PESQUIMAT, Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XVI N°1, pp. 19-34, Lima - Perú, Abril 2014

DECAIMIENTO EXPONENCIAL DE LA ECUACIÓN DE ONDA SEMILINEAL CON DISIPACIÓN LOCALIZADA

Carlos Peña Miranda[1], *Alfonso Pérez Salvatierra*[2], *Andrés Guardia Cayo*[3].

Resumen: El objetivo del presente trabajo de investigación fue obtener el decaimiento exponencial uniforme de la energía para la ecuación de onda semilineal con disipación localizada, dada por,

$$u_{tt} - \Delta u + \alpha(x)u + f(u) + a(x)u_t = 0 \text{ en } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty).$$

Para lograr el objetivo del presente trabajo empleamos el principio de continuación única, estudiado por Ruiz [7] y las ideas expuestas por E. Zuazua [8].

Palabras Claves: Solución regular, decaimiento exponencial, continuación única.

Abstract: The objective of this research was to obtain the uniform exponential decay of the energy associated for wave equation semilinear with dissipation localized, given by,

$$u_{tt} - \Delta u + \alpha(x)u + f(u) + a(x)u_t = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty).$$

To achieve the objective of this paper we use the unique continuation principle studied by Ruiz [7] and the ideas expressed by E. Zuazua [8].

Key Words: Smooth solution, exponential decay, unique continuation.

1. Introducción

En el año 1990, E. Zuazua [8], estudia la ecuación de la onda semilineal con disipación localizada sobre $\mathbb{R}^n$, dada por,

$$\begin{aligned} &u_{tt} - \Delta u + \alpha u + f(u) + a(x)u_t = 0 \text{ en } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ &u(0) = u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n);\ u_t(0) = u_1 \in L^2(\mathbb{R}^n), \end{aligned} \tag{1}$$

donde se consideran las siguientes hipótesis

(H1) $a \in L^\infty_+(\mathbb{R}^n); a(x) \geq a_0$ c.s. en $\Omega_R = \{x \in \mathbb{R}^n / |x| \geq R\}$ para $R > 0$.

(H2) $f(s)s \geq 0$, para todo $s \in \mathbb{R}$.

(H3) $f \in C^1(\mathbb{R})$, satisface la siguiente condición de crecimiento: existe $C > 0$, $p > 1$, con $(n-2)p \leq n$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq C(1 + |x|^{p-1} + |y|^{p-1})|x - y|, \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: cpenam@unmsm.edu.pe
[2]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: apersal@hotmail.com
[3]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: agcbayo@yahoo.es

Considerando α una constante real, demuestra que existe una constante $C > 1$ y $\gamma > 0$ tal que para toda solución regular $u = u(x,t)$ de (1) se verifica

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\gamma t}, \quad \forall t \geq 0. \tag{2}$$

Basado en el trabajo E. Zuazua [8] y considerando α una función real de variable vectorial x, esto es $\alpha(x)$, el objetivo del presente trabajo de investigación es demostrar la desigualdad (2) para toda solución regular $u = u(x,t)$ de (1) con datos iniciales en $H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$.

Deducción formal de la energía

Multiplicando la ecuación (1) por u_t, se obtiene

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left[|\nabla u|^2 + |u_t|^2 + \alpha(x)u^2\right]dx + \int_{\mathbb{R}^n} F(u)dx\right) = -\int_{\mathbb{R}^n} a(x)u_t^2 dx, \tag{3}$$

de donde definimos la energía asociada al sistema (1) como

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\left[|\nabla u(x,t)|^2 + |u_t(x,t)|^2 + \alpha(x)|u(x,t)|^2\right]dx + \int_{\mathbb{R}^n} F(u(x,t))dx;$$

de (H1) y (3) se obtiene

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_t(x,t)|^2 dx \leq 0 \tag{4}$$

lo que demuestra que la energía asociada al sistema (1) es no creciente, para todo $t \in [0, +\infty)$. Integrando (4) desde 0 hasta T obtenemos

$$E(T) = E(0) - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_t(x,t)|^2 dxdt. \tag{5}$$

2. Preliminares

En esta sección presentamos algunos lemas y proposiciones necesarios para el desarrollo del presente trabajo. Además consideramos las siguientes hipótesis

(H4) $\alpha \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n); \alpha(x) \geq \alpha_0$ c.s. en $\mathbb{R}^n$.

(H5) Existe $\delta > 0$ tal que $f(s)s \geq (2+\delta)F(s)$, para todo $s \in \mathbb{R}$.

Lema 2.1 *Existe una constante $C > 0$ tal que la siguiente desigualdad es verdadera para todo $T > 0$ y toda solución regular de (1).*

$$\frac{1}{2}\iint_{\Omega_{2R}}\left[|\nabla u|^2 + \alpha(x)|u|^2 + |u_t|^2\right] + \iint_{\Omega_{2R}} F(u) \leq C\left\{\iint a(x)|u_t|^2 + |u|^2_{L^2(B_{2R}\times(0,T))} + E(T)\right\}.$$

Demostración. Sea $\varphi \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^n)$, multiplicando la ecuación (1) por $\varphi(x)u$ e integrando sobre $(0,T) \times \mathbb{R}^n$ obtenemos

$$\iint \varphi\left[|\nabla u|^2 + (f(u) + \alpha(x)u)u\right] = \iint \left(\frac{\Delta\varphi}{2}|u|^2 + \varphi|u_t|^2\right) - L, \tag{6}$$

donde $L = \left(\int \left(u_t + a(x)\frac{u}{2} \right) \varphi u \right) \Big|_0^T$.

Observe que

$$\left| \int \left(u_t + a(x)\frac{u}{2} \right) \varphi u \right| \leq (1 + |a|_\infty)\, |\varphi|_\infty (E(T) + E(0)).$$

Usando la identidad (5) se obtiene

$$\left| \left(\int \left(u_t + a(x)\frac{u}{2} \right) \varphi u \right) \Big|_0^T \right| \leq C_1 \left(\iint a(x)|u_t|^2 + 2E(T) \right). \tag{7}$$

Si aplicamos en (6) un $\varphi \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^n)$ con las siguientes condiciones

$$0 \leq \varphi \leq 1 \text{ en } \mathbb{R}^n;\ \varphi = 0 \text{ en } B_R;\ \varphi = 1 \text{ en } \Omega_{2R}.$$

Obtenemos

$$\iint_{\Omega_{2R}} \left(|\nabla u|^2 + (f(u) + \alpha(x)u)u + |u_t|^2 \right)$$

$$\leq a_0^{-1}(|\varphi|_\infty + 1) \iint_{\Omega_R} a(x)|u_t|^2 + \frac{1}{2}|\Delta\varphi|_\infty |u|^2_{L^2(B_{2R}\times(0,T))} + |L|. \tag{8}$$

Observe que para cada $x \in \Omega_{2R}$, $t \in [0,T]$ se tiene

$$(f(u) + \alpha(x)u)u \geq (2+\delta)F(u) + \alpha(x)u^2. \tag{9}$$

De (7), (8) y (9) y ordenando se obtiene

$$\frac{1}{2}\iint_{\Omega_{2R}} \Big[|\nabla u| + \alpha(x)|u| + |u_t| \Big] + \iint_{\Omega_{2R}} F(u) \leq C \left\{ \iint a(x)|u_t|^2 + |u|^2_{L^2(B_{2R}\times(0,T)} + E(T) \right\}.$$

■

Lema 2.2 *Sea $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n) \in (W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n))^n$. Para todo T,$r > 0$ y toda solución regular de (1) la siguiente igualdad es verdadera en $B_r \times (0,T)$*

$$\frac{1}{2}\iint_{B_r} div(q)\Big[|u_t|^2 - |\nabla u|^2 - \alpha(x)|u|^2\Big] - \iint_{B_r} div(q)F(u) + \iint_{B_r} \frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}$$

$$+ \iint_{B_r} a(x)u_t\ (q\cdot\nabla u) - \frac{1}{2}\iint_{B_r} u^2\ (q\cdot\nabla\alpha) = -\left(\int_{B_r} u_t\ (q\cdot\nabla u) \right) \Big|_0^T$$

$$+ \frac{1}{2r}\iint_{S_r} (q\cdot x)\Big[|u_t|^2 - |\nabla u|^2 - \alpha(x)|u|^2\Big] - \frac{1}{r}\iint_{S_r} (q\cdot x)F(u) + \iint_{S_r} \frac{\partial u}{\partial \nu}\ (q\cdot\nabla u).$$

Demostración. Es suficiente multiplicar la ecuación (1) por $q\cdot\nabla u$ e integrar por partes en $B_r \times (0,T)$.

■

Lema 2.3 *Para todo T,$r > 0$ y $\varphi \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$. La siguiente identidad es verdadera para toda solución regular de (1)*

$$\iint_{B_r} \varphi[|\nabla u|^2 + (f(u) + \alpha(x)u)u] = \iint_{B_r} [\varphi|u_t|^2 - u\nabla\varphi\cdot\nabla u]$$

$$+\iint_{S_r} \varphi \frac{\partial u}{\partial \nu} u - \left(\int_{B_r} \left(u_t + a(x)\frac{u}{2} \right) \varphi u \right) \Big|_0^T .$$

Demostración. Es suficiente multiplicar la ecuación (1) por $\varphi(x)u$ e integrar por partes en $B_r \times (0,T)$. ∎

Lema 2.4 *Para todo $r > R$, existe $C_r > 0$ tal que la siguiente desigualdad es verdadera para todo $T > 0$ y para toda solución regular de (1)*

$$\frac{1}{2}\iint_{B_r} \left[|\nabla u|^2 + \alpha(x)|u|^2 + |u_t|^2 \right] + \iint_{B_r} F(u) \leq C_r \left\{ \iint a(x)|u_t|^2 + |u|^2_{L^2(B_{2r}\times(0,T))} + E(T) \right\}.$$

Demostración. Aplicando el lema 2.2 con $q = x$ obtenemos

$$\frac{n}{2}\iint_{B_r} \left[|u_t|^2 - |\nabla u|^2 - \alpha(x)|u|^2 \right] - n\iint_{B_r} F(u) + \iint_{B_r} |\nabla u|^2$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{B_r} u^2 \, (x \cdot \nabla \alpha) - \iint_{B_r} a(x)u_t \, (x \cdot \nabla u) + A + B, \tag{10}$$

donde

$$A = -\left(\int_{B_r} u_t \, (x \cdot \nabla u) \right) \Big|_0^T, \tag{11}$$

$$B = r\iint_{S_r} \left[\frac{1}{2}|u_t|^2 - \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 - \frac{1}{2}\alpha(x)|u|^2 - F(u) \right]. \tag{12}$$

Aplicando el lema 2.3 con $\varphi = 1$ se obtiene

$$\iint_{B_r} \left[|\nabla u|^2 + (f(u) + \alpha(x)u)u - |u_t|^2 \right] = \iint_{S_r} \frac{\partial u}{\partial \nu} u - \left(\int_{B_r} \left(u_t + a(x)\frac{u}{2} \right) u \right) \Big|_0^T . \tag{13}$$

Multiplicando (13) por $\beta \in \mathbb{R}$ y sumando (10) obtenemos

$$\left(\frac{n}{2} - \beta\right) \iint_{B_r} |u_t|^2 + \left(1 + \beta - \frac{n}{2}\right) \iint_{B_r} |\nabla u|^2$$

$$+\left(\beta - \frac{n}{2}\right) \iint_{B_r} \alpha(x)|u|^2 \iint_{B_r} (\beta f(u)u - nF(u))$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{B_r} u^2 \, (x \cdot \nabla \alpha) - \iint_{B_r} a(x)u_t \, (x \cdot \nabla u)$$

$$+\beta \iint_{S_r} \frac{\partial u}{\partial \nu} u + B + D, \tag{14}$$

donde $D = A - \beta\left(\int_{B_r} \left(u_t + a(x)\frac{u}{2} \right) u \right) \Big|_0^T .$

Afirmación 1. Existe una constante $c = c(x) > 0$ tal que

$$\left(\beta - \frac{n}{2}\right)\alpha(x)s^2 + \beta f(s)s - F(s) \geq \eta F(s) - cs^2, \ \forall s \in \mathbb{R};$$

donde $\eta = \beta(2 + \delta) - n > 0$.

Además se tiene las desigualdades

$$\left| \iint_{B_r} au_t \, (x \cdot \nabla u) \right| \leq \varepsilon \iint_{B_r} |\nabla u|^2 + \frac{r^2 |a|_{L^\infty(B_r)}}{4\varepsilon} \iint_{B_r} a|u_t|^2. \tag{15}$$

$$\left| \frac{1}{2}\iint_{B_r} u^2 \, (x \cdot \nabla \alpha) \right| \leq \frac{r|\nabla \alpha|_\infty}{2} |u|^2_{L^2(B_r\times(0,T))}. \tag{16}$$

Reemplazando (15), (16) y la afirmación 1 en (14) se obtiene

$$\frac{1}{2}\iint_{B_r}\Big[|\nabla u|^2+\alpha(x)|u|^2+|u_t|^2\Big]+\iint_{B_r}F(u).$$

$$\leq C_{1r}\left(\iint a(x)|u_t|^2+|u|^2_{L^2(B_r\times(0,T))}+\left|\iint_{S_r}\frac{\partial u}{\partial\nu}u\right|+|B|+|D|\right). \tag{17}$$

Sea $\varphi\in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$0\leq\varphi\leq 1 \text{ en } B_r;\ \varphi=0 \text{ en } B_{r'} \text{ con } R<r'<r \text{ y } \varphi=1 \text{ en } S_r. \tag{18}$$

Al aplicar el lema 2.2 con $q=\varphi x$ donde φ cumple la condición (18) se obtiene

$$\frac{r}{2}\iint_{S_r}\Big[|u_t|^2-|\nabla u|^2-\alpha(x)|u|^2\Big]-r\iint_{S_r}F(u)+r\iint_{S_r}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2$$

$$=-\frac{1}{2}\iint_{B_r}u^2\ (\varphi x\cdot\nabla\alpha)+\sum_{k,j=1}^{n}\iint_{B_r}\varphi|\nabla u|^2+\iint_{B_r}a(x)u_t\ (\varphi\ x\cdot\nabla u)$$

$$-\iint_{B_r}div(\varphi x)F(u)+\frac{1}{2}\iint_{B_r}div(\varphi x)\Big[|u_t|^2-|\nabla u|^2-\alpha(x)|u|^2\Big].$$

Por lo tanto

$$|B|\leq C_{4r}\left\{\iint_{B_r\backslash B_{r'}}\Big[|\nabla u|^2+\alpha(x)|u|^2+|u_t|^2+f(u)u\Big]+\left|\left(\int_{B_r\backslash B_{r'}}u_t\ (x\cdot\nabla u)\right)\Big|_0^T\right|\ \right\}. \tag{19}$$

Al aplicar el lema 2.3 donde φ cumple la condición (18) se obtiene

$$\iint_{S_r}\frac{\partial u}{\partial\nu}u=\iint_{B_r\backslash B_{r'}}\varphi\Big[|\nabla u|^2+\alpha(x)|u|^2+f(u)u\Big]-\iint_{B_r\backslash B_{r'}}\varphi|u_t|^2$$

$$+\iint_{B_r\backslash B_{r'}}u\ \nabla\varphi\cdot\nabla u+\left(\int_{B_r}\Big(u_t+a(x)\frac{u}{2}\Big)\varphi u\right)\Big|_0^T.$$

Por lo tanto

$$\left|\iint_{S_r}\frac{\partial u}{\partial\nu}u\right|\leq C_7\left\{\iint_{B_r\backslash B_{r'}}\Big[|\nabla u|^2+\alpha(x)|u|^2+|u_t|^2+f(u)u\Big]\right.$$

$$\left.+\left|\left(\int_{B_r}\Big(u_t+a(x)\frac{u}{2}\Big)u\right)\Big|_0^T\right|\ \right\}. \tag{20}$$

Sumando (19) y (20) obtenemos

$$\left|\iint_{S_r}\frac{\partial u}{\partial\nu}u\right|+|B|\leq C_{5r}\left(\iint_{B_r\backslash B_{r'}}\Big[|\nabla u|^2+\alpha(x)|u|^2+|u_t|^2+f(u)u\Big]+|G|\right). \tag{21}$$

Finalmente aplicando el lema 2.3 en $B_{2r}\times(0,T)$ con $\varphi\in W^{1,\infty}(B_{2r})$ tal que

$$\left\{\begin{array}{l} 0\leq\varphi\leq 1 \text{ en } B_r;\ \varphi=0 \text{ en } B_R;\\ \varphi=1 \text{ en } B_r\backslash B_{r'} \text{ con } R<r'<r;\ \varphi=0 \text{ en } S_{2r} \text{ y}\\ \qquad\dfrac{|\nabla\varphi|^2_\infty}{\varphi}\in L^\infty(B_{2r}).\end{array}\right. \tag{22}$$

Se obtiene

$$\iint_{B_{2r}} \varphi[|\nabla u|^2 + (f(u) + \alpha(x)u)u] = \iint_{B_{2r}} [\varphi|u_t|^2 - u\nabla\varphi\cdot\nabla u] + H,$$

donde $H = -\left(\displaystyle\int_{B_{2r}} \left(u_t + a(x)\frac{u}{2}\right)\varphi u\right)\Big|_0^T$.

Por lo tanto

$$\iint_{B_r\setminus B_{r'}} \Big[|\nabla u|^2 + (f(u) + \alpha(x)u)u\Big] \leq C_9\left(\iint a(x)|u_t|^2 + |u|^2_{L^2(B_{2r}\times(0,T))} + |H|\right). \tag{23}$$

Reemplazando (23) en (21) se obtiene

$$\left|\iint_{S_r} \frac{\partial u}{\partial \nu}u\right| + |B| \leq C_{6r}\left(\iint a(x)|u_t|^2 + |u|^2_{L^2(B_{2r}\times(0,T))} + |H| + |G|\right). \tag{24}$$

Reemplazando (24) en (17) se obtiene

$$\frac{1}{2}\iint_{B_r}\Big[|\nabla u|^2 + \alpha(x)|u|^2 + |u_t|^2\Big] + \iint_{B_r} F(u)$$

$$\leq C_{7r}\left(\iint a(x)|u_t|^2 + |u|^2_{L^2(B_{2r}\times(0,T))} + |H| + |G| + |D|\right). \tag{25}$$

Además

$$|H| + |G| + |D| \leq C_{8r}\left(\iint a(x)|u_t|^2 + E(T)\right).$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{2}\iint_{B_r}\Big[|\nabla u|^2 + \alpha(x)|u|^2 + |u_t|^2\Big] + \iint_{B_r} F(u) \leq C_r\left\{\iint a|u_t|^2 + |u|^2_{L^2(B_{2r}\times(0,T))} + E(T)\right\}$$

■

Proposición 2.1 *Existe $T_1 > 0$ tal que para todo $T > T_1$ existe la constante $C(T) > 0$ tal que:*

$$E(T) \leq C\left\{\iint a(x)|u_t|^2 + |u|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))}\right\}.$$

Demostración. Por el Lema 2.1 se tiene

$$\frac{1}{2}\iint_{\Omega_{2R}}\Big[|\nabla u|^2 + \alpha(x)|u|^2 + |u_t|^2\Big] + \iint_{\Omega_{2R}} F(u)$$

$$\leq C\left\{\iint a(x)|u_t|^2 + |u|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} + E(T)\right\}. \tag{26}$$

Por el Lema 2.4 para $r = 2R$ se obtiene

$$\frac{1}{2}\iint_{B_{2R}}\Big[|\nabla u|^2 + \alpha(x)|u|^2 + |u_t|^2\Big] + \iint_{B_{2R}} F(u)$$

$$\leq C_{2R}\left\{\iint a(x)|u_t|^2 + |u|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} + E(T)\right\}. \tag{27}$$

Sumando (26) y (27) obtenemos

$$\int_0^T E(t)dt \leq C_{10}\left\{\iint a(x)|u_t|^2 + |u|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} + E(T)\right\}. \tag{28}$$

Como la energía es no creciente se tiene

$$\int_0^T E(t)dt \geq TE(T).$$

Por lo tanto

$$E(T) \leq C_T \left\{ \iint a(x)|u_t|^2 + |u|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} \right\}.$$

■

Proposición 2.2 *Si $T_0 = max\{T_1, 2R\}$ entonces, para $T > T_0$ existe una constante $C(T) > 0$ tal que*

$$|u|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} \leq C(T) \iint a(x)|u_t|^2. \tag{29}$$

Demostración. Sea $T > T_0$ y supongamos que (29) no es verdadera entonces existe una sucesión de soluciones u_m de (1) con condiciones iniciales $\{u_{0,m}, u_{1,m}\} \in H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$ tal que sastiface la expresión

$$\frac{|u_m|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))}}{\iint a(x)|(u_m)_t|^2} \to +\infty. \tag{30}$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, definamos

$$v_m = \frac{u_m}{\lambda_m}, \tag{31}$$

donde

$$\lambda_m = |u_m|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))}.$$

Como u_m es solución de (1) se tiene que la función v_m cumple

$$(v_m)_{tt} - \Delta v_m + \alpha(x)v_m + f_m(v_m) + a(x)(v_m)_t = 0 \text{ en } \mathbb{R}^n \times (0,T), \tag{32}$$

donde $f_m(s) = \dfrac{1}{\lambda_m} f(\lambda_m s)$, para todo $s \in \mathbb{R}$.

Trabajando similarmente como en la sección anterior deducimos:

$$E_m(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \left[|\nabla v_m(x,t)|^2 + |(v_m)_t(x,t)|^2 + \alpha(x)|v_m(x,t)|^2\right]dx + \int_{\mathbb{R}^n} F_m(v_m(x,t))dx,$$

la energía asociada al sistema (32) donde $F_m(s) = \displaystyle\int_0^s f_m(\xi)d\xi$, para todo $s \in \mathbb{R}$.

Además

$$\frac{d}{dt}E_m(t) = -\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|(v_m(x,t))_t|^2 dx,$$

integrando desde 0 hasta T se obtiene

$$E_m(0) = E_m(T) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|(v_m(x,t))_t|^2 dxdt \tag{33}$$

donde $F_m(s) = \displaystyle\int_0^s f_m(\xi)d\xi$, para todo $s \in \mathbb{R}$.

Por otro lado de (31) obtenemos

$$|v_m|_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} = 1, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}. \tag{34}$$

De (30) se obtiene

$$\frac{|v_m|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))}}{\iint a(x)|(v_m)_t|^2} \to +\infty. \tag{35}$$

De (34) y (35) obtenemos

$$\iint a(x)|(v_m)_t|^2 \to 0. \tag{36}$$

Trabajando similarmente como en la proposición 2.1, obtenemos

$$E_m(T) \leq C\left\{\iint a(x)|(v_m)_t|^2 + |v_m|_{L^2(B_{4R}\times(0,T))}\right\}.$$

Por (33) y (34) se obtiene

$$E_m(0) \leq C_1\left\{1 + \iint a(x)|(v_m)_t|^2\right\},$$

y por (36) se obtiene

$$E_m(0) \leq C_1.$$

Sea $t \geq 0$, como la energía es no creciente se obtiene

$$E_m(t) \leq E_m(0).$$

Luego

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\left[|\nabla v_m(x,t)|^2 + |(v_m)_t(x,t)|^2 + \alpha(x)|v_m(x,t)|^2\right]dx + \int_{\mathbb{R}^n} F_m(v_m(x,t))dx \leq C_1.$$

Integrando desde 0 hasta T se obtiene

$$\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}\left[|\nabla v_m(x,t)|^2 + |(v_m)_t(x,t)|^2 + \alpha(x)|v_m(x,t)|^2\right]dxdt$$

$$+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} F_m(v_m(x,t))dxdt \leq C_1 T. \tag{37}$$

De la desigualdad (37) obtenemos

$$\left(v_m\right) \text{ está acotada en } L^2(B_{4R}\times(0,T)), \tag{38}$$

$$\left((v_m)_t\right) \text{ está acotada en } L^2(B_{4R}\times(0,T)), \tag{39}$$

$$\left(v_m\right) \text{ está acotada en } H^1(\mathbb{R}^n\times(0,T)). \tag{40}$$

De (38), (39) y como $H^1(B_{4R})$ tiene inmersión compacta en $L^2(B_{4R})$, usando el Lema de Lions - Aubin se tiene:

$$v_m \to v \text{ fuertemente en } L^2(B_{4R}\times(0,T)), \tag{41}$$

$$v_m \to v \text{ casi siempre en } B_{4R}\times(0,T). \tag{42}$$

También de (40) existe una subsucesión (denotada de la misma forma) tal que

$$v_m \rightharpoonup v \text{ débilmente en } H^1(\mathbb{R}^n\times(0,T)). \tag{43}$$

Afirmación 2.

$$|v|_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} = 1.$$

En efecto, por (41) se tiene

$$|v_m|_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} \longrightarrow |v|_{L^2(B_{4R}\times(0,T))}$$

y por (34) se obtiene

$$|v|_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} = 1.$$

Afirmación 3.

$$v_t = 0 \text{ casi siempre en } \{a > 0\} \times (0,T).$$

En efecto, por (30) se tiene

$$a^{\frac{1}{2}}(x)(v_m)_t \to 0 \text{ fuerte en } L^2(\mathbb{R}^n \times (0,T)). \tag{44}$$

Por otro lado de (37), se obtiene

$$(v_m)_t \rightharpoonup v_t \text{ débil en } L^2(\mathbb{R}^n \times (0,T))$$

entonces

$$a^{\frac{1}{2}}(x)(v_m)_t \rightharpoonup a^{\frac{1}{2}}(x)v_t \text{ débil en } L^2(\mathbb{R}^n \times (0,T)). \tag{45}$$

De (44) y (45) se obtiene por unicidad de limite débil, que

$$a^{\frac{1}{2}}(x)v_t = 0 \text{ en } L^2(\mathbb{R}^n \times (0,T)).$$

Por lo tanto

$$v_t = 0 \text{ casi siempre en } \{a > 0\} \times (0,T).$$

Distinguiremos tres casos, para la sucesion $\{\lambda_m\}$.

Primer caso: existe una subsucesión de $\{\lambda_m\}$ (denotada de la misma manera) tal que

$$\lambda_m \to \lambda \text{ en } \mathbb{R}_+, \; \lambda \in (0, +\infty). \tag{46}$$

Afirmación 4.

$$f(\lambda_m v_m) \text{ es acotada en } L^2(B_{4R} \times (0,T)).$$

En efecto,

$$\begin{aligned} |f(\lambda_m v_m)|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} &= \iint_{B_{4r}} |f(\lambda_m v_m)|^2 \\ &\leq \iint_{B_{4r}} \left[C\left(1 + |\lambda_m v_m|^{p-1}\right)|\lambda_m v_m|\right]^2 \\ &\leq 2C^2\Big(|\lambda_m|^2 |v_m|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} + |\lambda_m|^{2p}|v_m|^{2p}_{L^{2p}(B_{4R}\times(0,T))}\Big). \end{aligned}$$

Como $H^1(B_{4R} \times (0,T))) \hookrightarrow L^{2p}(B_{4R} \times (0,T)))$, entonces

$$|f(\lambda_m v_m)|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} \leq 2C^2\Big(|\lambda_m|^2|v_m|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} + |\lambda_m|^{2p}|v_m|^{2p}_{H^1(B_{4R}\times(0,T))}\Big). \tag{47}$$

Como la sucesión $\{\lambda_m\}$ es acotada, existe una constante $C_2 > 0$ tal que

$$|\lambda_m| \leq C_2, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}. \tag{48}$$

Reemplazando (48) en (47) se obtiene

$$|f(\lambda_m v_m)|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} \leq 2C^2\Big(C_2^2|v_m|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} + C_2^{2p}|v_m|^{2p}_{H^1(B_{4R}\times(0,T))}\Big).$$

De (38) y (40) se obtiene

$$|f(\lambda_m v_m)|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} < \infty,$$

es decir,

$$\{f(\lambda_m v_m)\} \text{ es acotada en } L^2(B_{4R}\times(0,T)).$$

Usando la hipótesis (H3), (42) y (46) se obtiene

$$f(\lambda_m v_m) \to f(\lambda v) \text{ casi siempre en } B_{4R}\times(0,T). \tag{49}$$

De (49), de la afirmación 4 y por el lema de Lions (Lions [2]), se obtiene

$$f(v_m) \rightharpoonup f(v) \text{ débil en } L^2(B_{4R}\times(0,T)). \tag{50}$$

De (50) y (46) obtenemos

$$f(v_m) = \frac{f(\lambda_m v_m)}{\lambda_m} \rightharpoonup \frac{f(\lambda v)}{\lambda} \text{ débil en } L^2(B_{4R}\times(0,T)). \tag{51}$$

Pasando al límite (32) y teniendo en cuenta (36) y (51), se obtiene

$$v_{tt} - \Delta v + \alpha(x)v + \frac{f(\lambda v)}{\lambda} = 0 \text{ en } B_{4R}\times(0,T),$$

derivando la ecuación precedente se obtiene

$$w_{tt} - \Delta w + \alpha(x)w + f'(\lambda v)w = 0 \text{ en } B_{4R}\times(0,T), \tag{52}$$

donde $w = v_t$.

Segundo caso: existe una subsucesión de $\{\lambda_m\}$ (denotada de la misma manera) tal que

$$\lambda_m \to 0 \tag{53}$$

Para todo $m \in \mathbb{N}$, definamos

$$g_m(s) = \begin{cases} \dfrac{f_m(s)}{s} & \text{si } s \neq 0, \\ 0 & \text{si } s = 0. \end{cases}$$

Afirmación 5.

$$\{g_m(v_m)v_m\} \text{ es acotada en } L^2(B_{4R}\times(0,T)).$$

En efecto, como

$$|g_m(v_m)v_m|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} = \frac{1}{\lambda_m^2}\iint_{B_{4r}} |f(\lambda_m v_m)|^2,$$

entonces por la afirmación 4 y (53) se obtiene

$$|g_m(v_m)v_m|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} < \infty$$

es decir,

$$\{g_m(v_m)v_m\} \text{ es acotada en } L^2(B_{4R} \times (0,T)).$$

De (42) y de la afirmación 5, existe una subsucesión (denotada de la misma forma) tal que

$$g_m(v_m)v_m \rightharpoonup p(x,t) \text{ débil en } L^2(B_{4R} \times (0,T)), \tag{54}$$

para algún $p(x,t) \in L^2_+(B_{4R} \times (0,T))$.
Además

$$g_m(v_m) = \frac{f(\lambda_m v_m)}{\lambda_m v_m} = \frac{f(\lambda_m v_m) - f(0)}{\lambda_m v_m - 0},$$

entonces

$$g_m(v_m) \to f'(0) \text{ casi siempre en } B_{4R} \times (0,T).$$

Usando (42) obtenemos

$$g_m(v_m)v_m \to f'(0)v \text{ casi siempre en } B_{4R} \times (0,T).$$

De la afirmación 5 y el lema de Lions se obtiene

$$f_m(v_m) = g_m(v_m)v_m \rightharpoonup f'(0)v \text{ débil en } L^2(B_{4R} \times (0,T)). \tag{55}$$

De (54), (55) y por unicidad de límite, se obtiene

$$p(x,t)v = f'(0)v \text{ en } L^2(B_{4R} \times (0,T)).$$

Por lo tanto

$$p(x,t)v = f'(0)v \text{ casi siempre en } B_{4R} \times (0,T). \tag{56}$$

Pasando al límite (32) y teniendo en cuenta (36) y (55), se obtiene

$$v_{tt} - \Delta v + \alpha(x)v + f'(0)v = 0 \text{ en } B_{4R} \times (0,T)$$

derivando la ecuación precedente se obtiene

$$w_{tt} - \Delta w + \alpha(x)w + f'(0)w = 0 \text{ en } B_{4R} \times (0,T) \tag{57}$$

donde $w = v_t$.

Afirmación 6.

$$\{F_m(v_m)\} \text{ es uniformente acotada en } L^1(B_{4R} \times (0,T)),$$

donde $F_m(s) = \displaystyle\int_0^s f_m(\xi)d\xi = \frac{1}{\lambda_m^2} F_m(\lambda_m s)$.

En efecto, de (37) se tiene

$$\iint_{B_{4R}} F_m(v_m) \leq C_1 T, \text{ para todo } m \geq 1.$$

Luego

$$|F_m(v_m)|_{L^1(B_{4R}\times(0,T))} \leq C_1 T, \text{ para todo } m \geq 1.$$

Por lo tanto $\{F_m(v_m)\}$ es uniformente acotada en $L^1(B_{4R} \times (0,T))$.

Afirmación 7.

$$F(s) \geq C_6|s|^{2+\delta}, \quad \text{para todo } |s| \geq 1,$$

donde $C_6 = \min\{F(1), F(-1)\}$.

En efecto, cuando $s \geq 1$ tenemos

a) Si $F(1) = 0$ entonces $C_6 = 0$,

b) Si $F(1) > 0$ entonces $0 < F(1) < F(s)$, $\forall s \geq 1$.

Usando la hipótesis (H5) se tiene

$$sF'(s) \geq (2+\delta)F(s)$$

luego

$$\frac{F'(s)}{F(s)} \geq \frac{2+\delta}{s}.$$

Integrando desde s hasta 1 se obtiene

$$F(s) \geq F(1)|s|^{2+\delta}.$$

Cuando $s \leq -1$ es igual a la demostración anterior.

Tercer caso: existe una subsucesión de $\{\lambda_m\}$ (denotada de la misma manera) tal que

$$\lambda_m \to +\infty. \tag{58}$$

Veamos que el tercer caso no se cumple.

En efecto, supongamos que se cumple $\lambda_m \to +\infty$, entonces por la afirmación 6 se tiene

$$\begin{aligned}
C &\geq \iint_{B_{4R}} F_m(v_m) \\
&\geq \iint_{\{|v_m|\geq\lambda_m^{-1}\}\cap\{B_{4R}\times(0,T)\}} F_m(v_m) + \iint_{\{|v_m|\leq\lambda_m^{-1}\}\cap\{B_{4R}\times(0,T)\}} F_m(v_m) \\
&= \frac{1}{\lambda_m^2}\iint_{\{|\lambda_m v_m|\geq 1\}\cap\{B_{4R}\times(0,T)\}} F(\lambda_m v_m) + \frac{1}{\lambda_m^2}\iint_{\{|\lambda_m v_m|\leq 1\}\cap\{B_{4R}\times(0,T)\}} F(\lambda_m v_m)
\end{aligned}$$

y por la afirmación 7 se obtiene

$$\begin{aligned}
C &\geq \frac{1}{\lambda_m^2}\iint_{\{|\lambda_m v_m|\geq 1\}\cap\{B_{4R}\times(0,T)\}} C_6|\lambda_m v_m|^{2+\delta} + \frac{1}{\lambda_m^2}\iint_{\{|\lambda_m v_m|\leq 1\}\cap\{B_{4R}\times(0,T)\}} F(\lambda_m v_m) \\
&= C_6|\lambda_m|^{\delta}\iint_{\{|\lambda_m v_m|\geq 1\}\cap\{B_{4R}\times(0,T)\}} |v_m|^{2+\delta} + \frac{1}{\lambda_m^2}\iint_{\{|\lambda_m v_m|\leq 1\}\cap\{B_{4R}\times(0,T)\}} F(\lambda_m v_m).
\end{aligned}$$

Considerando $C_7 = min\{C_6, 1\}$ se tiene

$$|\lambda_m|^{\delta}\iint_{\{|\lambda_m v_m|\geq 1\}\cap\{B_{4R}\times(0,T)\}} |v_m|^{2+\delta} + \frac{1}{\lambda_m^2}\iint_{\{|\lambda_m v_m|\leq 1\}\cap\{B_{4R}\times(0,T)\}} F(\lambda_m v_m) \leq C_8,$$

donde $C_8 = C_5 C_7^{-1}$.

Como la segunda integral es positiva se obtiene

$$|\lambda_m|^\delta \iint_{\{|\lambda_m v_m|\geq 1\} \cap \{B_{4R}\times(0,T)\}} |v_m|^{2+\delta} \leq C_8,$$

dividiendo entre $|\lambda_m|^\delta$ se obtiene:

$$\iint_{\{|\lambda_m v_m|\geq 1\} \cap \{B_{4R}\times(0,T)\}} |v_m|^{2+\delta} \leq \frac{C_8}{|\lambda_m|^\delta}.$$

Usando la inmersión $L^{2+\delta}(B_{4R}) \hookrightarrow L^2(B_{4R})$ se obtiene

$$\iint_{\{|\lambda_m v_m|\geq 1\} \cap \{B_{4R}\times(0,T)\}} |v_m|^{2} \leq \frac{C_8}{|\lambda_m|^\delta}.$$

Finalmente teniendo en cuenta (41) y tomando límite cuando $m \to \infty$, se obtiene

$$\iint_{B_{4R}\times(0,T)} |v|^2 \to 0,$$

es decir,

$$|v|_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} = 0$$

contradición con la afirmación 2.

Resumiendo (52) y (57) se tiene que $w \in L^2(B_{4R}\times(0,T))$ cumple

$$\left\{ \begin{array}{ll} w_{tt} - \Delta w + \alpha(x)w + b(x,t)w = 0 & \text{en} \quad B_{4R}\times(0,T) \\ w = 0 \text{ c.s. en } \{a > 0\}\times(0,T) & \end{array} \right. \tag{59}$$

para algún potencial $b(x,t) \geq 0$ donde $b(x,t) \in L^\infty_+(0,T;L^n(B_{4R}))$ cuando $(n-2)p \leq n$.

Luego si se considera $T > diam(B_{4R}) > 2R$ por el principio de continuación única (Ruiz [7]) se tiene

$$w = 0 \text{ en } B_{4R}\times(0,T),$$

es decir,

$$v_t = 0 \text{ en } B_{4R}\times(0,T).$$

Por lo tanto

$$v = v(x) \in H^1(\mathbb{R}^n), \tag{60}$$

es decir, v es independiente de la variable t.

Finalmente tomando límite en (32) y teniendo en cuenta (60) obtenemos

$$-\Delta v + \alpha(x)v + p(x,t)v = 0 \text{ en } B_{4R}\times(0,T).$$

Multiplicando la ecuación precedente por v e integrando sobre $B_{4R}\times(0,T)$ se obtiene

$$\iint_{B_{4R}} |\nabla v|^2 + \iint_{B_{4R}} \alpha(x)|v|^2 + \iint_{B_{4R}} p(x,t)|v|^2 = 0,$$

entonces

$$|\alpha^{1/2}v|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} = 0.$$

Por lo tanto

$$\alpha^{1/2}v = 0 \text{ casi siempre en } B_{4R} \times (0,T).$$

Luego

$$v = 0 \text{ casi siempre en } B_{4R} \times (0,T),$$

lo que contradice la afirmación 2. Lo cual concluye la demostración de la proposición 2.2. ∎

Observación 1. De la proposición 2.1 y 2.2 se tiene que existe una constante $C > 0$ tal que

$$E(T) \leq C \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_t(x,t)|^2 dxdt.$$

Ahora enunciamos el resultado principal de este trabajo

3. Teorema Central

Teorema 3.1 *Considerando las hipótesis (H1) - (H5), existe una constante $C > 1$ y $\gamma > 0$ tal que para toda solución regular $u = u(x,t)$ de (1) con datos iniciales en $H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$ se verifica*

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\gamma t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Demostración. De la observación 1 y de (5) obtenemos

$$E(T) \leq \frac{C}{C+1}E(0). \tag{61}$$

Por la teoría de semigrupos la solución de la ecuación (1) se puede escribir de la forma

$$u(t) = S(t)u_0,$$

luego si $n \in \mathbb{Z}^+$ se tiene

$$E(nT) = E(S(nT)u_0) = E(S(T)S((n-1)T)u_0).$$

Aplicando la desigualdad (61) cuando el dato inicial es $S((n-1)T)u_0$ obtenemos

$$E(nT) = E(S(nT)u_0) = E(S(T)S((n-1)T)u_0) \leq \frac{C}{C+1}E(S((n-1)T)u_0).$$

Repitiendo el mismo proceso $(n-1)$ veces, obtenemos

$$E(nT) \leq \left(\frac{C}{C+1}\right)^n E(S(0)u_0) = \left(\frac{C}{C+1}\right)^n E(0).$$

Para t cualquiera y T fijo, existen $n \in \mathbb{Z}^+$, $r \in \mathbb{Z}$ tal que $t = nT + r$. Considerando $s = nT$ se obtiene

$$\begin{aligned} E(s) &\leq \left(\frac{C}{C+1}\right)^{\frac{s}{T}} E(0) \\ &\leq \left(\frac{C}{C+1}\right)^{\frac{s}{T}} \left(\frac{C+1}{C}\right) E(0) \\ &= \left(\frac{C+1}{C}\right) E(0)e^{-\frac{1}{T}ln\left(\frac{1+C}{C}\right)s}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$E(s) \leq C_0E(0)e^{-\gamma s}, \text{ para todo } s \geq 0,$$

donde $\gamma = \frac{1}{T}ln\left(\frac{1+C}{C}\right) > 0$ y $C_0 = \frac{1+C}{C} > 1$. ∎

4. Conclusión

Usando el principio de continuación única y la técnica de los multiplicadores, se demuestra la existencia de una constante $C > 1$ y $\gamma > 0$ tal que para toda solución regular $u = u(x,t)$ de (1) con datos iniciales en $H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$ se verifica

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\gamma t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Lo cual demuestra el decaimiento exponencial de la energía asociada a la ecuación (1).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Cabanillas, E. (2004). *Estabilización de la energía para una ecuación de Kirchhoff con disipación localizada.* Proy. de investigación. UNMSM, Perú.

[2] Lions, J. L. Magenes, E. (1968). *Problèmes aux Limites non homogènes, aplications.* Vol 1, Dunod, Paris.

[3] Muñoz J, Bisongin V, Bisongin E. (2002). *Exponential decay to partially thermoelastic materials.* Bollettino della Unione Matemática Italiana. 8(5-B): 605 - 629.

[4] Peña, C. (2012). *Comportamiento asintótico para la ecuación de onda semilineal con amortiguamiento local en dominios no acotados.* Tesis Maestría. UNMSM, Perú.

[5] Pérez, A. (1997). *Decaimento de soluções de equações parcialmente viscoélasticos.* Tesis doctorado. UFRJ, Brasil.

[6] Pérez, A. (2001). *Decaimiento exponencial para materiales parcialmente termoelástico.* PESQUIMAT. Vol IV, N° 2: 1 - 6.

[7] Ruiz, A. (1992). *Unique continuation for weak solutions of the wave equation plus a potencial.* Math Pures et Appl. 71: 455 - 467.

[8] Zuazua, E. (1991). *Exponential decay for the semilinear wave equations, with localized Damping in Unbounded Domains.* J. Math Pures et Appl. 70: 513 - 529.