) con:

1. $t \longrightarrow w^{\epsilon}(t)$ es fuertemente continua para $t \geq 0$ en $W_0^{1,p}(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ fuertemente continua y diferenciable para $t > 0$ en $H_0^1(\Omega)$
2. $t \longrightarrow w^{\epsilon}(t)$ fuertemente continua y diferenciable para $t \geq 0$ en $L^2(\Omega)$ y dos veces fuertemente continua y diferenciable para $t > 0$ en $L^2(\Omega)$
3. La desigualdad

$$\begin{aligned} &\|\Delta w^{\epsilon}(t)\|^2 + \|\Delta w_t^{\epsilon}(t)\|^2 + \int_{\Omega} (\|\nabla w^{\epsilon}(t)\|^2 + \epsilon)^{\frac{p-2}{2}} dx + \\ &+ \int_0^t \|\nabla w_t^{\epsilon}(s)\|^2 ds \leq C(\|u'\|^2 + \|\nabla u^0\|_p^p) \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

Demostración. La idea de la demostración es la siguiente. Tomamos una solución débil w^{ϵ} de (22) (obtenidas por el análisis de algunos resultados utilizados en el teorema de existencia (1)), y luego, usando la teoría de semigrupos analíticos, se prueba que w^{ϵ} es la solución fuerte requerida. ■

Para efecto de obtener la regularidad escondida, requerimos de la hipótesis adicional:

$$m(x).\nu \geq r > 0; \quad m(x) = (m_1(x), ..., m_n(x)) = x, \quad \text{para todo } x \in \Gamma. \tag{24}$$

Lema 2.3 Asumimos (24). Si u denota la solución de (1) con datos iniciales $\{u^0, u^1\} \in W_0^{1,p}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ entonces se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \in L^p(\Sigma)$$

Demostración. Sea $\epsilon = \epsilon_j \longrightarrow 0$ para $j \longrightarrow +\infty$ ($\epsilon_j > 0$ para cada j) y $u^{0j} \equiv u^{0\epsilon_j}$, $u^{1j} \equiv u^{1\epsilon_j}$ en $C_0^{+\infty}(\Omega)$ tal que $u^{0j} \longrightarrow u^0$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$; $u^{1j} \longrightarrow u^1$ en $L^2(\Omega)$.

Denotando $u_j = u_{\epsilon_j}$ las funciones correspondientes a $\epsilon = \epsilon_j$ de acuerdo al Lema (1), entonces tenemos que

$$\begin{aligned} u_j &\in C(0, T; W_0^{1,p}(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \\ u_{jt} &\in C(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \end{aligned} \tag{25}$$

En estas condiciones podemos aplicar los resultados en Dinca-Isaia [4], por lo que los cálculos con integración por partes son válidos.
Sea $u_j = u$ se multiplican ambos lados de (22), por $m_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$ e integrando sobre Q, obtenemos después de algunas simplificaciones

$$\begin{aligned} &\| \int_\Omega \{ (\|\nabla u\|^2 + \epsilon)^{\frac{p-2}{2}} \|\nabla u\|^2 - (\|\nabla u\|^2 + \epsilon)^{\frac{p}{2}} \} \| dx \\ \leq &\int_\Omega (\|\nabla u\|^2 + \epsilon)^{\frac{p}{2}} dx . \epsilon \|\Omega\|^{\frac{2}{p}} + \int_\Gamma (\|\nabla u\|^2 + \epsilon)^{\frac{p-2}{2}} m.\nu d\Gamma \end{aligned} \tag{26}$$

$$\leq \frac{p-2}{2} \int_\Gamma (\|\nabla u\|^2 + \epsilon)^{\frac{p}{2}} m.\nu d\Gamma + \frac{2}{p} \int_\Gamma (\epsilon)^{\frac{p}{2}} m.\nu d\Gamma \tag{27}$$

Por otro lado es conocido que:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \nu_i \frac{\partial u}{\partial \nu}; \qquad \nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n) \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$

luego

$$\|\nabla u\|^p = \| \frac{\partial w}{\partial \nu} \|^p \tag{28}$$

Como consecuencia de $(24) - (28)$, existe una constante positiva C de tal manera que

$$\int_\Sigma \| \frac{\partial u}{\partial \nu} \|^p d\Sigma \leq C. \tag{29}$$

■

Del lema (2,3) anterior se deduce que podemos extraer una subsucesión, aún representada con el mismo índice, de tal manera que

$$\frac{\partial u_j}{\partial \nu} \longrightarrow \chi \qquad \text{débilmente en} \qquad L^p(\Sigma)$$

Ahora, mediante el uso de la regularidad elíptica (ver[6]), la regularidad del problema de Dirichlet y la continuidad de la traza (ver[3], adaptado a nuestro caso), podemos concluir que

$$\chi = \frac{\partial u}{\partial \nu} \qquad \text{en} \qquad L^p(\Sigma)$$

lo que concluye el teorema. ■

3. Conclusión

En las condiciones mencionada se ha probado que la derivada normal asociada al operador no lineal Δ_p, que naturalmente habita en un espacio dual, tiene la regularidad escondida:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \qquad \text{en} \qquad L^p(\Sigma)$$

este es, a nuestro modesto conocimiento, el primer resultado de regularidad en la frontera para un operador no lineal.

Este tipo de resultado permite abordar problemas no lineales en teoría de control óptimo y exacto.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ARARUNA, F., MATIAS, O., MATOS, P., SOUZA, M.(2008). Hidden regularity for the Kirchhoff equation, *Comm.Pure App.Anal.* (7)(5)1049-1056.

[2] LIONS, J.L.(1987). Hidden regularity in some nonlinear hyperbolic equations,*Mat. Apl. Comput.* (6), 7-15.

[3] MILLA MIRANDA, M., MEDEIROS, L.A.(1988). Hidden regularity for semilinear hyperbolic partial differential equations, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* (IX), 103-120.

[4] DINCA, G., ISAIA, F.(2009). Generalized Pohozaev identity and non-existence result for the p-laplacian:weak solutions, *Adv. Diff Eq.* (14)(5-6116)497-540.

[5] LIONS, J.L.(1969).Quelques méthodes de Resolution des Problemes aux limites nonlinéaires, Dunod, Paris.

[6] MARCELLINI, P.(1991). Regularity and existence of solutions of elliptic equations with p, q-growth conditions, J. Differential Equations, (90), 1-30.

[7] MA, T.F., SORIANO, J.A.(1999). On weak solutions for an evolution equation with exponential nonlinearities, Nonlinear Analysis, Holanda (V37)1029-1038.