PESQUIMAT , Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XVI N°2, pp. 33 - 44, Lima - Perú, Octubre 2013

UNA DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE GEARHART

Yolanda Santiago Ayala [1]

Resumen: Usando la noción del Tipo del Semigrupo, Solución periódica de una ecuación no homogénea, los Principios fundamentales del análisis funcional, y fuertemente las nociones de Teoría espectral, damos una prueba del famoso e importante resultado de Gearhart, acerca de la estabilidad exponencial de un Semigrupo, introducido en Liu-Zheng [1].

Palabras clave: Radio espectral. El tipo del semigrupo. Semigrupo exponencialmente estable. Solución periódica de una ecuación no homogénea. Teorema de Gearhart

A PROOF OF THE GEARHART'S THEOREM

Abstract: Using the notion of semigroup type, periodic solution of a non-homogeneous equation, the fundamental principles of functional analysis, and strongly the notions of spectral theory, we give a proof of the famous and important result of Gearhart, about exponential stability of a semigroup, introduced in Liu-Zheng [1].

Keywords: Spectral radius. The type of semigroup. Exponentially stable semigroup. Periodic solution of non-homogeneous equation. The Gearthart's theorem.

1. Introducción

Para determinar si una solución decae exponencialmente frecuentemente se usaba el método de Prüs [3] y desigualdades integrales con propiedades de semigrupo. Ahora, queremos enfatizar que tenemos la otra opción que es el Teorema de Gearhart, introducido por Liu-Zheng [1].
Este famoso Teorema de Gearhart nos da la caracterización de la estabilidad exponencial de un semigrupo, i.e., condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad exponencial en términos del resolvente del generador infinitesimal del Semigrupo asociado al sistema.
Nuestro principal interés es enunciar y probar el Teorema de Gearhart, para eso introducimos y probamos dos caracterizaciones de $1 \in \rho(S(1))$, dando una completa prueba.
Nuestro artículo está organizado como sigue. En la sección 2, enunciamos y probamos dos resultados importantes, que usaremos para probar el Teorema de Gearhart, i.e., dos caracterizaciones de $1 \in \rho(S(1))$. La primera caracterización en conexión con la existencia y unicidad de solución periódica de una ecuación no homogénea y la segunda en términos de la acotación del Operador Resolvente: $R(2k\pi i, A)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.
En la sección 3, enunciamos y probamos el Teorema de Gearhart.
En la sección 4, damos algunos comentarios de ejemplos de aplicación.

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: yssantiago@gmail.com

2. Principales Resultados

Definición 2.1 *Sea A el generador infinitesimal de un semigrupo C_o $(S(t))_{t\geq 0}$. Diremos que $w_o(A)$* **es el tipo del semigrupo generado por** *A si existe el número*

$$w_o(A) := \lim_{t\to+\infty} \frac{ln\|S(t)\|}{t} = \inf_{t>0} \frac{ln\|S(t)\|}{t}\,.$$

Observación 2.2 Sea $s > 0$ y A el generador infinitesimal de un semigrupo C_o $(S(t))_{t\geq 0}$. Entonces $w_o(sA) = sw_o(A)$.

Lema 2.3 *Sea A el generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_o $(S(T))_{t\geq 0}$. Entonces el radio espectral de $S(t)$ es igual a $e^{tw_o(A)}$, para $t > 0$. i.e.,*

$$r_\sigma(S(t)) = e^{tw_o(A)}\,, \forall t > 0\,.$$

Teorema 2.4 *Sea X un espacio de Banach, $f \in C([0,1];X)$ y A el generador infinitesimal de un semigrupo C_o $(S(t))_{t\geq 0}$. La ecuación*

$$u'(t) = Au(t) + f(t)\,, \quad t \in [0,1] \tag{1}$$

posee una única solución periódica, de periodo 1, si y solamente si $1 \in \rho(S(1))$.

Demostración. Si $1 \in \rho(S(1))$ probaremos que la ecuación (1) posee una única solución periódica.
<u>Existencia de solución</u>
Supongamos que $u(t)$ sea una solución de (1), entonces

$$\frac{d}{dt}[S(-t)u(t)] = S(-t)f(t)\,.$$

Integrando de 0 a t tenemos

$$\int_0^t \frac{d}{ds}]S(-s)u(s)]ds = \int_0^t S(-s)f(s)ds\,.$$

Luego, $S(-t)u(t) - \underbrace{S(0)}_{=I} u(0) = \int_0^t S(-s)f(s)ds$, aplicando $S(t)$ tenemos

$$\begin{aligned} u(t) - S(t)u(0) &= S(t)\int_0^t S(-s)f(s)ds \\ &= \int_0^t S(t)S(-s)f(s)ds \\ &= \int_0^t S(t-s)f(s)ds\,, \end{aligned}$$

i.e., $u(t)$ tendría la forma:

$$u(t) = \underbrace{S(t)u(0)}_{z(t):=} + \int_0^t S(t-s)f(s)ds \tag{2}$$

donde z es solución de la ecuación homogénea asociada a (1), esto es, $z'(t) = Az(t)$, $z(0) = u(0)$, y como queremos que $u(0) = u(1)$, u debe satisfacer

$$u(0) = u(1) = S(1)u(0) + \int_0^1 S(1-s)f(s)ds\,,$$

es decir
$$[I-S(1)]u(0)=\int_0^1 S(1-s)f(s)ds\,.$$
Como $1\in\rho(S(1))$ entonces existe $[I-S(1)]^{-1}$ y así $u(0)$ sería
$$u(0)=[I-S(1)]^{-1}\int_0^1 S(1-s)f(s)ds\,. \tag{3}$$
Luego
$$\left|\begin{array}{c} u(t)=S(t)u(0)+\int_0^t S(t-s)f(s)ds \quad \text{con} \\ u(0)=[I-S(1)]^{-1}\int_0^1 S(1-s)f(s)ds \end{array}\right.$$
es una solución periódica de la ecuación (1). A seguir veremos que es única.
<u>Unicidad de solución</u>
Sean $u_i(t)$ para $i=1,2$ soluciones periódicas de la ecuación (1), luego satisfacen
$$u_i'(t)=Au_i(t)+f(t)\,,u_i(0)=u_i(1)\ \text{para}\ i=1,2\,.$$
y $u_i(t)$ tienen la forma
$$u_i(t)=S(t)u_i(0)+\int_0^t S(t-s)f(s)ds$$
con $u_1(0)=u_2(0)$, desde que
$$u_i(0)=[I-S(1)]^{-1}\int_0^1 S(1-s)f(s)ds\ \text{para}\ i=1,2\,.$$
Luego,
$$u_1(t)-u_2(t)=S(t)[\underbrace{u_1(0)-u_2(0)}_{=0}]=0$$
Recíprocamente, supongamos que la ecuación (1) tiene una única solución periódica, probaremos que $1\in\rho(S(1))$, es decir que existe $[I-S(1)]^{-1}\in L(X)$.
<u>$I-S(1)$ es inyectiva</u>
Procedemos por el absurdo. Supongamos que
$$Ker(I-S(1))\neq\{0\}\,,$$
i.e., $\exists\, x_0\in Ker(I-S(1))$ tal que $x_0\neq 0$, es decir $x_0\neq 0$ y
$$x_0-S(1)x_0=0. \tag{4}$$
Definimos
$$u(t):=S(t)x_0\,.$$
Luego, por (4) tenemos
$$u(1)=S(1)x_0=\underbrace{x_0}_{\neq 0}=S(0)x_0=u(0)$$
y
$$u(t+1)=S(t+1)x_0=S(t)\underbrace{S(1)x_0}=S(t)x_0=u(t)\,,$$
i.e., $u(1)=u(0)$, u es periódica, de periodo 1 y $u\not\equiv 0$ ($u(1)=x_0\neq 0$).
También, se tiene que u satisface
$$u'(t)-Au=AS(t)x_0-AS(t)x_0=0\,. \tag{5}$$
Luego existe $u\not\equiv 0$ y $v\equiv 0$ soluciones periódicas de (5) con $f\equiv 0$, lo cual es absurdo, por hipótesis. Así, $I-S(1)$ es inyectiva.

<u>$I-S(1):X\longrightarrow X$ es sobreyectiva</u>
Sea $x\in X$, probaremos que existe $y\in X$ tal que $(I-S(1))y=x$.
Definimos,

$$\begin{array}{rcl} K:C([0,1],X) & \to & C([0,1],X) \\ f & \to & Kf:=u \end{array}$$

donde $u\equiv u(t)$ es la única solución periódica de la ecuación (1) respecto a f, la cual existe por hipótesis.
Se observa fácilmente que K es un operador <u>lineal y cerrado</u>.
<u>K es continuo:</u>
Como K es un operador lineal cerrado, usando el **Teorema del gráfico cerrado** tenemos que K es un operador lineal continuo.
Definimos el operador

$$\begin{array}{rcl} T:X & \to & X \\ x & \to & Tx:=(Kf)(0)=u(0) \end{array}$$

donde como $f(t)$ estamos considerando $S(t)x$, i.e., $f(t):=S(t)x$, $f(0)=x$, y u es la única solución periódica de (1) respecto a esta f.
Observamos que <u>T es continua</u>, desde que K, $\mathcal{M}$, y $\mathcal{N}$ lo son, donde $\mathcal{M}(x)=f$, $\mathcal{M}:X\to C([0,1],X)$ y $\mathcal{N}(g)=g(0)$, $\mathcal{N}:C([0,1],X)\to\mathbb{R}$, i.e., $T=\mathcal{N}\circ K\circ\mathcal{M}$.

De la expresión de u (2), en particular para $t=1$, tenemos

$$\begin{aligned} \underbrace{u(0)}_{=Tx}=u(1) &= S(1)u(0)+\int_0^1 S(1-s)f(s)\,ds \\ &= S(1)u(0)+\int_0^1 S(1-s)S(s)x\,ds \\ &= S(1)u(0)+\int_0^1 S(1)x\,ds \\ &= S(1)\underbrace{u(0)}_{=Tx}+S(1)x\pm x \end{aligned} \tag{6}$$

esto es,

$$[I-S(1)](\underbrace{Tx+x}_{y:=})=x$$

o

$$[I-S(1)][T+I]x=x \tag{7}$$

i.e., $\exists y=Tx+x\in X$ tal que $[I-S(1)]y=x$.
Luego $I-S(1)$ es sobreyectiva.
Así, $I-S(1)$ es biyectiva y como es continua, podemos aplicar el **Teorema de la aplicación abierta** y concluir que $I-S(1)$ es un homeomorfismo, es decir que $[I-S(1)]^{-1}$ es continuo. Por lo tanto, $1\in\rho(S(1))$ y además de (7) tenemos $[I-S(1)]^{-1}=T+I$. ■

Teorema 2.5 *Sea A el generador infinitesimal de un semigrupo C_o $(S(t))_{t\geq 0}$. Entonces $1\in\rho(S(1))$ si y solamente si,*

$$2k\pi i\in\rho(A),\quad \forall k\in Z$$

y

$$\sup_{k\in Z}\|(2k\pi iI-A)^{-1}\|<\infty\,.$$

Demostración. Tenemos

$$\begin{aligned} S(1)e^{-2k\pi iI}x - S(0)x &= \int_0^1 \frac{d}{ds}\{S(s)e^{-2k\pi iIs}\}x\,ds \\ &= \int_0^1 [A - 2k\pi iI]S(s)e^{-2k\pi iIs}x\,ds\,. \end{aligned}$$

Como $S(1)\underbrace{e^{-2k\pi iI}}_{=I} = S(1)$, obtenemos

$$S(1)x - x = \int_0^1 [A - 2k\pi iI]S(s)e^{-2k\pi iIs}x\,ds\,.$$

Luego,

$$[S(1) - I]x = [A - 2k\pi iI]\int_0^1 S(s)e^{-2k\pi iIs}x\,ds\,.$$

Así, desde que $1 \in \rho(S(1))$, obtenemos conmutando

$$\begin{aligned} x &= [S(1) - I]^{-1}[A - 2k\pi iI]\int_0^1 S(s)e^{-2k\pi iIs}x\,ds \\ &= [A - 2k\pi iI]\underbrace{[S(1) - I]^{-1}\int_0^1 S(s)e^{-2k\pi iIs}x\,ds}_{Bx:=} \\ &= [A - 2k\pi iI]Bx\,. \end{aligned} \tag{8}$$

También, conmutando tenemos

$$\begin{aligned} x &= [S(1) - I]^{-1}\int_0^1 [A - 2k\pi iI]S(s)e^{-2k\pi iIs}x\,ds \\ &= [S(1) - I]^{-1}\int_0^1 S(s)e^{-2k\pi iIs}\underbrace{[A - 2k\pi iI]x}\,ds \\ &= B([A - 2k\pi iI]x)\,. \end{aligned} \tag{9}$$

De las igualdades (8) y (9), concluimos que existe $[A - 2k\pi iI]^{-1} = B$ y que

$$\begin{aligned} \|[A - 2k\pi iI]^{-1}x\| &= \|Bx\| \\ &= \|[S(1) - I]^{-1}\int_0^1 S(s)e^{-2k\pi iIs}x\,ds\| \\ &\leq M\|\int_0^1 \underbrace{S(s)}_{\|S(s)\|\leq M_1} e^{-2k\pi iIs}x\,ds\| \\ &\leq M_2\|x\|\,. \end{aligned}$$

Finalmente, hemos probado que $2k\pi i \in \rho(A)$ y $\sup_k \|[A - 2k\pi iI]^{-1}\| \leq M_2$.
Recíprocamente, para probar que $1 \in \rho(S(1))$, usaremos el Teorema anterior. Así, basta mostrar que la ecuación (1) posee una única solución periódica.
Sea u una solución de la ecuación (1), es decir satisface $u'(t) = Au(t) + f(t)$ con $u(0) = u(1)$.
Definimos $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} u_k &:= \int_0^1 u(s)e^{-2k\pi is}ds \\ f_k &:= \int_0^1 f(s)e^{-2k\pi is}ds \end{aligned}$$

Afirmamos:

$$u_k = [2k\pi iI - A]^{-1} f_k \,. \tag{10}$$

Unicidad de Solución
Sea v otra solución de (1), entonces por (10) tenemos que

$$v_k = [2k\pi iI - A]^{-1} f_k \,,$$

es decir, $v_k = u_k \; \forall k$. Luego, por Series de Fourier, $v = u$, es decir, la solución de (1) es única.

underlineExistencia de Solución
Definimos

$$U_N(t) := \sum_{k=-N}^{N} u_k e^{2k\pi it}$$
$$F_N(t) := \sum_{k=-N}^{N} f_k e^{2k\pi it} \,.$$

Observación 2.6

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} f_k e^{2k\pi it} = \lim_{N\to+\infty} F_N \;\; en \; L^2(0,1),$$

y

$$\|f\|^2_{L^2(0,1)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \|f_k\|^2 \,.$$

Afirmamos: U_N satisface (1) con F_N. Es decir, se verifica

$$\left| \begin{array}{lcl} \frac{d}{dt}U_N & = & AU_N + F_N \\ U_N(0) & = & U_N(1) \,. \end{array} \right. \tag{11}$$

En efecto, $U_N(0) = \sum_{k=-N}^{N} u_k = U_N(1)$. También, usando (10) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}U_N(t) - AU_N(t) &= \sum_{k=-N}^{N} (2k\pi i) u_k e^{2k\pi it} - \sum_{k=-N}^{N} Au_k e^{2k\pi it} \\ &= \sum_{k=-N}^{N} \underbrace{[2k\pi iI - A]u_k}\, e^{2k\pi it} \\ &= \sum_{k=-N}^{N} f_k e^{2k\pi it} \;=\; F_N(t) \,. \end{aligned}$$

La ecuación (11) implica

$$U_N(t) = S(t)U_N(0) + \int_0^t S(t-s)F_N(s)ds \,. \tag{12}$$

Considerando $t = 1$ en (12) tenemos

$$\underbrace{U_N(1)}_{=U_N(0)} = S(1)U_N(0) + \int_0^1 S(1-s)F_N(s)ds \,,$$

es decir,

$$(I - S(1))U_N(0) = \int_0^1 S(1-s)F_N(s)ds \,. \tag{13}$$

Afirmamos:

$$(I - S(1))U_N(0) \text{ es convergente en } X\,. \tag{14}$$

En efecto, basta mostrar que es de Cauchy,

$$\begin{aligned}
\|\int_0^1 S(1-s)\{F_N(s)-F_L(s)\}ds\| &\leq \int_0^1 \|S(1-s)\{F_N(s)-F_L(s)\}\|ds \\
&= \int_0^1 \|S(1-s)\|\|F_N(s)-F_L(s)\|ds \\
&\leq M\int_0^1 \|F_N(s)-F_L(s)\|ds \\
&\leq M[\int_0^1 \|F_N(s)-F_L(s)\|^2 ds]^{\frac{1}{2}} \\
&= M\|F_N - F_L\|_{L^2(0,1)} \\
&\longrightarrow 0
\end{aligned}$$

cuando $N, L \to +\infty$.
Así, la sucesión $(I - S(1))U_N(0)$ es de Cauchy en X, y como X es un espacio de Banach, la sucesión $(I - S(1))U_N(0)$ es convergente en X.
Por otro lado, aplicando $S(1-t)$ a la igualdad (12) tenemos

$$S(1-t)U_N(t) = S(1)U_N(0) + S(1-t)\int_0^t S(t-s)F_N(s)ds,$$

es decir,

$$S(1)U_N(0) = S(1-t)U_N(t) - S(1-t)\int_0^t S(t-s)F_N(s)ds,$$

e integrando esta expresión de 0 a 1 conseguimos

$$S(1)U_N(0) = \int_0^1 S(1-t)U_N(t)dt - \int_0^1 S(1-t)\int_0^t S(t-s)F_N(s)ds\,dt\,. \tag{15}$$

Afirmamos:

$$S(1)U_N(0) \text{ es convergente en } X\,. \tag{16}$$

En efecto, sea $L < N$,

$$
\begin{aligned}
\| \int_0^1 S(1-s)\{U_N(s)-U_L(s)\}ds\| &\leq \int_0^1 \|S(1-s)\{U_N(s)-U_L(s)\}\|ds \\
&= \int_0^1 \|S(1-s)\|\|U_N(s)-U_L(s)\|ds \\
&\leq M\int_0^1 \|U_N(s)-U_L(s)\|ds \\
&\leq M\int_0^1 \|\sum_L^N u_k e^{2k\pi i s} + \sum_{-N}^{-L-1} u_k e^{2k\pi i s}\|ds \\
&\leq M\int_0^1 \left\{\sum_L^N \|u_k\| + \sum_{-N}^{-L-1}\|u_k\|\right\} ds \\
&\leq M\left\{\sum_L^N \|[2k\pi i I - A]^{-1}\|\|f_k\|\right. \\
&\quad \left. + \sum_{-N}^{-L-1} \|[2k\pi i I - A]^{-1}\|\|f_k\|\right\} \\
&\leq MM_2\left\{\sum_L^N \|f_k\| + \sum_{-N}^{-L-1}\|f_k\|\right\} \\
&\leq MM_2\left\{\sum_L^N \|f_k\|^2 + \sum_{-N}^{-L-1}\|f_k\|^2\right\}^2 \\
&\leq MM_2\left\{\sum_{-N}^N \|f_k\|^2 - \sum_{-L}^{L}\|f_k\|^2\right\}^2 \\
&\quad \longrightarrow 0
\end{aligned}
$$

cuando $N, L \to +\infty$. Luego la sucesión es de Cauchy en X por lo tanto es convergente en X. Ahora nos falta ver que el segundo término de la sucesión $s(1)U_N(0)$ es convergente, para eso hacemos lo siguiente

$$
\begin{aligned}
\| \int_0^1 S(1-t)\int_0^t S(t-s)\{F_N(s)-F_L(s)\}ds\,dt\| &\leq \int_0^1 \|S(1-t)\|\int_0^t \|S(t-s)\|\|F_N(s)-F_L(s)\|ds\,dt \\
&\leq M^2\int_0^1 \|F_N(s)-F_L(s)\|ds \\
&\leq M^2\left[\int_0^1 \|F_N(s)-F_L(s)\|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq M^2\|F_N - F_L\|_{L^2(0,1)} \\
&\quad \longrightarrow 0
\end{aligned}
$$

cuando, $N, L \to +\infty$.
Como

$$U_N(0) = (I - S(1))U_N(0) + S(1)U_N(0)\,,$$

de (14) y (16) tenemos que $U_N(0)$ **es convergente en** X, i.e., $\exists\, u_0 \in X$ tal que $U_N(0) \to u_0$ y como $U_N(0) = U_N(1)$ se tiene que $U_N(1) \to u_0$.

Afirmamos:

$$S(t)U_N(0) \text{ converge en } L^2(0,1)\,.$$

y mejor aún

$$S(t)U_N(0) \text{ converge a } S(t)u_0 \text{ en } L^2(0,1)\,.$$

En efecto, basta mostrar que $S(t)U_N(0)$ es de Cauchy en $L^2(0,1)$. Hacemos,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \|S(t)\{U_N(0)-U_L(0)\}\|_X^2 dt &\leq \int_0^1 \underbrace{\|S(t)\|^2}_{\leq M^2} \|U_N(0)-U_L(0)\|_X^2 dt \\
&\leq M^2 \int_0^1 \|U_N(0)-U_L(0)\|_X^2 dt \\
&= M^2 \|U_N(0)-U_L(0)\|_X^2 \\
&\quad \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

cuando $N, L \to +\infty$.
Siguiendo los cálculos como arriba tenemos que

$$\int_0^1 \|S(t)\{U_N(0)-u_0\}\|_X^2 dt \leq M^2 \|U_N(0)-u_0\|_X^2 \longrightarrow 0$$

cuando $N \to +\infty$.
<u>**Afirmamos:**</u>

$$\int_0^t S(t-s)F_N(s)ds \text{ converge en } L^2(0,1)$$

y mejor aún

$$\int_0^t S(t-s)F_N(s)ds \text{ converge a } \int_0^t S(t-s)f(s)ds \text{ en } L^2(0,1)\,.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left\| \int_0^t S(t-s)\{F_N(s)-F_L(s)\}ds \right\|^2 dt \\
&\leq \int_0^1 \left\{ \int_0^t \|S(t-s)\| \|F_N(s)-F_L(s)\| ds \right\}^2 dt \\
&\leq M^2 \int_0^1 \left\{ \int_0^t \|F_N(s)-F_L(s)\| ds \right\}^2 dt \\
&\leq M^2 \left\{ \int_0^1 \|F_N(s)-F_L(s)\| ds \right\}^2 \\
&\leq M^2 \left\{ \int_0^1 \|F_N(s)-F_L(s)\|^2 ds \right\} \\
&= M^2 \|F_N - F_L\|_{L^2(0,1)}^2 \\
&\longrightarrow 0
\end{aligned}$$

cuando $N, L \to +\infty$.

Siguiendo los cálculos como arriba conseguimos,

$$\int_0^1 \left\| \int_0^t S(t-s)\{F_N(s)-f(s))\}ds \right\|^2 dt \leq M^2 \|F_N - f\|_{L^2(0,1)}^2 \to 0$$

cuando $N \to +\infty$.

Luego, U_N converge a w en $L^2(0,1)$ donde

$$w(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)\,ds\,.$$

Ya vimos que $w(1) = w(0) = u_0$, y se prueba que $\underline{w \text{ es solución de (1) para } f}$. En efecto, para eso introducimos un elemental e importante resultado de Cálculo,

Observación 2.7 $\dfrac{d}{dt}\left\{\displaystyle\int_0^t g(t,s)\,ds\right\} = g(t,t) + \displaystyle\int_0^t \frac{d}{dt}g(t,s)\,ds.$

Ahora, procedemos a hacer los cálculos

Observación 2.8

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^t S(t-s)f(s)\,ds\right\} &= S(0)f(t) + \int_0^t \frac{d}{dt}S(t-s)f(s)\,ds \\ &= f(t) + \int_0^t AS(t-s)f(s)\,ds \\ &= f(t) + A\int_0^t S(t-s)f(s)\,ds\,.\end{aligned}$$

Observación 2.9 Sea $u(t) := S(t)u_0 + \displaystyle\int_0^t S(t-s)f(s)\,ds$, entonces u satisface $u'(t) = Au(t) + f(t)$.

Luego, por unicidad $w = u$. Esto es, existe la solución de (1), que se expresa por

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)\,ds\,.$$

■

Corolario 2.10 *Sea A el generador infinitesimal de un semigrupo C_o. Entonces $e^{\lambda t} \in \rho(S(t))$ si y solamente si*

$$\lambda + \frac{2k\pi i}{t} \in \rho(A) \quad y \quad \|((\lambda + \frac{2k\pi i}{t})I - A)^{-1}\| < \infty\,, \forall k \in Z\,.$$

Observación 2.11 Este corolario nos dice que: $1 \in \rho(S(t))$ si y solamente si

$$\frac{1}{t}L_\mu \subset \rho(A) \quad \text{y} \quad \sup_{\lambda \in \frac{1}{t}L_\mu} \|(\lambda I - A)^{-1}\| < \infty\,.$$

3. El Teorema de Gearhart

A seguir enunciamos y probamos el importante resultado de caracterización de un Semigrupo C_o exponencialmente estable.

Teorema 3.1 (Gearhart) *Sea $(S(t))_{t\geq 0}$ un semigrupo C_o de contracciones en un espacio de Hilbert. Entonces, $(S(t))_{t\geq 0}$ es* **exponencialmente estable** *(esto es, $\exists M \geq 1$, $\mu > 0$ tal que $\|S(t)\| \leq Me^{-\mu t}$, $\forall t \geq 0$) si y solamente si*

a) $\rho(A) \supset i\mathbb{R} := \{i\beta, \beta \in \mathbb{R}\}$

b) $\limsup_{|\beta|\to\infty} \|(i\beta I - A)^{-1}\| < \infty$.

Demostración. Desde que $\|S(t)\| < |\lambda|$ y por el **Teorema del Inverso** tenemos que existe

$$\begin{aligned} (\lambda I - S(t))^{-1} &= (\lambda(I - \lambda^{-1}S(t)))^{-1} \\ &= \lambda^{-1}\underbrace{(I - \lambda^{-1}S(t))^{-1}}_{\exists} \\ &= \lambda^{-1}(I + \frac{S(t)}{\lambda} + \frac{S(t)^2}{\lambda^2} + \ldots)\,. \end{aligned}$$

Esto es, si $\|S(t)\| < |\lambda|$, entonces $\lambda \in \rho(S(t))$.
Luego, si $\lambda \in \sigma(S(t))$ entonces $\|S(t)\| \geq |\lambda|$.
Como $(S(t))_{t\geq 0}$ es un semigrupo C_o de contracciones, tenemos que $\|S(t)\| \leq 1$, luego

$$\sigma(S(t)) \subseteq \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq 1\}\,.$$

Además, utilizando la hipótesis a) y b) del Teorema de Gearhart se tiene

$$\{\frac{2\pi ni}{t}\,; n \in \mathbb{N}\} \subset \rho(A) \text{ y } \sup_{n\in\mathbb{N}} \|(\frac{2\pi ni}{t}I - A)^{-1}\| \leq M$$

para $\lambda = 0$, entonces por el Corolario previo, obtenemos que $1 \in \rho(S(t))$. Análogamente procedemos para $\lambda = i\theta$, obteniendo $e^{i\theta} \in \rho(S(t))$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, la frontera de la bola unitaria está en el resolvente de $S(t)$.
Así, el espectro de $S(t)$ está contenido en el disco abierto de radio 1, i.e.,

$$\sigma(S(t)) \subseteq \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}\,.$$

Ahora sabemos que $\sigma(S(t))$ es un conjunto compacto en $\mathbb{C}$, luego

$$r_\sigma(S(t)) = \max_{\lambda\in\sigma(S(t))} |\lambda| = |\lambda_o| < 1 \text{ para algún } \lambda_o \in \sigma(S(t))\,.$$

Tenemos que se verifica: $e^{tw_o(A)} = r_\sigma(S(t))$, luego $e^{tw_o(A)} < 1$ y esto nos permite deducir que $tw_o(A) < 0$.
Así, como $t > 0$ entonces $w_o(A) < 0$, y de la definición de $w_o(A)$ tenemos

$$0 > w_o(A) = \lim_{z\to\infty} \frac{ln\|S(z)\|}{z}\,,$$

es decir, existe $L > 0$ tal que

$$\lim_{z\to\infty} \frac{ln\|S(z)\|}{z} = -L\,.$$

Entonces, dado $\epsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que si $z > M$ implica $\left|\frac{ln\|S(z)\|}{z} + L\right| < \epsilon$.
Ahora considerando $\epsilon := \frac{L}{2}$, tenemos $ln\|S(z)\| < \frac{-Lz}{2}$, para $z > M$.
Finalmente tomando la exponencial a esta desigualdad, tenemos $\|S(z)\| < e^{\frac{-Lz}{2}}$ para $z > M$, es decir $(S(t))_{t\geq 0}$ es exponencialmente estable. ■

4. Comentarios

En esta sección queremos citar algunas aplicaciones del Teorema de Gearhart, por ejemplo los artículos [4], [5], y enfatizar la riqueza en modelos que posee el libro [1].

Así, el Teorema de Gearhart también se usa para probar la no estabilidad exponencial de algunos sistemas disipativos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Liu Z. and Zheng S., (1999). *Semigroups associated with dissipative systems.* Chapman Hall / CRC.

[2] Pazy A. (1983). *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Applied Mathematical Sciences. 44 Springer Verlag, Berlin.

[3] Prüs J. (1984). *On the spectrum of C_0- semigroup.* Transactions of the American Mathematical Society. 284 : 847–857.

[4] Santiago Y. (2012). *Global existence and exponential stability for a coupled wave system.* Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications , Vol 16, N° 1-2: 29–46.

[5] Santiago Y. (2013). *Global existence and Exponential stability for a Timoshenko Beam model.* International Journal of Applied Science and Technology. Vol 3, N° 7: 141–150.