PESQUIMAT , Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XVI N°1, pp. 35-46, Lima - Perú, Abril 2014

EXISTENCIA GLOBAL Y COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO PARA UN SISTEMA DE ECUACIONES DE ONDA NO LINEAL CON OPERADOR p-LAPLACIANO

Teófanes Quispe Méndez[1]

Resumen. Consideramos un problema mixto para un sistema de ecuaciones de onda no lineal con operador p-Laplaciano y con término disipativo fuerte. Estudiamos la existencia global de soluciones, utilizando la existencia local, la identidad de la energía y el principio de continuación. También estudiamos el comportamiento asintótico de soluciones, utilizando la desigualdad de Nakao.

Palabras Claves. Solución global, Comportamiento asintótico, Desigualdad de Nakao, Sistema de ecuaciones de onda con operador p-Laplaciano.

GLOBAL EXISTENCE AND ASYMPTOTIC BEHAVIOR FOR A SYSTEM OF NONLINEAR WAVE EQUATIONS WITH p-LAPLACIAN OPERATOR

Abstract. We consider a mixed problem for a system of nonlinear wave equations with p-Laplacian operator and with dissipative strong term. We stady the global existence of solutions, using the local existence, the identity of energy and the continuation principle. We also stady the asymptotic behavior of solutions, using Nakao's inequality.

Key Words. Global solution, Asymptotic behavior, Nakao's inequality, System of wave equations with p-Laplacian operator.

1. Introducción

En este artículo consideramos el problema de valores iniciales y de frontera para el siguiente sistema de ecuaciones de onda no lineal con operador p-Laplaciano:

$$u'' - \Delta_p u - \Delta u' = f_1(u,v) \text{ en } \Omega \times]0,\infty[, \tag{1.1}$$

$$v'' - \Delta_p v - \Delta v' = f_2(u,v) \text{ en } \Omega \times]0,\infty[, \tag{1.2}$$

con condiciones iniciales

$$u(x,0) = u_0(x),\ u'(x,0) = u_1(x),\ \text{en } \Omega, \tag{1.3}$$

$$v(x,0) = v_0(x),\ v'(x,0) = v_1(x),\ \text{en } \Omega, \tag{1.4}$$

y condiciones de frontera

$$u(x,t) = 0, \text{ en } \partial\Omega \times]0,\infty[, \tag{1.5}$$

$$v(x,t) = 0, \text{ en } \partial\Omega \times]0,\infty[, \tag{1.6}$$

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: tquispem@gmail.com

donde Ω es un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera suficientemente regular $\partial\Omega$, Δ es el operador Laplaciano, Δ_p es el operador p-Laplaciano definido por

$$\Delta_p w = \operatorname{div}\left(|\nabla w|^{p-2}\nabla w\right),$$

con $p \geq 2$, ∇ es el operador gradiente, div es el operador divergencia, las funciones $f_1(u,v)$ y $f_2(u,v)$ son tomadas de la forma:

$$f_1(u,v) = \left[a\,|u+v|^{2(\rho+1)}(u+v) + b\,|v|^{(\rho+2)}\,|u|^{\rho}\,u\right],$$

$$f_2(u,v) = \left[a\,|u+v|^{2(\rho+1)}(u+v) + b\,|u|^{(\rho+2)}\,|v|^{\rho}\,v\right],$$

con $a, b > 0$ constantes, $w' = \frac{\partial w}{\partial t}$, $w'' = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$.

Cuando $p = 2$, muchos autores estudiaron desde diferentes puntos de vista el sistema $(1.1)-(1.2)$, debemos mencionar: Segal [16], que presentó el significado físico de $(1.1)-(1.2)$; Milla Miranda y Medeiros [9], la existencia y unicidad global; Li y Tsai [5], la existencia, unicidad global, y explosión de soluciones; Wu y Tsai [18], existencia local y explosión de soluciones; Quispe Méndez [12, 13], existencia local y explosión de soluciones.

Cuando $p \geq 2$ y $u = v$, las ecuaciones del tipo (1.1) se utilizan para describir el movimiento de un sólido viscoelástico (Por ejemplo, una barra si $n = 1$ y una lamina si $n = 2$) compuesto de un material especial, ver referencias de Yang y Chen [20]. También se puede considerar como una ecuación que gobierna el movimiento longitudinal de una barra viscoelástica obedeciendo el modelo de Voight no lineal [20]. Este tipo de modelos, fueron estudiados por muchos autores, podemos mencionar: Ma y Soriano [8], Gao y Ma [4], Yang y Chen [20], Quispe Méndez [11], Ye [21], Chen, Yao y Shao [3] y entre otros.

Cuando $p \geq 2$, recientemente, Castro [2] probó la existencia de la solución global para el sistema

$$u'' - \Delta_p u - \Delta u' = |v|^{\rho+2}\,|u|^{\rho}\,u + f_1\,, \tag{1.7}$$

$$v'' - \Delta_p v - \Delta v' = |u|^{\rho+2}\,|v|^{\rho}\,v + f_2\,, \tag{1.8}$$

donde $\rho \geq -1$. Lima, Lourêdo y Marinho [6] probaron la existencia de una solución local para el sistema

$$u'' - \Delta_p u - \Delta u' + f(u,v)\,u = h_1\,, \tag{1.9}$$

$$v'' - \Delta_p v - \Delta v' + g(u,v)\,v = h_2\,, \tag{1.10}$$

donde f es continua en la primera variable y Lipschitziana en la segunda variable y g es Lipschitziana en la primera y continua en la segunda variable. Quispe, Santiago y Pariona [14] probaron la existencia local y la no existencia global del sistema propuesto $(1.1)-(1.2)$ con $f_1(u,v)$ y $f_2(u,v)$ que cumplen ciertas condiciones técnicas.

En este trabajo, probaremos la existencia global y el comportamiento asintótico de soluciones del problema $(1.1)-(1.6)$ en un dominio acotado Ω en $\mathbb{R}^n$. En primer lugar, probaremos la existencia de la solución global, utilizando la existencia local, identidad de la energía y el principio de continuación. En segundo lugar, obtendremos el comportamiento asintótico de soluciones, empleando la desigualdad de Nakao [10]. En la discusión del problema, emplearemos las estrategias y herramientas inspiradas en los trabajos de Gao y Ma [4] y Yang [19].

2. Preliminares

En esta sección presentamos algunas notaciones, conceptos y resultados sin demostra-ción, los cuales serán usados en el desarrollo del presente trabajo.

Sea Ω un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera suficientemente regular $\partial\Omega$. Denotamos el producto interno y la norma de $L^2(\Omega)$ y $L^p(\Omega)$, con $(.,.)$ y $|\,.\,|_p$, respectivamente, para $1 \leq p \leq \infty$. Además $((.,.))$ y $\|.\|$, denotaran el producto interno y la norma de $H_0^1(\Omega)$, donde $((u,v)) = \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx$. En el espacio de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ usamos la norma

$$\|u\|_{1,p} = \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Sea X un espacio de Banach, T y p números reales tales que $0 < T \leq \infty$ y $1 \leq p \leq \infty$. Representamos con $L^p(0,T;X)$ al espacio de Banach de las funciones vectoriales $u :]0,T[\longrightarrow X$ medibles con $\|u(t)\|_X \in L^p(0,T)$, dotado de la norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{0<t<T} \text{ess} \, \|u(t)\|_X \ , \quad p = \infty.$$

Similarmente, cuando $0 < T < \infty$, representamos con $C([0,T];X)$ al espacio de Banach de las funciones continuas $u : [0,T] \longrightarrow X$, dotado de la norma

$$\|u\|_{C([0,T];X)} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X \ .$$

Denotamos $w' = \frac{\partial w}{\partial t}$, $w'' = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ y $w(t)(x) = w(x,t)$.

Hipótesis. Imponemos sobre los parámetros p y ρ las siguientes condiciones:

(H) $2 \leq p < 2(2\rho + 3) \leq \frac{np}{n-p}$ si $2 \leq p < n$ y $2 \leq p < 2(2\rho+3)$ si $1 \leq n \leq p$.

Lema 2.1 ([17]) *El operador p-Laplaciano se define por*

$$\begin{array}{rccc} -\Delta_p : & W_0^{1,p}(\Omega) & \rightarrow & W^{-1,q}(\Omega) \\ & w & \mapsto & -\Delta_p w \end{array}$$

donde $\Delta_p w = \operatorname{div}\left(|\nabla w|^{p-2} \nabla w\right)$, $p \geq 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *y tiene las siguientes propiedades:*

(i) $-\Delta_p$ *es monótono, acotado, coercivo y hemicontinuo.*

(ii) $\langle (-\Delta_p) u, u \rangle_{W^{-1,q}(\Omega) \times W_0^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{1,p}^p$.

(iii) $\langle (-\Delta_p) u(t), u'(t) \rangle_{W^{-1,q}(\Omega) \times W_0^{1,p}(\Omega)} = \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{1,p}^p$.

(iv) $\|(-\Delta_p) u\|_{W^{-1,q}(\Omega)} \leq C \|u\|_{1,p}^{p-1}$, *para alguna constante* $C > 0$.

Lema 2.2 (Desigualdad de Sobolev-Poincaré [1]) *Si* $1 \leq q \leq \frac{np}{n-p}$ *para* $1 < p < n$ *ó* $1 \leq q < \infty$ *para* $1 \leq n \leq p$, *entonces existe una constante positiva* B_1 *tal que*

$$|u|_q \leq B_1 \|u\|_{1,p}, \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Definición 2.3 *Un par de funciones (u, v) es llamada una* ***solución débil*** *del problema $(1.1) - (1.6)$ sobre $[0, T]$ si satisface:*

$$\begin{aligned}
&u, v \in C\left([0,T]; W_0^{1,p}(\Omega)\right), \\
&u', v' \in C\left([0,T]; L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right), \\
&u'', v'' \in L^2\left(0, T; W^{-1,q}(\Omega)\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u'' - \Delta_p u - \Delta u' &= f_1(u, v) \quad en \quad L^2\left(0, T; W^{-1,q}(\Omega)\right), \\
v'' - \Delta_p v - \Delta v' &= f_2(u, v) \quad en \quad L^2\left(0, T; W^{-1,q}(\Omega)\right),
\end{aligned}$$

$$u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1,\ v(0) = v_0,\ v'(0) = v_1,$$

donde $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Ahora damos un teorema de existencia local para el problema $(1.1) - (1.6)$, las discusiones de la demostración puede encontrarse en [14]. Para la regularidad de las soluciones, utilizar los Lemas 8.1–8.2 en [7] y el Lema 2.11 en [15].

Teorema 2.4 (Existencia Local) *Supongamos que (H) se verifica. Si $u_0, v_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y $u_1, v_1 \in L^2(\Omega)$, entonces existe $T > 0$ tal que el problema $(1.1) - (1.6)$ tiene una solución débil (u, v) sobre $[0, T]$.*

Lema 2.5 (Nakao[10]) *Sea $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ una función no negativa y acotada para lo cual existen constantes $\beta > 0$ y $\gamma \geq 0$ tales que*

$$\sup_{t \leq s \leq t+1} (\phi(s))^{\gamma+1} \leq \beta\left(\phi(t) - \phi(t+1)\right),\ \forall t \geq 0.$$

Entonces

(i) Si $\gamma = 0$, existen constantes positivas C y θ tales que

$$\phi(t) \leq C \exp(-\theta t),\ \forall t \geq 0.$$

(ii) Si $\gamma > 0$, existe una constante positiva C tal que

$$\phi(t) \leq C(1+t)^{-\frac{1}{\gamma}},\ \forall t \geq 0.$$

3. Existencia Global

En esta sección, discutiremos la existencia de la solución global del problema $(1.1) - (1.6)$. En orden de establecer los resultados, primero definamos la energía funcional $E(t)$ y las funcionales auxiliares $I(t)$, $J(t)$ de las soluciones $(u(t), v(t))$ del problema $(1.1) - (1.6)$ como sigue:

$$I(t) = I(u(t), v(t)) = \left[\|u(t)\|_{1,p}^p + \|v(t)\|_{1,p}^p\right] - 2(\rho+2)\int_\Omega F(u, v)\, dx, \tag{3.1}$$

$$J(t) = J(u(t), v(t)) = \frac{1}{p}\left[\|u(t)\|_{1,p}^p + \|v(t)\|_{1,p}^p\right] - \int_\Omega F(u, v)\, dx, \tag{3.2}$$

$$E(t) = E(u(t), v(t)) = \frac{1}{2}\left[|u'(t)|_2^2 + |v'(t)|_2^2\right] + J(u(t), v(t)), \tag{3.3}$$

donde

$$F(u,v) = \frac{1}{2(\rho+2)}\left[a|u+v|^{2(\rho+2)} + 2b|uv|^{\rho+2}\right].$$

Se comprueba fácilmente que

$$\frac{\partial F}{\partial u} = f_1,\ \frac{\partial F}{\partial v} = f_2 \ \text{ y } \ uf_1(u,v) + vf_2(u,v) = 2(\rho+2)F(u,v).$$

Lema 3.1 *Sea (u,v) una solución del problema (1.1)−(1.6) sobre $[0,T]$. Entonces $E(t)$ es una función no creciente para $t \geq 0$ y*

$$E'(t) = -\left[\|u'(t)\|^2 + \|v'(t)\|^2\right]. \tag{3.4}$$

Demostración. Multiplicando la ecuación (1.1) por $u'(t)$ y la ecuación (1.2) por $v'(t)$, integrando sobre Ω, usando integración por partes y sumando los dos resultados, se obtiene (3.4). ∎

Lema 3.2 *Supongamos que (H) y $p < 2(\rho+2)$ se verifican. Entonces existe $\eta > 0$ tal que para cada $(u,v) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,p}(\Omega)$ se verifica*

$$|u+v|_{2(\rho+2)}^{2(\rho+2)} + 2|uv|_{\rho+2}^{\rho+2} \leq \eta\left(\|u\|_{1,p}^p + \|v\|_{1,p}^p\right)^{\frac{2(\rho+2)}{p}}. \tag{3.5}$$

Demostración. Por la desigualdad de Minkowski, se tiene

$$|u+v|_{2(\rho+2)}^2 \leq 2\left(|u|_{2(\rho+2)}^2 + |v|_{2(\rho+2)}^2\right).$$

También, por las desigualdades de Hölder e Young, se obtiene

$$2|uv|_{\rho+2} \leq 2|u|_{2(\rho+2)}|v|_{2(\rho+2)} \leq |u|_{2(\rho+2)}^2 + |v|_{2(\rho+2)}^2.$$

Utilizando la desigualdad de Sobolev-Poincaré, se obtiene (3.5). ∎

Lema 3.3 *Sea la función definida para $\lambda \geq 0$:*

$$g(\lambda) = \frac{1}{2p}\lambda^p - \frac{C_0 B^{2(\rho+2)}}{2(\rho+2)}\lambda^{2(\rho+2)}, \tag{3.6}$$

donde $C_0 = \text{máx}\{a,b\}$, $B = \eta^{\frac{1}{2(\rho+2)}}$, η es la constante optima de (3.5); p y ρ son constantes que verifica (H) y $p < 2(\rho+2)$. Entonces

(i) g es estrictamente creciente en $[0,\lambda_0[$,

(ii) g toma su valor máximo E_0 en λ_0,

(iii) g es estrictamente decreciente en $]\lambda_0,\infty[$,

(iv) $g(\lambda) \to -\infty$ cuando $\lambda \to \infty$,

donde

$$\lambda_0 = \left(\frac{1}{2C_0B^{2(\rho+2)}}\right)^{\frac{1}{2(\rho+2)-p}} \ \text{ y } \ E_0 = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2(\rho+2)}\right)2^{\frac{-2(\rho+2)}{2(\rho+2)-p}}\left(C_0B^{2(\rho+2)}\right)^{\frac{-p}{2(\rho+2)-p}}. \tag{3.7}$$

Demostración. Es inmediato. ∎

Lema 3.4 *Supongamos que* (H) *y* $p < 2(\rho+2)$ *se verifican . Si* (u,v) *es una solución del problema* $(1.1)-(1.6)$ *sobre* $[0,T]$ *con datos iniciales* $u_0, v_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *y* $u_1, v_1 \in L^2(\Omega)$, *y que satisface*

$$E(0) < E_0 \text{ y } \left(\|u_0\|_{1,p}^p + \|v_0\|_{1,p}^p\right)^{\frac{1}{p}} < \lambda_0, \tag{3.8}$$

entonces

$$\left(\|u(t)\|_{1,p}^p + \|v(t)\|_{1,p}^p\right)^{\frac{1}{p}} < \lambda_0, \ \forall t \in [0,T]. \tag{3.9}$$

Demostración. Por el Lema 3.1, $E(t)$ es una función no creciente y

$$E(t) \leq E(0). \tag{3.10}$$

Por (3.5), resulta

$$\begin{aligned} E(t) &\geq \frac{1}{p}\left[\|u\|_{1,p}^p + \|v\|_{1,p}^p\right] - \frac{1}{2(\rho+2)}\left[a|u+v|_{2(\rho+2)}^{2(\rho+2)} + 2b|uv|_{\rho+2}^{\rho+2}\right] \\ &\geq \frac{1}{p}\left[\|u\|_{1,p}^p + \|v\|_{1,p}^p\right] - \frac{C_0 B^{2(\rho+2)}}{2(\rho+2)}\left(\|u\|_{1,p}^p + \|v\|_{1,p}^p\right)^{\frac{2(\rho+2)}{p}} \\ &\geq g(\lambda(t)), \end{aligned} \tag{3.11}$$

donde $\lambda(t) = \left(\|u(t)\|_{1,p}^p + \|v(t)\|_{1,p}^p\right)^{\frac{1}{p}}$ y g es la función definida en (3.6). Por (3.8) y Lema 3.3, existe $\lambda_1 < \lambda_0$ tal que $g(\lambda_1) = E(0)$. A continuación probemos que

$$\left(\|u(t)\|_{1,p}^p + \|v(t)\|_{1,p}^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \lambda_1, \ \forall t \in [0,T]. \tag{3.12}$$

Por el absurdo. Supongamos que existe $t_0 \in \,]0,T[$ tal que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_0$, donde $\lambda_2 = \left(\|u(t_0)\|_{1,p}^p + \|v(t_0)\|_{1,p}^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Desde que g es estrictamente creciente en $[0,\lambda_0]$ y por (3.11), resulta

$$E(0) = g(\lambda_1) < g(\lambda_2) \leq E(t_0)$$

y esto es una contradicción con (3.10). Por tanto se cumple (3.12) y se tiene (3.9). ∎

Teorema 3.5 (Existencia Global) *Supongamos que* (H) *y* $p < 2(\rho+2)$ *se verifican. Si* (u,v) *es una solución local del sistema* $(1.1)-(1.6)$ *sobre* $[0,T]$ *tal que los datos iniciales* $u_0, v_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *y* $u_1, v_1 \in L^2(\Omega)$, *satisface (3.8), entonces* (u,v) *es una solución global del problema* $(1.1)-(1.6)$, *es decir* $T = \infty$.

Demostración. Es suficiente mostrar que $|u'(t)|_2^2 + |v'(t)|_2^2 + \|u(t)\|_{1,p}^p + \|v(t)\|_{1,p}^p$ es acotado independiente de t. Por (3.5) y (3.9), resulta

$$\begin{aligned} I(t) &= \left[\|u(t)\|_{1,p}^p + \|v(t)\|_{1,p}^p\right] - 2(\rho+2)\int_\Omega F(u,v)\,dx \\ &= \left[\|u(t)\|_{1,p}^p + \|v(t)\|_{1,p}^p\right] - \left[a|u+v|_{2(\rho+2)}^{2(\rho+2)} + 2b|uv|_{\rho+2}^{\rho+2}\right] \\ &\geq \left[\|u(t)\|_{1,p}^p + \|v(t)\|_{1,p}^p\right] - C_0\eta\left(\|u\|_{1,p}^p + \|v\|_{1,p}^p\right)^{\frac{2(\rho+2)}{p}} \\ &= \left[\|u(t)\|_{1,p}^p + \|v(t)\|_{1,p}^p\right]\left(1 - C_0\eta\left(\|u\|_{1,p}^p + \|v\|_{1,p}^p\right)^{\frac{2(\rho+2)-p}{p}}\right) \geq 0. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Por (3.10) y (3.13), se tiene

$$
\begin{aligned}
E(0) &\geq \frac{1}{2}\left[\left|u'(t)\right|_2^2+\left|v'(t)\right|_2^2\right]+\frac{1}{p}\left[\|u(t)\|_{1,p}^p+\|v(t)\|_{1,p}^p\right]-\int_\Omega F(u,v)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\left|u'(t)\right|_2^2+\left|v'(t)\right|_2^2\right]+\frac{2(\rho+2)-p}{2p(\rho+2)}\left[\|u(t)\|_{1,p}^p+\|v(t)\|_{1,p}^p\right]+\frac{1}{2(\rho+2)}I(t) \\
&\geq \frac{1}{2}\left[\left|u'(t)\right|_2^2+\left|v'(t)\right|_2^2\right]+\frac{2(\rho+2)-p}{2p(\rho+2)}\left[\|u(t)\|_{1,p}^p+\|v(t)\|_{1,p}^p\right].
\end{aligned}
$$

Del cual, implica que

$$
\left|u'(t)\right|_2^2+\left|v'(t)\right|_2^2+\|u(t)\|_{1,p}^p+\|v(t)\|_{1,p}^p\leq CE(0),
$$

donde $C=\text{máx}\left\{2,\frac{2p(\rho+2)}{2(\rho+2)-p}\right\}$. Por lo anterior y el principio de continuación, conduce que la solución (u,v) del problema $(1.1)-(1.6)$, dado en el Teorema 2.4 es una solución global, es decir $T=\infty$. Todo esto completa la demostración del Teorema 3.5. ∎

4. Comportamiento Asintótico

En esta sección, discutiremos el comportamiento asintótico de la solución global del problema $(1.1)-(1.6)$. Para ello, primero demostraremos dos lemas previos.

Lema 4.1 *Supongamos que se verifican las hipótesis del Teorema 3.5. Entonces existe una constante* $k>0$ *tal que*

$$
kE(t)\leq\frac{k}{2}\left[\left|u'(t)\right|_2^2+\left|v'(t)\right|_2^2\right]+I(t),\ \forall t\geq 0. \tag{4.1}
$$

Demostración. Fijado $\delta>0$, por (3.7) y (3.8), se obtiene

$$
\begin{aligned}
I(t) &= \delta J(t)+\left(1-\frac{\delta}{p}\right)\left[\|u(t)\|_{1,p}^p+\|v(t)\|_{1,p}^p\right]+(\delta-2(\rho+2))\int_\Omega F(u,v)\,dx \\
&\geq \delta J(t)+\left(1-\frac{\delta}{p}\right)\left[\|u(t)\|_{1,p}^p+\|v(t)\|_{1,p}^p\right] \\
&\quad -\left(1+\frac{\delta}{2(\rho+2)}\right)\left[a\left|u+v\right|_{2(\rho+2)}^{2(\rho+2)}+2b\left|uv\right|_{\rho+2}^{\rho+2}\right] \\
&\geq \delta J(t)+\left(1-\frac{\delta}{p}\right)\left[\|u(t)\|_{1,p}^p+\|v(t)\|_{1,p}^p\right] \\
&\quad -\left(1+\frac{\delta}{2(\rho+2)}\right)C_0\eta\left(\|u\|_{1,p}^p+\|v\|_{1,p}^p\right)^{\frac{2(\rho+2)}{p}} \\
&= \delta J(t)+\left[\left(1-\frac{\delta}{p}\right)-\left(1+\frac{\delta}{2(\rho+2)}\right)C_0\eta\left(\|u\|_{1,p}^p+\|v\|_{1,p}^p\right)^{\frac{2(\rho+2)-p}{p}}\right]\times \\
&\quad \left[\|u(t)\|_{1,p}^p+\|v(t)\|_{1,p}^p\right] \\
&\geq \delta J(t)+\left[\left(1-\frac{\delta}{p}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\delta}{2(\rho+2)}\right)\right]\left[\|u(t)\|_{1,p}^p+\|v(t)\|_{1,p}^p\right].
\end{aligned}
$$

Tomando $\delta\leq\frac{2(\rho+2)p}{4(\rho+2)+p}$, implica

$$
I(t)\geq\delta J(t).
$$

Escogiendo $k=\delta$, se obtiene (4.1). ∎

Lema 4.2 *Supongamos que se verifican las hipótesis del Teorema 3.5. Entonces*

$$E(t) \geq \frac{1}{2}\left[|u'(t)|_2^2 + |v'(t)|_2^2\right] + \frac{1}{2p}\left[\|u(t)\|_{1,p}^p + \|v(t)\|_{1,p}^p\right], \ \forall t \geq 0. \tag{4.2}$$

Demostración. Por (3.9) y Lema 3.3, resulta

$$g(\lambda(t)) \geq 0, \ \forall t \geq 0,$$

donde $\lambda(t) = \left(\|u(t)\|_{1,p}^p + \|v(t)\|_{1,p}^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Por (3.5), se obtiene

$$E(t) \geq \frac{1}{2}\left[|u'(t)|_2^2 + |v'(t)|_2^2\right] + \frac{1}{2p}\left[\|u\|_{1,p}^p + \|v\|_{1,p}^p\right] + g(\lambda(t)).$$

Estos dos resultados, implica (4.2). ■

Teorema 4.3 (Comportamiento Asintótico) *Si las hipótesis del Teorema 3.5 se verifican, entonces la solución global (u, v) del problema (1.1)−(1.6) tiene el siguiente comportamiento asintótico:*

$$E(t) \leq C\exp(-\theta t) \ \ si\ p = 2 \tag{4.3}$$

o

$$E(t) \leq C(t+1)^{-\frac{2}{p-2}} \ \ si\ p > 2, \tag{4.4}$$

donde C y θ son algunas constantes positivas.

Demostración. Integrando (3.4) sobre $[t, t+1]$, resulta

$$E(t+1) + \int_t^{t+1}\left[\|u'(s)\|^2 + \|v'(s)\|^2\right]ds = E(t). \tag{4.5}$$

Definamos el operador

$$D^2(t) = E(t) - E(t+1).$$

Por (4.5) y la desigualdad de Sobolev-Poincaré, resulta

$$D^2(t) = \int_t^{t+1}\left[\|u'(s)\|^2 + \|v'(s)\|^2\right]ds \geq C^{-2}\int_t^{t+1}\left[|u'(s)|_2^2 + |v'(s)|_2^2\right]ds. \tag{4.6}$$

Dividiendo el intervalo $[t, t+1]$ en cuatro partes iguales y aplicando el teorema de Valor Medio para integrales, existen $t_1 \in [t, t+1/4]$ y $t_2 \in [t+3/4, t+1]$ tales que

$$\int_t^{t+1/4}\left[|u'(s)|_2^2 + |v'(s)|_2^2\right]ds = \frac{1}{4}\left[|u'(t_1)|_2^2 + |v'(t_1)|_2^2\right]$$

y

$$\int_{t+3/4}^{t+1}\left[|u'(s)|_2^2 + |v'(s)|_2^2\right]ds = \frac{1}{4}\left[|u'(t_2)|_2^2 + |v'(t_2)|_2^2\right].$$

Por (4.6), se obtiene

$$\left(|u'(t_i)|_2^2 + |v'(t_i)|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq 2CD(t), \ i = 1, 2. \tag{4.7}$$

Ahora, multiplicamos (1.1) por u y (1.2) por v, sumando e integrando sobre $\Omega \times [t_1, t_2]$, resulta

$$\begin{aligned}
&[(u'(t_2), u(t_2)) + (v'(t_2), v(t_2))] - [(u'(t_1), u(t_1)) + (v'(t_1), v(t_1))] \\
&- \int_{t_1}^{t_2}\left[|u'(s)|_2^2 + |v'(s)|_2^2\right]ds + \int_{t_1}^{t_2}\left[\|u\|_{1,p}^p + \|v\|_{1,p}^p\right]ds \\
&+ \int_{t_1}^{t_2}\left[((u'(s), u(s))) + ((v'(s), v(s)))\right]ds \\
&= 2(\rho+2)\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega F(u, v)\,dxds.
\end{aligned}$$

Esto es equivalente escribir

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{k}{2}\left[\left|u'(t)\right|_2^2+\left|v'(t)\right|_2^2\right]+I(t)\right]ds &= \left[\left(u'(t_1),u(t_1)\right)+\left(v'(t_1),v(t_1)\right)\right]\\ &\quad-\left[\left(u'(t_2),u(t_2)\right)+\left(v'(t_2),v(t_2)\right)\right]\\ &\quad+\left(\frac{k}{2}+1\right)\int_{t_1}^{t_2}\left[\left|u'(t)\right|_2^2+\left|v'(t)\right|_2^2\right]ds\\ &\quad-\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(\left(u'(s),u(s)\right)\right)+\left(\left(v'(s),v(s)\right)\right)\right]ds\end{aligned}$$

y por el Lema 4.1, resulta

$$\begin{aligned}k\int_{t_1}^{t_2}E(s)\,ds &\leq \left[\left(u'(t_1),u(t_1)\right)+\left(v'(t_1),v(t_1)\right)\right]\\ &\quad-\left[\left(u'(t_2),u(t_2)\right)+\left(v'(t_2),v(t_2)\right)\right]\\ &\quad+\left(\frac{k}{2}+1\right)\int_{t_1}^{t_2}\left[\left|u'(t)\right|_2^2+\left|v'(t)\right|_2^2\right]ds\\ &\quad-\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(\left(u'(s),u(s)\right)\right)+\left(\left(v'(s),v(s)\right)\right)\right]ds.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Por la inmersión $W_0^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow H_0^1(\Omega)$ y (4.6), se obtiene

$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(\left(u'(s),u(s)\right)\right)+\left(\left(v'(s),v(s)\right)\right)\right]ds\\ &\leq\int_{t_1}^{t_2}\left[\left\|u'(s)\right\|\left\|u(s)\right\|+\left\|v'(s)\right\|\left\|v(s)\right\|\right]ds\\ &\leq\sup_{s\in[t,t+1]}\left\|u(s)\right\|\int_t^{t+1}\left\|u'(s)\right\|ds+\sup_{s\in[t,t+1]}\left\|v(s)\right\|\int_t^{t+1}\left\|v'(s)\right\|ds\\ &\leq C_1\left[\sup_{s\in[t,t+1]}\left\|u(s)\right\|+\sup_{s\in[t,t+1]}\left\|v(s)\right\|\right]D(t)\\ &\leq C_2\left[\sup_{s\in[t,t+1]}\left\|u(s)\right\|_{1,p}+\sup_{s\in[t,t+1]}\left\|v(s)\right\|_{1,p}\right]D(t).\end{aligned}\tag{4.9}$$

Análogamente, por (4.6) y (4.7), se obtiene

$$\begin{aligned}&\left[\left(u'(t_1),u(t_1)\right)+\left(v'(t_1),v(t_1)\right)\right]-\left[\left(u'(t_2),u(t_2)\right)+\left(v'(t_2),v(t_2)\right)\right]\\ &\leq\left[\left|u'(t_1)\right|_2\left|u(t_1)\right|_2+\left|v'(t_1)\right|_2\left|v(t_1)\right|_2\right]+\left[\left|u'(t_2)\right|_2\left|u(t_2)\right|_2+\left|v'(t_2)\right|_2\left|v(t_2)\right|_2\right]\\ &\leq C_3\left[\sup_{s\in[t,t+1]}\left\|u(s)\right\|_{1,p}+\sup_{s\in[t,t+1]}\left\|v(s)\right\|_{1,p}\right]D(t).\end{aligned}\tag{4.10}$$

Por (4.2), se tiene

$$\left(\left\|u(t)\right\|_{1,p}^p+\left\|v(t)\right\|_{1,p}^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq(2p)^{1/p}E^{1/p}(t).\tag{4.11}$$

Observar que $E(t+1)\leq E(s)\leq E(t)$ para $t\leq s\leq t+1$. Por (4.9), (4.10) y (4.11), existen constantes positivas C_4 y C_5 tales que (4.8) implica

$$\int_{t_1}^{t_2}E(s)\,ds\leq C_4D^2(t)+C_5D(t)\,E^{1/p}(t).$$

Por el teorema de Valor Medio para integrales, existe $t_0\in[t_1,t_2]$ tal que

$$(t_2-t_1)\,E(t_0)\leq C_4D^2(t)+C_5D(t)\,E^{1/p}(t).$$

Desde que $(t_2 - t_1) \geq \frac{1}{2}$ y $E(t)$ es no creciente, resulta

$$E(t+1) \leq 2C_4 D^2(t) + 2C_5 D(t) E^{1/p}(t).$$

Como $E(t+1) = E(t) - D^2(t)$, obtenemos

$$E(t) \leq (2C_4 + 1) D^2(t) + 2C_5 D(t) E^{1/p}(t).$$

Utilizando la desigualdad de Young, existen constantes positivas C_6 y C_7 tales que

$$E(t) \leq C_6 D^2(t) + C_7 D^{\frac{p}{p-1}}(t). \tag{4.12}$$

Si $p = 2$, entonces

$$E(t) \leq (C_6 + C_7) D^2(t)$$

y siendo $E(t)$ no creciente, por el Lema 2.5, existen constantes positivas C y θ tales que

$$E(t) \leq C \exp(-\theta t), \ \forall t \geq 0. \tag{4.13}$$

Si $p > 2$, entonces de la relación (4.12) y desde que $D(t)$ es acotado, se tiene

$$\begin{aligned} E(t) &\leq C_6 D^{\frac{p-2}{p-1}}(t) D^{\frac{p}{p-1}}(t) + C_7 D^{\frac{p}{p-1}}(t) \\ &= \left(C_6 D^{\frac{p-2}{p-1}}(t) + C_7\right) D^{\frac{p}{p-1}}(t) \\ &\leq C_8 D^{\frac{p}{p-1}}(t). \end{aligned}$$

Por lo cual, resulta

$$E^{1+\frac{p-2}{p}}(t) \leq C_8^{\frac{2(p-1)}{p}} D^2(t).$$

Aplicando el Lema 2.5, con $\gamma = \frac{p-2}{p}$, existe una constante positiva C tal que

$$E(t) \leq C(1+t)^{-\frac{p}{p-2}}, \ \forall t \geq 0.$$

Esto completa la demostración del Teorema 4.3. ■

Agradecimientos

Al Consejo Superior de Investigación del Vicerrectorado de Investigación de la UNMSM, por el apoyo financiero otorgado para la ejecución del Proyecto de Estudio de Investigación 2012 con código: 121401121, cuyo segundo y último resultado es la presente publicación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Brézis, H., *Análisis funcional*, Alianza Editorial, Madrid, 1984.

[2] Castro, N. N. O., A *nonlinear evolution system of partial differential equations with p-Laplacian and negative nonlineariry*, Proceedings of 10th WSEAS International Conference on APLLIED MATHEMATICS, Dallas, Texas, USA, November 1-3, 2006.

[3] Chen, C., Yao, H., and Shao, L., *Global existence, uniqueness, and asymptotic behavior of solution for p-Laplacian type wave equation*, Journal of Inequalities and Applications Volume 2010, Article ID 216760, 15 pages.

[4] Gao, H., Ma, T. F., *Global solutions for a nonlinear wave equation with the p-Laplacian operator*, EJQTDE, 1999, No. 11.

[5] Li, M.-R., Tsai, L.-Y., *Existence and nonexistence of global solutions of some system of semilinear wave equations*, Nonlinear Analysis 54 (2003) 1397-1415.

[6] Lima, O. A., Lourêdo, A. T., Marinho, A. O., *Weak solutions for a strongly-coupled nonlinear system*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2006 (2006), No. 130, pp. 1-18.

[7] Lions, J. L., Magenes, E., *Non-Homogeneous Boundary Value Probles and Applications I*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1972.

[8] Ma, T. F., Soriano, J. A., *On weak solutions for an evolution equation with exponential nonlinearities*, Nonlinear Analysis 37 (1999) 1029-1038.

[9] Milla Miranda, M. and Medeiros, L. A., *On the existence of global solutions of a coupled nonlinear Klein-Gordon equations*, Funkcialaj Ekvaciaj, 30 (1987) 147-161.

[10] Nakao, M., *A difference inequality and its application to nonlinear evolution equations*, Journal Math. Soc Japan 30 (1978) 747-762.

[11] Quispe Méndez, T., *Singularidad de soluciones para una ecuacón de onda degenerada no lineal con término disipativo,* PESQUIMAT, Revista de la F. C. M. de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos Vol. XI, No.1, pp 41-54, LIMA-PERÚ. Octubre 2008.

[12] Quispe Méndez, T. y Carrillo Díaz, L. E., *Solución local de un sistema de Kirchhoff no lineal viscoelástico con término disipativo*, PESQUIMAT, Revista de la F. C. M. de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos Vol. XIII No.2, pp 40-58, Lima-Perú, Diciembre 2010.

[13] Quispe Méndez, T., *Singularidad de soluciones para un sistema de Kirchhoff no lineal viscoelástico con término disipativo*, PESQUIMAT, Revista de la F. C. M. de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos Vol. XIV No.1, pp 46-57, Lima-Perú, Julio 2011.

[14] Quispe Méndez, T., Santiago Ayala, Y., Pariona Vilca, F., *Existencia local y no existencia global para un sistema de ecuaciones de onda no lineal con operador p-Laplaciano*, Por aparecer en PESQUIMAT, Revista de la F. C. M. de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos Vol. XV No.1 (2012).

[15] Rammaha, M. A., Sakuntasathien, S., Global existence and blow up of solutions to systems of nonlinear wave equations with degenerate damping and source terms, Nonlinear Analysis, 72 (2010), 2658-2683.

[16] Segal, I., *Nonlinear partial differential equations in quantum fiels theory*, Proc. Symp. Appl. Math. A.M.S., 17, 210-226 (1965).

[17] Showalter, R. E., *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial diffential equations*, American Mathematical Society, 1997.

[18] Wu, S.-T. and Tsai, L.-Y., *On a system of nonlinear wave equations of Kirchhoff type with a strong dissipation*, Tamkang Journal of Mathematics Volume 38, Number 1, 1-20, Spring 2007.

[19] Yang, Z., *Existence and asymptotic behaviour of solutions for a class of quasi-linear evolution equations with non-linear damping and source terms*, Math. Meth. Appl. Sci. 2002; 25:795-814.

[20] Yang, Z. and Chen, G., *Global existence of solutions for quasi-linear wave equations with viscous damping*, Journal Mathematical Analysis and Applications 285 (2003) 604-618.

[21] Ye, Y., *Exponential decay of energy for some nonlinear hyperbolic equations with strong dissipation*, Advances in Difference Equations Volume 2010, Article ID 357404, 12 pages.