PESQUIMAT, Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XVI N°1, pp. 47-55, Lima - Perú, Abril 2014

SOBRE UN PROBLEMA DE OSCILACIONES DE UNA VIGA CURVA: EXISTENCIA, UNICIDAD Y REGULARIDAD DE LA SOLUCIÓN

María Zegarra Garay[1], *Walter Acuña Montañez*[2], *Julio Flores Dionicio* [3], *Rubén Arbañil Rivadeneira*[4], *Victoria Rojas Rojas*[5], *Félix Pariona Vilca*[6], *Máximo Gonzáles Chávez*[7], *Melanio Sempértegui Gonzáles*[8]

Resumen: El presente trabajo trata sobre el estudio de la existencia, unicidad y regularidad de la solución de un sistema hiperbólico, el cual modela un tipo de viga curva o de arco circular sobre el intervalo $[0, L]$. Se utiliza la técnica de semigrupos para llegar al objetivo. Las ecuaciones que modelan el fenómeno son:

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) = F_1 \text{ in } (0,\infty) \times (0, L) \tag{1}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) = F_2 \text{ in } (0,\infty) \times (0, L) \tag{2}$$

$$\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = F_3 \text{ in } (0,\infty) \times (0, L) \tag{3}$$

donde F_i denota las fuerzas externas, las constantes ρ_1, ρ_2, k, k_0, b, l son positivas y las funciones w, φ y ψ son los ángulos de desplazamiento longitudinal, vertical y cortante. Las condiciones iniciales a considerar son

$$\varphi(0,\cdot) = \varphi_0, \quad \varphi_t(0,\cdot) = \varphi_1, \quad \psi(0,\cdot) = \psi_0, \quad \psi_t(0,\cdot) = \psi_1,$$

$$w(0,\cdot) = w_0, \quad w_t(0,\cdot) = w_1$$

y las condiciones de frontera son Dirichlet-Neumann-Neumann respectivamente

$$\varphi(t,0) = \varphi(t,L) = \psi_x(t,0) = \psi_x(t,L) = w_x(t,0) = w_x(t,L) = 0 \text{ in } (0,\infty).$$

Palabras Clave: Energía, semigrupo, generador infinitesimal, disipación friccional .

Abstract: The present work treat about existence, uniqueness and regularity of an hiperbolic system solution, defined on the interval $[0, L]$. We use tecniques of semigroups. The following system, that is, (1), (2) y (3), define our problem to resolve

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) = F_1 \text{ in } (0,\infty) \times (0, L) \tag{4}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) = F_2 \text{ in } (0,\infty) \times (0, L) \tag{5}$$

$$\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = F_3 \text{ in } (0,\infty) \times (0, L) \tag{6}$$

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: maria_ zegarra@hotmail.com
[2]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: wram3@yahoo.com
[3]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: juliofloresd@hotmail.com
[4]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: rubenarbanil@gmail.com
[5]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: vicrojas034@gmail.com
[6]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: fparionav@hotmail.com
[7]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: mgonzalescl@unmsm.edu.pe
[8]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: semperteguime@hotmail.com

where F_i are denoting external forces, the constants ρ_1, ρ_2, k, k_0, b, l are positive and the functions w, φ, ψ are the longitudinal, vertical and shear angle displacements. We consider the following initial conditions

$$\varphi(0,\cdot)=\varphi_0, \quad \varphi_t(0,\cdot)=\varphi_1, \quad \psi(0,\cdot)=\psi_0, \quad \psi_t(0,\cdot)=\psi_1,$$

$$w(0,\cdot)=w_0, \quad w_t(0,\cdot)=w_1$$

and Dirichlet-Neumann-Neumann boundary conditions

$$\varphi(t,0)=\varphi(t,L)=\psi_x(t,0)=\psi_x(t,L)=w_x(t,0)=w_x(t,L)=0 \text{ in } (0,\infty).$$

Key words: Energy, semigroup, infinitesimal generator, frictional damping.

1. Introducción

En el presente trabajo se particulariza las ecuaciones de la teoría del arco circular, considerando el sistema de Bresse con disipación friccional y las fuerzas externas dadas por $F_1=-\gamma_1\varphi_t$, $F_2=-\gamma_2\psi_t$, $F_3=0$ y γ_1, $\gamma_2>0$. El modelo de las oscilaciones libres de una curva o arco circular se pueden encontrar en Lagnese et al [6]. Establecer el resultado de existencia y unicidad de las ecuaciones (4)–(6) , que es el objetivo a alcanzar, contribuye a mostrar el Principio de Estabilidad Lineal del sistema, ya que con el semigrupo obtenido es suficiente probar la limitación del resolvente asociado al generador del semigrupo, sobre toda la recta R; actualmente es un problema en abierto. Resultados anteriores sobre las implicancias de la limitación del resolvente se pueden encontrar también en Slemrod [15]. El principio de estabilidad lineal es importante porque establece un criterio práctico para evaluar la estabilidad de un problema de evolución. Uno de los primeros estudios de estabilidad del sistema de Bresse se ecuentran en Liu-Rao [7]. En este trabajo los autores consideran el sistema de Bresse con dos mecanismos de disipación encontrando resultados de estabilidad exponencial y para la estabilidad polinomial encuentran tasas que dependen de las condiciones de frontera. Posteriormente en Rivera-Fatori [9] el resultado es mejorado en el sentido de considerar tan sólo un mecanismo de disipación actuante en la temperatura y más aún encuentran la tasa óptima de decaimiento bajo algunas condiciones sobre los coeficientes. Un trabajo reciente también puede ser consultado en Soriano-Rivera-Fatori [14], en el se considera un amortecimiento indefinido, dado por una función $a(x)$ que cambia de signo, presente en el término de ángulo de rotación. Los autores muestran estabilidad exponencial bajo ciertas condiciones.

2. Preliminares

Definición 2.1 *Sea X un espacio de Hilbert y $T: D(T)\subset X\to X$ un operador lineal; no acotado en X, el conjunto resolvente $\rho(T)$ se define como*

$$\rho(T):=\left\{\lambda\in\mathbb{C}\ /\ (\lambda I-T) \text{ es invertible y } (\lambda I-T)^{-1} \text{ es un operador acotado en } X\right\}$$

El operador lineal acotado $R(\lambda;T):=(\lambda I-T)^{-1}$ con $\lambda\in\rho(T)$, se llama Resolvente de T.

Teorema 2.1 *(Hille- Yosida) Sea X un espacio de Hilbert y A un operador lineal no limitado es generador infinitesimal de un semigrupo C_0 de contracciones, si, y solo si* (*i*) *A es denso en X y A cerrado.*

(*ii*) *El conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contiene a $\mathbb{R}^+$ y para todo $\lambda > 0$, se cumple*

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

Demostración. Ver [10] Teorema 2.7.2, página 63. ■

Teorema 2.2 *Sea X un espacio de Banach y A un operador lineal (no acotado), disipativo y con dominio denso en X. Si $0 \in \rho(A)$, entonces A es el generador infinitesimal de un semigrupo C_0 de contracciones: $S(t) = e^{At}$ sobre X .*

Demostración. Ver [13] Teorema 2.12.3, página 88. ■

Definición 2.2 *Sea X un espacio de Banach, A un operador lineal no acotado, $D(A) \subset X$ y $U_0 \in X$ un dato inicial. El Problema de Valor Inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = AU, \quad t > 0 \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{7}$$

se denomina Problema Abstracto de Cauchy.

Definición 2.3 *Diremos que U es solución fuerte (clásica) del Problema (7), si U verifica*

$$U \in C\left([0, +\infty\rangle ; D(A)\right) \cap C^1\left([0, +\infty\rangle ; X\right)$$

y satisface (7).

Teorema 2.3 *Sea A generador infinitesimal de un semigrupo $S(t)$ de clase C_0. Si $u_0 \in D(A)$ entonces el Problema de Cauchy dado en (7) posee una única solución fuerte satisfaciendo*

$$u \in C(0, \infty; D(A)) \cap \in C^1(0, \infty; X) \qquad y \qquad \|u(t)\|_{D(A)} + \|u_t(t)\|_X \leq \|S(t)Au_0\|_X \leq C\|u_0\|_{D(A)}.$$

Demostración. Ver [10] página 104. ■

El Problema de Cauchy

La teoría de semigrupos se desarrolla a partir de ecuaciones de primer orden en el tiempo. Para esto es necesario convertir el modelo anterior a un sistema de primer orden. Para tal consideremos la siguiente notación vectorial.

Denotemos $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$

Derivando se encuentra que el sistema (4)–(6) donde $F_1 = -\gamma_1\varphi_t$, $F_2 = -\gamma_2\psi_t$ y $F_3 = 0$ puede ser escrito como

$$\frac{d}{dt}U = \begin{pmatrix} \varphi_t \\ \Phi_t \\ \psi_t \\ \Psi_t \\ w_t \\ W_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_t \\ \dfrac{k}{\rho_1}\varphi_{xx} - \dfrac{k_0 l^2}{\rho_1}\varphi - \dfrac{\gamma_1}{\rho_1}\varphi_t \dfrac{k}{\rho_1}\psi_x + \dfrac{(k+k_0)l}{\rho_1}w_x \\ \psi_t \\ -\dfrac{k}{\rho_2}\varphi_x + \dfrac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \dfrac{k}{\rho_2}\psi - \dfrac{\gamma_2}{\rho_2}\psi_t - \dfrac{kl}{\rho_2}w \\ w_t \\ -\dfrac{(k_0+k)l}{\rho_1}\varphi_x - \dfrac{kl}{\rho_1}\psi + \dfrac{k_0}{\rho_1}w_{xx} - \dfrac{kl^2}{\rho_1}w \end{pmatrix} = AU$$

y A se puede definir formalmente como el operador diferencial

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1}\partial_x^2 - \frac{k_0 l^2}{\rho_1} I & -\frac{\gamma_1}{\rho_1} I & \frac{k}{\rho_1}\partial_x & 0 & \frac{(k+k_0)l}{\rho_1}\partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ -\frac{k}{\rho_2}\partial_x & 0 & \frac{b}{\rho_2}\partial_x^2 - \frac{k}{\rho_2} I & -\frac{\gamma_2}{\rho_2} I & -\frac{kl}{\rho_2} I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ -\frac{(k_0+k)l}{\rho_1}\partial_x & 0 & -\frac{kl}{\rho_1} I & 0 & \frac{k_0}{\rho_1}\partial_x^2 - \frac{kl^2}{\rho_1} I & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Lema 2.1 *La energía del sistema (4)-(6), $E(t) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ dada en el tiempo t está definida como*

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_1 w_t^2 + b\psi_x^2 + k(\varphi_x + \psi + lw)^2 + k_0(w_x - l\varphi)^2 dx$$

Demostración. Multiplicando formalmente la ecuación (4) por φ_t e integrando por partes se obtiene

$$\frac{\rho_1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \varphi_t^2 dx + k\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\varphi_{tx} dx - k_0 l \int_0^L (w_x - l\varphi)\varphi_t dx = \int_0^L F_1 \varphi_t dx \tag{9}$$

En (5) multiplicando ψ_t e integrando por partes se obtiene

$$\frac{\rho_2}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \psi_t^2 dx + \frac{k}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L (\psi_x^2 + k\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\psi_t dx = \int_0^L F_2 \psi_t dx \tag{10}$$

en la ecuación (6) multiplicando por w_t e integrando por partes se obtiene

$$\frac{\rho_1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L w_t^2 dx + k_0\int_0^L (w_x - l\varphi)w_{tx} dx + kl\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)w_t dx \int_0^L F_3 w_t dx \tag{11}$$

sumando (9), (10) y (11) se tiene

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\int_0^L (\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2 + \rho_1 w_t^2 + b\psi_x^2) dx] + \frac{k}{2}\frac{d}{dt}[\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx] + \int_0^L k_0(w_x - l\varphi)(w_x - l\varphi)_t dx$$
$$= \int_0^L (F_1\varphi_t + F_2\psi_t + F_3 w_t) dx$$

de donde se sigue el resultado. Por otra parte, de la definición de las fuerzas externas F_i se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) &= \int_0^L (F_1\varphi_t + F_2\psi_t + F_3 w_t) dx \\ &= \int_0^L (\gamma_1|\varphi_t|^2 + \gamma_2|\psi_t|^2 + \gamma_3|w_t|^2) dx \end{aligned}$$

Siendo la expresión de la derecha negativa, se concluye que el sistema es disipativo. ∎

Observación 2.1 *Los cálculos anteriores han sido formales, puesto que aún no se demostró la existencia ni la regularidad de la solución. La expresión obtenida para la energía motiva la construcción de la norma en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ correspondiente.*

Observación 2.2 *Del resultado de la proposición anterior, para que la energía esté bien definida, se establece que la solución $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$ debe satisfacer*

$$U \in H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times H_*^1(0,L) \times L_*^2(0,L) \times H_*^1(0,L) \times L_*^2(0,L).$$

donde

$$L_*^2(0,L) = \left\{ u \in L^2(0,L) : \int_0^L u(x)\,dx = 0 \right\}$$

$$H_*^1(0,L) = L_*^2(0,L) \cap H^1(0,L).$$

Desta forma se define el Espacio de Fase como

$$\mathcal{H} = H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times H_*^1(0,L) \times L_*^2(0,L) \times H_*^1(0,L) \times L_*^2(0,L).$$

Observe que en este espacio fueron incluídas las condiciones de frontera.

Este espacio $\mathcal{H}$ equipado con el siguiente producto interno

$$(U,U^*)_H = \rho_1 \int_0^L \Phi\overline{\Phi^*}\,dx + \rho_2 \int_0^L \Psi\overline{\Psi^*}\,dx + \rho_1 \int_0^L W\overline{W^*}\,dx + b\int_0^L \psi_x\overline{\psi_x^*}\,dx$$
$$+k\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{(\varphi_x^* + \psi^* + lw^*)}\,dx + k_0\int_0^L (w_x - l\varphi)\overline{(w_x^* - l\varphi^*)}\,dx$$

donde $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$, $U^* = (\varphi^*, \Phi^*, \psi^*, \Psi^*, w^*, W^*)$, es un espacio de Hilbert, con la norma dada por

$$\|U\|_H^2 = \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \rho_1\|W\|_{L^2}^2 + b\|\psi_x\|_{L^2}^2 + k\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2$$

Habiéndose definido el espacio de fase, se puede definir el dominio del operador A de la siguiente forma. Recordando que en términos generales

$$D(A) = \{U \in \mathcal{H};\ \ AU \in \mathcal{H}\}$$

Usando la definición de A se tiene

$$D(A) = H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L) \times (H_*^2(0,L) \cap H_*^1(0,L) \times H_*^1(0,L))^2$$

donde

$$H_*^2(0,L) = \left\{ u \in H^2(0,L) : u_x(0) = u_x(L), \int_0^L u(x)dx = 0 \right\}. \tag{12}$$

Finalmente con los resultados anteriores, el sistema (4)-(6) es equivalente a mostrar el siguiente problema de Cauchy sobre $\mathcal{H}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dU}{dt} = AU, \quad t > 0 \\ U(0) = U_0 \end{array} \right. \tag{13}$$

donde $U = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, w, w_t)'$, $U_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1)'$, donde la prima ($'$) denota la transpuesta y A es el operador (formal) diferencial.

A seguir se probará, usando el Teorema 2.1, que A es el generador infinitesimal de un semigrupo C_0 de contracciones.

Teorema 2.4 *El operador A definido anteriormente es un generador infinitesimal de un semigrupo C_0 de contracciones en $\mathcal{H}$.*

Demostración. Por el Teorema 2.2, bastará verificar lo siguiente:

$$i)\ \overline{D(A)} = \mathcal{H} \qquad ii)\ A \text{es disipativo} \qquad iii)\ 0 \in \rho(A). \tag{14}$$

i) El Dominio de A es denso en H:
Usando las densidades: H^2 denso en H^1, H_0^1 denso en $L^2, H^2 \cap H_0^1$ denso en H_0^1 se muestra que el $D(A)$ es denso en el espacio de fase $\mathcal{H}$
ii) A es disipativo:
Sea $U \in D(A)$ entonces $Re(AU;\overline{U}) \leq 0$, verificando

$$\begin{aligned}
(AU;\overline{U}) &= (\Phi; \frac{k}{\rho_1}\varphi_{xx} - \frac{k_0 l^2}{\rho_1}\varphi - \frac{\gamma_1}{\rho_1}\Phi + \frac{k}{\rho_1}\psi_x + \frac{(k+k_0)l}{\rho_1}w_x; \Psi; -\frac{k}{\rho_2}\phi_x + \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} \\
&\quad -\frac{k}{\rho_2}\psi - \frac{\gamma_2}{\rho_2}\Psi - \frac{klw}{\rho_2}w; W; -\frac{(k+k_0)l}{\rho_1}\varphi_x - \frac{kl}{\rho_1}\psi + \frac{k_0}{\rho_1}w_{xx} - \frac{kl^2}{\rho_1}w)'; \\
&\quad (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)) \\
&= \rho_1 \int_0^L (\frac{k}{\rho_1}\varphi_{xx} - \frac{k_0 l^2}{\rho_1}\varphi - \frac{\gamma_1}{\rho_1}\Phi + \frac{k}{\rho_1}\psi_x + \frac{(k+k_0)l}{\rho_1}w_x)(\overline{\Phi})dx + \\
&\quad \rho_2 \int_0^L (-\frac{k}{\rho_2}\phi_x + \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}\psi - \frac{\gamma_2}{\rho_2}\Psi - \frac{kl}{\rho_2}w)(\overline{\Psi})dx + \\
&\quad \rho_1 \int_0^L (\frac{-(k+k_0)l}{\rho_1}\varphi_x - \frac{kl}{\rho_1}\psi + \frac{k_0}{\rho_1}w_{xx} - \frac{kl^2}{\rho_1}w)(\overline{W})dx + \\
&\quad b\int_0^L \Psi_x \overline{\psi}_x dx + k\int_0^L (\Phi_x + \Psi + lW)\overline{(\varphi_x + \psi + lw)}dx + \\
&\quad k_0 \int_0^L (W_x + l\Phi)\overline{(w_x - l\varphi)}dx
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
(AU;\overline{U}) &= k\int_0^L \varphi_{xx}\overline{\Phi}dx - k_0 l^2 \int_0^L \varphi\overline{\Phi}dx - \gamma_1 \int_0^L \Phi\overline{\Phi}dx + (k+k_0)l\int_0^L w_x\overline{\Phi}dx + \\
&\quad k\int_0^L \psi_x\overline{\Phi}dx - k\int_0^L \varphi_x\overline{\Psi}dx + b\int_0^L \psi_{xx}\overline{\Psi}dx - k\int_0^L \psi\overline{\Psi}dx - \\
&\quad \gamma_2\int_0^L \Psi\overline{\Psi}dx - kl\int_0^L w\overline{\Psi}dx - (k_0+k)l\int_0^L \varphi_x\overline{W}dx - kl\int_0^L \psi\overline{W}dx + \\
&\quad k_0\int_0^L w_{xx}\overline{W}dx - kl^2\int_0^L w\overline{W}dx + b\int_0^L \Psi_x\overline{\psi}_x dx + k\int_0^L \Phi_x\overline{\varphi}_x dx + \\
&\quad kl\int_0^L \Phi_x\overline{w}dx + k\int_0^L \Psi\overline{\varphi}_x dx + kl\int_0^L \Psi\overline{w}dx + kl\int_0^L W\overline{\varphi}_x dx + \\
&\quad k\int_0^L \Phi_x\overline{\psi}dx + k\int_0^L \Psi\overline{\psi}dx + kl\int_0^L W\overline{\psi}dx + kl^2\int_0^L W\overline{w}dx + \\
&\quad k_0\int_0^L W_x\overline{w}_x dx - k_0 l\int_0^L W_x\overline{\varphi}dx - k_0 l\int_0^L \Phi\overline{w}_x dx + k_0 l^2\int_0^L \Phi\overline{\varphi}dx
\end{aligned} \tag{15}$$

Por otra parte

$$
\begin{aligned}
k\int_0^L \varphi_{xx}\overline{\Phi}dx + k\int_0^L \varphi_{xx}\overline{\Phi}dx &= 2ki\int_0^L Im(\Phi_x)dx\\
-k_0l^2\int_0^L \varphi\overline{\Phi}dx + k_0l^2\int_0^L \Phi\overline{\varphi}dx &= 2k_0l^2 i\int_0^L Im(\Phi\overline{\varphi})dx\\
k\int_0^L \psi_x\overline{\Phi}dx + k\int_0^L \Phi_x\overline{\psi}dx &= 2ki\int_0^L Im(\overline{\psi}\Phi_x)dx\\
kl\int_0^L w_x\overline{\Phi}dx + k_0l\int_0^L w_x\overline{\Phi}dx + kl\int_0^L \Phi_x\overline{w}dx - k_0l\int_0^L \Phi\overline{w}_xdx &= 2kli\int_0^L Im(w_x\overline{\Phi})dx\\
&\quad +2k_0li\int_0^L Im(w_x\overline{\Phi})dx\\
-k\int_0^L \varphi_x\overline{\Psi}dx + k\int_0^L \Psi\overline{\varphi}_xdx &= 2ki\int_0^L Im(\overline{\varphi}\Psi)dx\\
b\int_0^L \psi_{xx}\overline{\Psi}dx + b\int_0^L \Psi\overline{\psi}_xdx &= 2bi\int_0^L Im(\Psi\overline{\psi}_x)dx\\
-k_0l\int_0^L \varphi_x\overline{W}dx - kl\int_0^L \varphi_x\overline{W}dx + kl\int_0^L W\overline{\varphi}_xdx - k_0l\int_0^L W_x\overline{\varphi}dx &= 2k_0l\int_0^L Im(W\overline{\varphi}_x)dx\\
&\quad +2kli\int_0^L Im(W\overline{\varphi}_x)dx\\
k_0\int_0^L w_{xx}\overline{W}dx + k_0\int_0^L W_x\overline{w}_xdx &= 2k_0i\int_0^L Im(W_x\overline{w}_x)dx
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Luego sustituyendo (16) en (15),

$$Re(AU;\overline{U}) = -\gamma_1\int_0^L |\Phi|^2dx - \gamma_2\int_0^L |\Psi|^2dx \leq 0$$

iii) $0 \in \rho(A)$:

Dado $F = (f, g, h, p, q, r) \in \mathcal{H}$ (espacio de fase) se mostrará que existe un único $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W) \in D(A)$ tal que $-AU = F$; en términos de sus componentes se tiene

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
-\Phi &=& f\\
-\dfrac{k}{\rho_1}\varphi_{xx} + \dfrac{k_0}{\rho_1}l^2\varphi + \dfrac{\gamma_1}{\rho_1}\Phi - \dfrac{k}{\rho_1}\psi_x - \dfrac{(k+k_0)l}{\rho_1}w_x &=& g\\
-\Psi &=& h\\
\dfrac{k}{\rho_2}\varphi_x - \dfrac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \dfrac{k}{\rho_2}\psi + \dfrac{\gamma_2}{\rho_2}\Psi + \dfrac{kl}{\rho_2}w &=& p\\
-W &=& q\\
\dfrac{(k_0+k)l}{\rho_1}\varphi_x + \dfrac{kl}{\rho_1}\psi - \dfrac{k_0}{\rho_1}w_{xx} + \dfrac{kl^2}{\rho_1}w &=& r
\end{array}
\right.
\tag{17}
$$

reduciendo variables en (17) se obtiene el siguiente sistema equivalente

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
-k\varphi_{xx} + k_0l^2\varphi - k\psi_x - (k+k_0)lw_x &=& F\\
-b\psi_{xx} + k\varphi_x + k\psi + klw &=& G\\
-k_0w_{xx} + kl^2w + (k+k_0)l\varphi_x + kl\psi &=& r
\end{array}
\right.
\tag{18}
$$

donde

$$\rho_1 g - \gamma_1 f = F \in L^2(0, L)$$

$$\rho_2 p - \gamma_2 h = G \in L^2_*(0, L)$$

$$r \in L^2_*(0, L)$$

Pasando a su formulación débil, esto es, multiplicando por $\overline{\hat{\varphi}} \in H_0^1(0,L)$, $\overline{\hat{\psi}} \in H_*^1(0,L)$, $\overline{\hat{w}} \in H_*^1(0,L)$ en (18), respectivamente se tiene

$$\begin{aligned}
\int_0^L (-k\varphi_{xx} + k_0 l^2\varphi - k\psi_x - (k+k_0)lw_x)\overline{\hat{\varphi}}dx &= \int_0^L F\overline{\hat{\varphi}}dx && (19)\\
\int_0^L (-b\psi_{xx} + k\varphi_x + k\psi + klw)\overline{\hat{\psi}}dx &= \int_0^L G\overline{\hat{\psi}}dx && (20)\\
\int_0^L (-k_0 w_{xx} + kl^2 w + (k+k_0)l\varphi_x + kl\psi)\overline{\hat{w}}dx &= \int_0^L r\overline{\hat{w}}dx && (21)
\end{aligned}$$

Sumando las ecuaciones (19), (20) y (21) se puede definir la forma trilineal a, como sigue

$$a(.,.) : [H_0^1(0,L) \times H_*^1(0,L) \times H_*^1(0,L)]^2 \to C$$

$$\begin{aligned}
a((\varphi,\psi,w),(\overline{\hat{\varphi}},\overline{\hat{\psi}},\overline{\hat{w}})) &= k\int_0^L \varphi_x\overline{\hat{\varphi}}_x dx + k_0 l^2\int_0^L \varphi\overline{\hat{\varphi}}dx - k\int_0^L \psi_x\overline{\hat{\varphi}}dx - (k+k_0)l\int_0^L w_x\overline{\hat{\varphi}}dx\\
&\quad + b\int_0^L \psi_x\overline{\hat{\psi}}_x\,dx + k\int_0^L \varphi_x\overline{\hat{\psi}}\,dx + k\int_0^L \psi\overline{\hat{\psi}}\,dx + kl\int_0^L w\overline{\hat{\psi}}\,dx\\
&\quad + k_0\int_0^L w_x\overline{\hat{w}}_x\,dx + kl^2\int_0^L w\overline{\hat{w}}\,dx + (k+k_0)l\int_0^L \varphi_x\overline{\hat{w}}\,dx\\
&\quad + kl\int_0^L \psi\overline{\hat{w}}\,dx.
\end{aligned}$$

Se verifica que a es coerciva.

En efecto,

$$a((\varphi,\psi,w),(\overline{\varphi},\overline{\psi},\overline{w})) \geq b\int_0^L \psi_x^2 dx + k\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx + k_0\int_0^L (w_x - l\varphi)^2 dx$$

tomando parte real se sigue la coercividad.

Se verifica que a es contínua.

En efecto, aplicando la desigualdad de Hölder y de Poincaré, se obtiene

$$|a((\varphi,\psi,w),(\overline{\hat{\varphi}},\overline{\hat{\psi}},\overline{\hat{w}}))| \leq k[\int_0^L (|\varphi_x|^2 + |\psi_x|^2 + |w_x|^2)dx]^{1/2}[\int_0^L (|\overline{\hat{\varphi}}_x|^2 + |\overline{\hat{\psi}}_x|^2 + |\overline{\hat{w}}_x|^2)dx]^{1/2}.$$

De la equivalencia entre la norma definida en el espacio de fase y la norma usual, se sigue la continuidad.

Entonces por el Teorema de Lax-Milgram:

Para $(F,G,r) \in (H_0^1(0,L) \times H_*^1(0,L) \times H_*^1(0,L))^{-1}$ existe un único $(\varphi,\psi,w) \in H_0^1(0,L) \times H_*^1(0,L) \times H_*^1(0,L)$ verificando

$$a((\varphi,\psi,w),(\overline{\hat{\varphi}},\overline{\hat{\psi}},\overline{\hat{w}})) = ((F,G,r),(\overline{\hat{\varphi}},\overline{\hat{\psi}},\overline{\hat{w}})) \quad \forall\,(\overline{\hat{\varphi}},\overline{\hat{\psi}},\overline{\hat{w}}) \in H_0^1(0,L) \times H_*^1(0,L) \times H_*^1(0,L) \qquad (22)$$

con lo que queda resuelto el sistema (19), (20) y (21).

Por otra parte, haciendo en (22): $(\varphi,\psi,w) = (\overline{\hat{\varphi}},\overline{\hat{\psi}},\overline{\hat{w}})$ se sigue $||A^{-1}|| \leq C$, C constante positiva. Por lo tanto $0 \in \rho(A)$. ■

De la definición dada en (12) resulta que $\psi, w \in H_*^2(0,L)$. Con esto se concluye la regularidad para la solución buscada, esto es,

$$(\varphi,\Phi,\psi,\Psi,w,W) \in \underbrace{H^2(0,L)\cap H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L) \times H_*^2(0,L)\cap H_*^1 \times H_*^1 \times H_*^2(0,L)\cap H_*^1 \times H_*^1(0,L)}_{:=D(A)}$$

De esta forma se han verificado las hipótesis exigidas por del Teorema 2.3, concluyendo que:

Existe un único $U \in C(0,\infty,\mathcal{H}) \cap C(0,\infty,D(A))$ que resuelve el sistema (4)-(6).

Con lo que finaliza la demostración del teorema.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Adams, R. A. Sobolev Spaces. Academic Press, New York, 1975.

[2] Alabau Boussouira Stability to weak dissipative Bresse system. J. Math. Anal. Appl (2010), pp. 1-18

[3] Brezis, H. Análisis Funcional. Teoría y Aplicaciones. Editorial Alianza, 1983.

[4] Dunford, N. Schwartz, J.T. Linear Operators. Interscience Publishers - New York - 1958.

[5] Eberhard, Z. Non Linear Functional Analysis and its Aplications. Springer-Verlag New York Inc, 1990.

[6] J. E. Lagnese, G. Leugering and E. Schmidt. Modelling of dynamic networks of thin thermo elastic beams. Math. Meth. in Appl. Sci. 16 (1993), pp. 327-358.

[7] Z. Liu, B. Rao. Energy decay rate of the thermoelastic Bresse system. Z. Angew. Math. Phys. 60 (2009), pp. 54-69

[8] Z. Liu and S. Zheng. Semigroups Associated with Dissipative Systems. In CRC Research Notes in Mathematics 398. Chapman and Hall. (1999).

[9] J.E. Muñoz Rivera, L. Fatori. Rates of decay to weak thermoelastic Bresse system. IMA J. Appl. Math. (2010) pp. 1-24

[10] Muñoz Rivera, J. E. Estabilizacão de Semigrupos e Aplicacões. Textos Avanzados. LNCC. Petrópolis. (2007).

[11] Muñoz Rivera, J. E. Teoria das Distribuicões e Equacões Diferenciais Parciais. Textos Avanzados-LNCC. Petrópolis. (1999).

[12] A. Pazy. Semigroup of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer-Verlag. New York. 1993.

[13] M. Renardy. On the Type of Certain C_0-Semigrupos, Comunications in Partial Differential. Equations Vol. 18, (7-8), pp. 1299-1307. 1993.

[14] J. A. Soriano, J.E. Muñoz Rivera, L. Fatori. Bresse system with indefinite damping. Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 387, Issue 1, 1 March 2012, pp. 284-290.

[15] Slemrod, M. Global existence, uniqueness and asymptotic stability of classical smooth solutions in one-dimensional non-linear thermoelasticity. Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 76, pp. 97-133. (1981).