PESQUIMAT, Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XVI N°1, pp. 7-18, Lima - Perú, Abril 2014

SOBRE LA DESIGUALDAD DE POINCARÉ

Yolanda Santiago Ayala[1]

Resumen: Enunciamos y damos una prueba de la desigualdad de Poincaré cuando el dominio está acotado en una dirección, usando el caso unidimensional donde hacemos uso del cálculo elemental. Damos consecuencias importantes en los espacios de Sobolev, y hacemos un estudio del dominio donde vale o no la desigualdad de Poincaré, usando el Lema de Equivalencia.

Palabras Clave: Desigualdad de Poincaré, Lema de Equivalencia, Espacios de Sobolev.

ON THE POINCARÉ' S INEQUALITY

Abstract: We state and give a proof of the Poincaré's inequality when the domain is bounded in one direction, using the one dimensional case where we use elementary calculus. We give important consequences in the Sobolev spaces, and we make a study of the domain where Poincaré's inequality holds or not, using Equivalence's Lemma.

Key words: Poincaré's inequality, Equivalence's lemma, Sobolev Spaces.

1. Introducción

En este artículo estudiamos la desigualdad de Poincaré, desigualdad fundamental que relaciona en norma $L^p(\Omega)$ las funciones y sus derivadas. Esta desigualdad es usada en muchas aplicaciones en EDP.

Comenzamos de la forma más simple, para funciones en un intervalo de $\mathbb{R}$ que se anulan en uno de los extremos, usando cálculo elemental. Luego lo hacemos para funciones en un abierto de $\mathbb{R}^n$, acotado en una dirección. También, damos su ge-neralización y un ejemplo donde no vale la desigualdad de Poincaré.

Proporcionamos un ejemplo simple de aplicación en el estudio del comportamiento asintótico de la ecuación $u_t = \Delta u$.

Finalmente para estudiar las propiedades de un dominio Ω, donde valga o no la desigualdad de Poincaré, usamos el Lema de Equivalencia.

Nuestro artículo está organizado como sigue. En la sección 2, enunciamos el Lema de Equivalencia que usaremos en la sección 4. En la sección 3, enunciamos y probamos la desigualdad de Poincaré tanto para el caso unidimensional como para el n-dimensional. Damos ejemplos de Ω y f tal que no vale la desigualdad de Poincaré y una breve aplicación. Vemos también que la desigualdad de Poincaré nos permite obtener la equivalencia de normas en el espacio donde vale Poincaré.

En la sección 4, estudiamos al dominio Ω donde vale o no la desigualdad de Poincaré.

Finalmente, en la sección 5, comentamos que, fuera del espacio euclídeo es posible hacer una generalización a nivel de espacios medibles métricos.

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: yssantiago@gmail.com

2. Preliminares

Enunciamos el siguiente Lema, que será usado en la prueba del ítem 6 del Lema 4.1.

Lema 2.1 (Lema de Equivalencia) *Sea $(E_1, \|\cdot\|_1)$ un espacio de Banach, $(E_2, \|\cdot\|_2)$ y $(E_3, \|\cdot\|_3)$ espacios normados, $A \in L(E_1, E_2)$ y $B \in L(E_1, E_3)$ de modo que verifiquen:*

1. $\|u\|_1 \approx \|Au\|_2 + \|Bu\|_3$
2. *B es compacto*

entonces

1. $dim\,(Ker(A)) < \infty$.
2. *Rango* (A) *es cerrado.*
3. *Existe una constante C tal que si $(F, \|\cdot\|_F)$ es un espacio normado y $\mathcal{L} \in L(E_1, F)$ satisface $\mathcal{L}u = 0$ siempre que $Au = 0$, entonces tenemos*
$$\|\mathcal{L}u\|_F \leq C\|\mathcal{L}\|\|Au\|_2\,,\ \forall u \in E_1\,.$$
4. *Si G es un espacio normado y $M \in L(E_1, G)$ satisface: $Mu \neq 0$ siempre que $Au = 0$ y $u \neq 0$. Entonces*
$$\|u\|_1 \approx \|Au\|_2 + \|Mu\|_G\,.$$

Prueba. Ver [6].

3. La Desigualdad de Poincaré

3.1. Caso: $I \subset \mathbb{R}$

Lema 3.1 *Sea $u \in C^1(I)$, donde $I = (0, l)$, $u(0) = 0$ entonces*
$$|u|_{L^p(I)} \leq C_p |u'|_{L^p(I)}\,, \tag{3.1}$$
donde C_p es la constante de Poincaré, independiente de la función u.

Prueba. Sabemos que
$$u(x) - u(0) = \int_0^x u'(s)ds\ ,\ x \in (0, l)\,.$$
Como $u(0) = 0$ entonces
$$u(x) = \int_0^x u'(s)ds\,.$$
Usando la desigualdad de Hölder, conseguimos
$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \int_0^x |u'(s)|ds \\ &\leq \int_0^l |u'(s)|\cdot 1ds \\ &\leq |u'|_{L^p}\cdot l^{\frac{p-1}{p}}\,. \end{aligned}$$

Entonces

$$|u(x)|^p \leq |u'|^p_{L^p} \cdot l^{p-1}.$$

Luego

$$\int_0^l |u(x)|^p dx \leq |u'|^p_{L^p} \cdot l^p.$$

Así,

$$|u|_{L^p} \leq |u'|_{L^p} \cdot l,$$

donde $C_p = l$ es la longitud del intervalo.

Observación 3.1 Análogamente vale la desigualdad (3.1) si $u \in C^1(I)$ y $u(l) = 0$.

3.2. Caso: $\Omega \subset I\!R^n$

Teorema 3.1 (Desigualdad de Poincaré) *Sea Ω un abierto acotado en una dirección. Entonces vale la siguiente desigualdad*

$$|u|_{L^p(\Omega)} \leq C_p |\nabla u|_{L^p(\Omega)}, \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

donde $|\nabla u|_{L^p(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^n |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}$ *y* C_p *es la constante de Poincaré.*

Prueba. Supongamos que Ω sea acotado en una dirección paralela a los ejes coordenados. Así, sea $R := \{(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in I\!R^n$ tal que $x_n \in (a,b)\}$ tal que $\Omega \subset R$.
Sea $u \in W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{|\cdot|_{1,p}}$ entonces existen $\phi_m \in C_0^\infty(\Omega)$ para $m = 1, \ldots,$ tal que $\phi_m \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Todo se reduce a probar la desigualdad para $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.
Se sabe que si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ entonces $\widetilde{u} \in W^{1,p}(R)$, donde

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si} \quad x \in \Omega \\ 0 & \text{si} \quad x \in R - \Omega \end{cases}.$$

Además, $D^\alpha \widetilde{u} = \widetilde{D^\alpha u}$ para $|\alpha| \leq 1$ y $\|u\|_{1,p,\Omega} = \|\widetilde{u}\|_{1,p,R}$.
Sea $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ entonces $\widetilde{\phi} \in C_0^\infty(R)$ y

$$\widetilde{\phi}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x) - \underbrace{\widetilde{\phi}(x_1, \ldots, x_{n-1}, a)}_{=0} = \int_a^x \frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, s)\, ds.$$

Usando la desigualdad de Hölder tenemos

$$\begin{aligned} |\widetilde{\phi}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x)| &= \left| \int_a^x \frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, s)\, ds \right| \\ &\leq \int_a^x \left| \frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, s) \right| ds \\ &\leq \int_a^b \left| \frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, s) \right| \cdot 1\, ds \\ &\leq \left(\int_a^b \left| \frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, s) \right|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} (b-a)^{\frac{p-1}{p}}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Elevando a la potencia p e integrando (3.2) sobre (a,b), con respecto a x tenemos

$$\begin{aligned}\int_a^b |\widetilde{\phi}(x_1,\ldots,x_{n-1},x)|^p\,dx &\le \left(\int_a^b \left|\frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial x_n}(x_1,\ldots,x_{n-1},s)\right|^p ds\right).(b-a)^{p-1}\int_a^b dx \\ &= \int_a^b \left|\frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial x_n}(x_1,\ldots,x_{n-1},s)\right|^p ds\,.(b-a)^p\,. \qquad (3.3)\end{aligned}$$

Integrando (3.3) con respecto a $\widetilde{x}=(x_1,\ldots,x_{n-1})$ tenemos

$$\int_R |\widetilde{\phi}(y)|^p\,dy \le \int_R \left|\frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial x_n}(y)\right|^p dy\,.(b-a)^p\,, \qquad (3.4)$$

pero $\int_R|\widetilde{\phi}(y)|^p\,dy=\int_\Omega|\phi(y)|^p\,dy$ y $\int_R|\frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial x_n}(y)|^p\,dy=\int_\Omega|\frac{\partial\phi}{\partial x_n}(y)|^p\,dy$, entonces

$$\int_\Omega |\phi(y)|^p\,dy \le \int_\Omega \left|\frac{\partial\phi}{\partial x_n}(y)\right|^p dy\,.(b-a)^p\,. \qquad (3.5)$$

Esto es,

$$|\phi|_{L^p(\Omega)} \le \left|\frac{\partial\phi}{\partial x_n}\right|_{L^p(\Omega)}.\underbrace{(b-a)}_{C_p:=}\,,\quad \forall\phi\in C_0^\infty(\Omega)\,,$$

$$|\phi|_{L^p(\Omega)} \le |\nabla\phi|_{L^p(\Omega)}.C_p\,,\quad \forall\phi\in C_0^\infty(\Omega)\,.$$

Observación 3.2 En las hipótesis del Teorema 3.1, si $\frac{\partial u}{\partial x_n}=0$ entonces $u=0$ en L^p.

Observación 3.3 (Desigualdad de Poincaré-Wirtinger) Sea Ω un abierto, acotado, conexo y de clase C^1. Entonces existe $C>0$ tal que

$$|u-\widetilde{u}|_{L^p} \le C|\nabla u|_{L^p}\,,\ \forall u\in W^{1,p}(\Omega)\,,\ 1\le p\le\infty\,,$$

donde $\widetilde{u}=\frac{1}{m^*(\Omega)}\int_\Omega u(x)dx\,.$

Para su prueba, citamos [4].

Observación 3.4 En la observación anterior si $\widetilde{u}=0$, entonces vale la desigualdad de Poincaré.

Observación 3.5 Si $u\in W^{1,p}(\Omega)$ con Ω abierto acotado tal que $u|_{\Sigma_0}=0$ con $\Sigma_0\subset\partial\Omega$ (i.e. u es de trazo 0 en una parte de la frontera), entonces **vale la desigualdad de Poincaré**.

3.3. Ejemplo y Aplicación

Observación 3.6 Si $\Omega=I\!R$, **no vale la desigualdad de Poincaré**. En efecto, sea $\rho\in C_0^\infty(\Omega)$, $\rho=1$ en $|x|\le 1$, $\rho=0$ en $|x|\ge 2$ y $0\le\rho\le 1$.

Defina:

$$\rho_m(x)=\rho\left(\frac{x}{m}\right)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad |x|\le m\\ 0 & \text{si} \quad |x|\ge 2m\end{cases}\,.$$

Luego $|\rho_m|_{L^2}^2\ge[m^*\{x,|x|\le m\}]^2\to+\infty$ cuando $m\to+\infty$. Así, $|\rho_m|_{L^2}\to+\infty$ cuando $m\to+\infty$.

También, $|\rho_m'|_{L^2}^2=\frac{1}{m^2}|\rho'|_{L^2}^2\to 0$ cuando $m\to+\infty$, luego $|\rho_m'|_{L^2}\to 0$ cuando $m\to+\infty$.

Así, no se cumple la desigualdad de Poincaré.

Análogamente, esto también sucede si $\Omega=I\!R^n$.

A continuación presentamos una pequeña aplicación, que ilustra el uso de la desigualdad de Poincaré.

Observación 3.7 (Aplicación) Sea Ω un abierto acotado. Sea

$$(P)\left|\begin{array}{rcl} u_t & = & \Delta u \\ u|_{\partial\Omega} & = & 0\,. \end{array}\right.$$

Entonces la energía $E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega |u|^2\,dx$ asociada al problema (P) decae exponencialmente. i.e. $E(t) \leq E(0)e^{-\lambda t}$.

En efecto, multiplicando por u la ecuación, luego integrando sobre Ω y usando la Identidad de Green tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |u|^2\,dx = \int_\Omega u_t u\,dx &= \int_\Omega \Delta u\, u\,dx \\ &= -\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla u\,dx + \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial\nu} \\ &= -\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\,, \end{aligned}$$

i.e., $E'(t) = -\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx$.
Pero, por la desigualdad de Poincaré tenemos que $-\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \leq -\frac{2}{C_p{}^2}E(t)$. Luego $E'(t) \leq -\lambda E(t)$, con $\lambda := \frac{2}{C_p{}^2}$ y que resolviendo, obtenemos: $E(t) \leq E(0)e^{-\lambda t}$.

3.4. Equivalencias de normas

Observación 3.8 Si $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ entonces $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in W_0^{m-1,p}(\Omega)$.

Observación 3.9 Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y acotado en una dirección, en $W_0^{1,p}(\Omega)$ la norma $|\cdot|_{1,p}$ **es equivalente a** la norma del gradiente: $|\nabla\cdot|_{L^p}$, i.e. existe una constante $b > 0$ tal que $b|u|_{1,p} \leq |\nabla u|_{L^p} \leq |u|_{1,p}$, $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
Podemos introducir la siguiente notación $|u|^*_{1,p} := |\nabla u|_{L^p}$.

Observación 3.10 Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y acotado en una dirección. Si $u \in W_0^{2,p}(\Omega)$ entonces la norma $|\cdot|_{2,p}$ **es equivalente a** la norma

$$|\cdot|^*_{2,p} := \left(\sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha(\cdot)|^p_{L^p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

En efecto, para ello basta observar que suceden:

1. $|u|_{L^p} \leq |\nabla u|_{L^p}$
2. $|\frac{\partial u}{\partial x_i}|_{L^p} \leq C_p(\sum_{j=1}^n |\frac{\partial^2 u}{\partial x_j x_i}|^p_{L^p})^{\frac{1}{p}}$, $\forall i = 1,\ldots,n$.
3. $|\nabla u|_{L^p} \leq C(\sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u|^p_{L^p})^{\frac{1}{p}}$
4. $|u|_{L^p} \leq C|u|^*_{2,p}$.

Análogamente sucede para el caso $m > 2$.

Observación 3.11 Sea Ω un abierto de $I\!R^n$ y acotado en una dirección. Si $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ entonces la norma $|\cdot|_{m,p}$ **es equivalente a** la norma

$$|\cdot|^*_{m,p} := \Big(\sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha(\cdot)|^p_{L^p}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

4. Estudio de Ω donde vale Poincaré

Para nuestro estudio de Ω donde valga la desigualdad de Poincaré, introducimos la siguiente definición.

Definición 4.1 *Si $1 \leq p \leq \infty$ y $\emptyset \neq \Omega \subset I\!R^n$, un conjunto abierto, diremos que* **la desigualdad de Poincaré se cumple para un subespacio** *V de $W^{1,p}(\Omega)$ si existe una constante C tal que*

$$|u|_{L^p(\Omega)} \leq C|\nabla u|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in V.$$

Lema 4.1 *Se verifican los siguientes enunciados.*

1. *Si $m(\Omega) < \infty$ y $f(x) = 1$, $f \in V \subset W^{1,p}(\Omega)$ entonces* **no** *se cumple la desigualdad de Poincaré en V.*

2. *Si Ω contiene bolas grandes arbitrariamente (i.e. $\exists r_n \to +\infty$ y $\exists x_n \in \Omega$ tal que $B(x_n, r_n) \subset \Omega$), entonces* **no** *se cumple la desigualdad de Poincaré en V.*

3. *Si Ω está incluido en una franja de ancho d (i.e. $\exists \xi \in I\!R^n$ con $\|\xi\| = 1$ y $\Omega \subset \{x \in I\!R^n$ tal que $\alpha < \xi \cdot x < \beta\}$ y $d = \beta - \alpha$), entonces*

$$|u|_{L^p} \leq C_o d|\nabla u|_{L^p}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

   donde C_0 es una constante universal, independiente del Ω considerado.

4. *Sea $p = \infty$. Vale la desigualdad de Poincaré en $W_0^{1,\infty}(\Omega)$ si y solamente si existe $C < \infty$ tal que $d(x, \partial\Omega) \leq C \quad \forall x \in \Omega$.*

5. *Si $m(\Omega) < \infty$, entonces vale la desigualdad de Poincaré en $W_0^{1,p}(\Omega)$ para $1 \leq p \leq \infty$, y se verifica*

$$|u|_{L^p} \leq C(p)[m(\Omega)]^{\frac{1}{n}}|\nabla u|_{L^p}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

6. *Si la inyección de V en $L^p(\Omega)$ es compacta, entonces son equivalentes los siguientes resultados*

   a) *Vale la desigualdad de Poincaré en $V \subset W^{1,p}(\Omega)$.*

   b) *($f(x) = 1$) $f \notin V$.*

Prueba.

1. Supongamos que valga la desigualdad de Poincaré en el subespacio V, i.e., existe una constante C tal que

$$|u|_{L^p(\Omega)} \leq C|\nabla u|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in V. \tag{4.1}$$

Tenemos $\int_\Omega f(x)\,dx = m(\Omega) < \infty$ y $|f|_{L^p}^p = \int_\Omega |f(x)|^p\,dx = m(\Omega) < \infty$. Como $f(x) = 1$ en $L^p(\Omega)$, entonces $\nabla f = (0,\ldots,0)$, y $\|\nabla f\|_{L^p} = 0$. En particular vale (4.1) para $f \equiv 1$:

$$0 \le [m(\Omega)]^{\frac{1}{p}} = |f|_{L^p(\Omega)} \le C \underbrace{|\nabla f|_{L^p(\Omega)}}_{=0}$$

entonces $m(\Omega) = 0$, esto es $|f|_{L^p(\Omega)} = 0$, i.e. $f = 0$ en $L^p(\Omega)$, lo cual es absurdo, pues $f = 1$ en $L^p(\Omega)$.

2. Sea $\phi \in C_0^\infty(I\!R^n)$, $\phi \ne 0$ con $supp(\phi) \subset B_1(0)$ y $0 \le \phi \le 1$.
Definamos:

$$u_m(x) := \phi\left(\frac{x - x_m}{r_m}\right).$$

Entonces $u_m \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $supp(u_m) = \overline{B_{r_m}(x_m)}$.
Tenemos

$$\begin{aligned}\int_{I\!R^n} |u_m(x)|^p\,dx &= \int_{B_{r_m}(x_m)} \left|\phi\left(\frac{x-x_m}{r_m}\right)\right|^p dx\\ &= \int_{B_1(0)} |\phi(y)|^p {r_m}^n\,dy\\ &= {r_m}^n |\phi|_{L^p(B_1(0))}^p .\end{aligned}$$

i.e.,

$$|u_m|_{L^p(I\!R^n)}^p = {r_m}^n |\phi|_{L^p(B_1(0))}^p,$$

$$|u_m|_{L^p(I\!R^n)} = {r_m}^{\frac{n}{p}} |\phi|_{L^p(B_1(0))}. \tag{4.2}$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\left(\frac{x-x_m}{r_m}\right)\frac{1}{r_m}$$

entonces

$$\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|_{L^p}^p = r_m^{n-p}\left|\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right|_{L^p}^p, \tag{4.3}$$

i.e.,

$$\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|_{L^p} = r_m^{\frac{n}{p}-1}\left|\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right|_{L^p}.$$

También, usando (4.3), tenemos

$$\begin{aligned}|\nabla u_m|_{L^p}^p &= \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|_{L^p}^p\\ &= r_m^{n-p}\sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right|_{L^p}^p\\ &= r_m^{n-p}\|\nabla\phi\|_{L^p}^p,\end{aligned}$$

i.e.,

$$|\nabla u_m|_{L^p} = r_m^{\frac{n}{p}-1}\|\nabla \phi\|_{L^p}. \tag{4.4}$$

Supongamos que valga la desigualdad de Poincaré en $W_0^{1,p}(\Omega)$, entonces en particular vale para $u_m \in W_0^{1,p}(\Omega)$, y usando las desigualdades (4.2), (4.4) tenemos

$$r_m^{\frac{n}{p}}|\phi|_{L^p(B_1(0))} = |u_m|_{L^p} \le C|\nabla u_m|_{L^p} \le C r_m^{\frac{n}{p}-1}|\nabla\phi|_{L^p},$$

es decir

$$r_m \leq C\frac{|\nabla\phi|_{L^p}}{|\phi|_{L^p}}\,, \quad \phi \neq 0\,,$$

i.e., (r_m) está acotado, lo cual es absurdo.

3. Sea $I := (\alpha, \beta)$ y $v \in C_0^\infty(I)$, entonces

$$v(x) - \underbrace{v(\alpha)}_{=0} = \int_\alpha^x \frac{\partial v}{\partial s}(s)\,ds\,,$$

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_\alpha^x \frac{\partial v}{\partial s}(s)\,ds\,, \\ |v(x)| &\leq \int_\alpha^x \left|\frac{\partial v}{\partial s}(s)\right| ds\,. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Análogamente, tenemos

$$\underbrace{v(\beta)}_{=0} - v(x) = \int_x^\beta \frac{\partial v}{\partial s}(s)\,ds\,,$$

$$\begin{aligned} v(x) &= -\int_x^\beta \frac{\partial v}{\partial s}(s)\,ds\,, \\ |v(x)| &\leq \int_x^\beta \left|\frac{\partial v}{\partial s}(s)\right| ds\,. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Sumando (4.5) con (4.6), tenemos

$$2|v(x)| \leq \int_\alpha^\beta \left|\frac{\partial v}{\partial s}(s)\right| ds\,.$$

Luego,

$$|v(x)| \leq \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left|\frac{\partial v}{\partial s}(s)\right| ds\,.$$

i.e.,

$$|v|_\infty \leq \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left|\frac{\partial v}{\partial s}(s)\right| ds\,. \tag{4.7}$$

También, probaremos que si $v \in C_0^\infty(I)$ entonces **se verifica que** $|v|_{L^p} \leq |v|_{L^\infty} d^{\frac{1}{p}}$. En efecto,

$$\int_\alpha^\beta |v(s)|^p\,ds \leq \int_\alpha^\beta |v|_\infty^p\,ds = |v|_\infty^p \int_\alpha^\beta ds = |v|_\infty^p(\beta - \alpha)\,,$$

i.e.,

$$|v|_{L^p} \leq |v|_{L^\infty} d^{\frac{1}{p}}\,. \tag{4.8}$$

Usando la desigualdad de Hölder, también tenemos que

$$\int_\alpha^\beta \left|\frac{\partial v}{\partial s}(s)\right| \cdot 1\,ds \leq \left|\frac{\partial v}{\partial s}\right|_{L^p(I)} d^{\frac{p-1}{p}}\,. \tag{4.9}$$

Usando la desigualdad (4.7) y (4.9) tenemos

$$|v|_\infty \leq \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left|\frac{\partial v}{\partial s}(s)\right| ds \leq \frac{1}{2}\left|\frac{\partial v}{\partial s}\right|_{L^p} d^{\frac{p-1}{p}}\,. \tag{4.10}$$

Usando (4.10) en (4.8), tenemos

$$|v|_{L^p} \leq \frac{d}{2}\left|\frac{\partial v}{\partial s}\right|_{L^p} \quad \text{siempre que } v \in C_0^\infty(I)\,. \tag{4.11}$$

Sea $\Omega \subset \{x \in I\!R^n\,,\ \alpha < \xi \cdot x < \beta\}$ tal que $\xi = e_n$, entonces si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$, denotemos por $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ donde $\alpha < x_n < \beta$, obtenemos

$$\int_\alpha^\beta |u(x', x_n)|^p\, dx_n \leq \left(\frac{d}{2}\right)^p \int_\alpha^\beta \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|^p dx_n\,.$$

Integrando, tenemos

$$\int\int_\alpha^\beta |u(x', x_n)|^p\, dx_n\, dx' \leq \left(\frac{d}{2}\right)^p \int\int_\alpha^\beta \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}(x', x_n)\right|^p dx_n\, dx'\,.$$

Así ,

$$|u|_{L^p}^p \leq \left(\frac{d}{2}\right)^p \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|_{L^p}^p$$

i.e.,

$$|u|_{L^p} \leq \frac{d}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|_{L^p} \leq d.\frac{1}{2}.\left|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|_{L^p}\,,$$

$$|u|_{L^p} \leq d.\frac{1}{2}.|\nabla u|_{L^p} \quad \text{para } 1 \leq p < \infty\,.$$

4. Sea $p = \infty$. Si sucede la desigualdad de Poincaré en $W^{1,\infty}(\Omega)$ entonces debido al ítem 3, Ω no contiene bolas grandes, y se cumple el enunciado.

   Sea $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Sea $x \in \Omega$, luego si $d(x, \partial\Omega) < C_1$, entonces existe $z \in \partial\Omega$ tal que $d(x, \partial\Omega) \leq d(x, z) < c_1$. Tomamos $y \in [x, z]$ (el segmento x,z) de modo que $y \notin supp(u)$, i.e., $u(y) = 0$, luego $u(x) - u(y) = u(x)$ y

$$\begin{aligned} |u(x)| &= |u(x) - u(y)| \\ &\leq |Du(\xi)||x - y| \\ &\leq |\nabla u(\xi)||x - z| \\ &\leq |\nabla u|_{L^\infty} c_1\,. \end{aligned}$$

   Así, $|u(x)| \leq |\nabla u|_{L^\infty} c_1$, $\forall x \in \Omega$. i.e., $\forall u \in C_0^\infty(\Omega)$, $|u|_{L^\infty} \leq |\nabla u|_{L^\infty} c_1$.
   $|u|_{L^\infty} \leq c_1 |\nabla u|_{L^\infty}$, $\forall u \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$.

5. Presentamos dos casos

   a) Si $p = \infty$ y como $m(\Omega) < \infty$, entonces existe $C > 0$ tal que $d(x, \partial\Omega) \leq C$, luego por el ítem 4, vale la desigualdad de Poincaré en $W_0^{1,\infty}(\Omega)$.

   b) Si $1 \leq p < \infty$. Escogemos $q < n$ tal que $1 \leq q \leq p < q^*$, donde q^* es (por el Teorema de inmersión de Sobolev caso: $\frac{1}{q} - \frac{1}{n} > 0$) $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$, tenemos: $W^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L^{q^*}(\Omega)$ y

$$|u|_{L^{q^*}} \leq C|\nabla u|_{L^q}\,. \tag{4.12}$$

   Afirmamos que

$$|u|_{L^p} \leq |u|_{L^{q^*}} [m(\Omega)]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q^*}}\,. \tag{4.13}$$

En efecto, usando la desigualdad de Hölder y que $m(\Omega) < \infty$, tenemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u|^p &= \int_\Omega \underbrace{|u|^p}_{\in L^{\frac{q^*}{p}}} \cdot 1 \\ &\leq \| |u|^p |_{L^{\frac{q^*}{p}}} [m(\Omega)]^{1-\frac{p}{q^*}} .\end{aligned}$$

i.e., $|u|^p_{L^p} \leq \| |u|^p |_{L^{\frac{q^*}{p}}} [m(\Omega)]^{1-\frac{p}{q^*}}$.
Análogamente, tenemos

$$|\nabla u|_{L^q} \leq |\nabla u|_{L^p} [m(\Omega)]^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} . \tag{4.14}$$

Utilizando (4.13), (4.14) y (4.12) tenemos

$$\begin{aligned}|u|_{L^p} &\leq C|\nabla u|_{L^q}[m(\Omega)]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q^*}} \\ &\leq C|\nabla u|_{L^p}[m(\Omega)]^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}[m(\Omega)]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q^*}} \\ &= C|\nabla u|_{L^p}[m(\Omega)]^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q^*}} \\ &= C|\nabla u|_{L^p}[m(\Omega)]^{\frac{1}{n}} .\end{aligned}$$

Observación 4.1 Si $m(\Omega) < \infty$ entonces vale la desigualdad de Poincaré en $H^1_0(\Omega)$.

6. Es consecuencia del ítem 1. Solo resta probar lo recíproco.
Como V es un subespacio de $W^{1,p}(\Omega)$, entonces la cerradura de V: $\overline{V}$ también es un subespacio de $W^{1,p}(\Omega)$, i.e., es un espacio de Banach.
También sabemos que $[L^p(\Omega)]^n$ es un espacio de Banach. Y consideramos $E_1 := \overline{V}$, $E_2 := [L^p(\Omega)]^n$, $A = \nabla(\cdot) : E_1 \to E_2$ tal que $Au = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$, luego A es lineal y

$$\|Au\|_2 = \|\nabla u\|_{[L^p]^n} = (\sum_{i=1}^n |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^p_{L^p})^{\frac{1}{p}} \leq |u|_{1,p} ,$$

i.e. A es continuo y $\|A\| \leq 1$.
Consideramos $E_3 := L^p(\Omega)$, $B := i : \overline{V} \hookrightarrow E_3$, i.e, B es compacta por hipótesis, y $|u|_{1,p} \approx |\nabla u|_{[L^p]^n} + |u|_{L^p}$. Entonces por el Lema de Equivalencia, tenemos

   a) $dim[Ker(\nabla(\cdot))] < \infty$.
   b) *Rango* $(\nabla(\cdot))$ es cerrado.
   c) Tomamos $F := L^p(\Omega)$ y $L := i : \overline{V} \to F$, $Lu = u$, entonces $|u|_{L^p} \leq |u|_{1,p}$ i.e., $L \in L(E_1, F)$ y $\|L\| \leq 1$.
   Por otro lado, si $\nabla u = 0$ con $u \in V$ entonces $u = constante$, entonces $u = 0$, pues en caso contrario $u = 1 \notin V$. Entonces existe C constante tal que

$$|u|_{L^p} \leq C|\nabla u|_{L^p} , \ \forall u \in V$$

   i.e., vale en V la desigualdad de Poincaré.

Observación 4.2 Si $\Omega_1 \subset \Omega_2$, se observa rápidamente

1. Si $u \in W^{1,p}_0(\Omega_1)$ entonces $\widetilde{u} \in W^{1,p}_0(\Omega_2)$ donde $\widetilde{u} = u$ en Ω_1 y $\widetilde{u} = 0$ en $\Omega_2 - \Omega_1$.

2. Si vale la desigualdad de Poincaré en $W^{1,p}_0(\Omega_2)$ entonces vale también en $W^{1,p}_0(\Omega_1)$.

5. Comentarios

Hemos estudiado la desigualdad de Poincaré para espacios euclideanos. En el contexto abstracto de los espacios métricos, no es posible hablar de derivadas débiles (derivadas parciales (o gradiente) en el caso C^1), por lo tanto se necesita de otro tipo de objetos que hagan el papel de derivadas débiles en ese nuevo contexto. Para ello citamos: [1], [2] y [3].

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Balogh Z.M. , Rogovin K., Zürcher T., (2004) *The Stepanov Differentiability Theorem in Metric Measure Spaces.* J. Geom. Anal. 14 No. 3.

[2] Durand Cartagena E., (2007) *Estructuras deiferenciables en espacios métricos de Medida.* Universidad Complutense de Madrid.

[3] Hajlasz P., (2003) *Sobolev spaces on metric-measure spaces.* Contemp. Math. Vol 338.

[4] Kesavan S., (1989). *Topics in Functional Analysis and Applications.* John Wiley and Sons.

[5] Santiago Y., (2002). *Espacios de Sobolev.* Notas de Curso, UPG-UNMSM.

[6] Tartar L., (2007). *An introduction to Sobolev Spaces and interpolation Spaces.* Springer.