PESQUIMAT, Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XVI N°1, pp. 56-63, Lima - Perú, Abril 2014

NÚMERO DE CEROS DE LAS COMPONENTES DE LAS SOLUCIONES DEL SISTEMA ACOPLADO DE FUCIK

Santiago César Rojas Romero[1]

Resumen: En este trabajo mostramos algunas propiedades de las soluciones no tri- viales del sistema acoplado

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ v^+ - \lambda^- v^- & \text{en } \langle 0,1\rangle\,, \\ -v'' = \lambda^+ u^+ - \mu^- u^- & \text{en } \langle 0,1\rangle\,, \\ Bu = Bv = 0 & \text{en } \{0,1\}\,, \end{cases}$$

donde $\lambda^+, \lambda^-, \mu^- \in \mathbb{R}$, $w^+ = max\{w, 0\}$, $w^- = max\{-w, 0\}$ y $Bw = 0$ representa las condiciones de frontera tipo Dirichlet o Neumann.

Concretamente, mostramos que para cualquier solución no trivial (u, v) del problema, se verifica que ambas u y v solo tienen ceros simples, ambas u y v tienen el mismo signo en una vecindad de 0 y de 1, y ambas u y v tienen el mismo número de ceros.

Palabras Clave: Espectro de Fucik, sistema acoplado, soluciones que cambian de signo.

NUMBEROF ZEROS OF THE COMPONENTS OF SOLUTIONS FOR THE FUCIK COUPLED SYSTEM

Abstract: In this work we show some properties of the nontrivial solutions for the coupled system

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ v^+ - \lambda^- v^- & \text{in } \langle 0,1\rangle\,, \\ -v'' = \lambda^+ u^+ - \mu^- u^- & \text{in } \langle 0,1\rangle\,, \\ Bu = Bv = 0 & \text{on } \{0,1\}\,, \end{cases}$$

where $\lambda^+, \lambda^-, \mu^- \in \mathbb{R}$, $w^+ = max\{w, 0\}$, $w^- = max\{-w, 0\}$ and $Bw = 0$ represents the Dirichlet or Newmann type boundary conditions.

Specifically, we show that for every nontrivial solution (u, v) of the pro-blem, it holds that both u and v only have simple zeros, both u and v have the same sign on a neighborhood of 0 and 1, and both u and v have the same number of zeros.

Key words: Fucik spectrum, coupled system, solutions changing sign.

1. Introducción

El sistema acoplado de Fucik es el problema

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ v^+ - \lambda^- v^- & \text{en } \langle 0,1\rangle\,, \\ -v'' = \lambda^+ u^+ - \mu^- u^- & \text{en } \langle 0,1\rangle\,, \\ Bu = Bv = 0 & \text{en } \{0,1\}\,, \end{cases} \tag{1.1}$$

donde $\lambda^+, \lambda^-, \mu^- \in \mathbb{R}$, $w^+ = max\{w, 0\}$, $w^- = max\{-w, 0\}$ y $Bw = 0$ representa las condiciones de frontera tipo Dirichlet o Neumann, y el conjunto

$$\widehat{\Sigma} = \{\, (\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in I\!R^3 \;\;/\;\; \lambda^{\pm}, \mu^- \geq 0 \text{ y } (1.1) \text{ tiene soluciones no triviales} \,\}\,.$$

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: srojasr@unmsm.edu.pe

se denomina Espectro de Fucik.

La existencia de soluciones no triviales para el problema (1.1) queda garantizada por el hecho que $\widehat{\Sigma} \neq \emptyset$, pues $\widehat{\Sigma}$ contiene un conjunto numerable de puntos de la forma $(\lambda_k, \lambda_k, \lambda_k)$, donde $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_k < \ldots$ son los autovalores del operador $-\frac{d^2}{dt^2}$ en $H_0^1(0,1)$ para el caso Dirichlet y en $H^1(0,1)$ para el caso Neumann.

En Rojas [6] mostramos que para cualquier solución no trivial (u,v) de (1.1) se tiene que ambas u y v cambian de signo en $\langle 0,1\rangle$ o ninguna de ellas; y en el caso de no cambiar de signo mostramos que ambas u y v tienen el mismo signo en todo el intervalo $\langle 0,1\rangle$. Más aún, en ese trabajo dimos una completa descripción de la parte del espectro de Fucik correspondiente a este tipo de soluciones, obteniendo que para el problema tipo Dirichlet $\widehat{\Sigma}$ está formado por la unión de un plano y un cilindro hiperbólico, mientras que para el problema tipo Neumann $\widehat{\Sigma}$ está formado por los planos cartesianos.

Ahora, en el presente trabajo, hacemos un estudio de las soluciones no triviales (u,v) de (1.1) considerando el caso en que ambas funciones u y v cambian de signo en $\langle 0,1\rangle$. Nuestro objetivo es hallar alguna relación entre el número de ceros de ambas funciones.

El trabajo está organizado como sigue: en la sección 2 mostramos un lema que nos brinda los resultados principales y en la sección 3 usamos estos resultados para obtener que ambas funciones u y v solo tienen ceros simples y tienen el mismo signo en una vecindad de 0 y de 1 . Más aún, obtenemos que ambas funciones u y v tienen el mismo número de ceros en $[0,1]$.

2. Resultados principales

En esta sección demostramos en detalle el lema que nos brinda los principales resultados para los objetivos del presente trabajo.

Lema 2.1 *Sean* $c, d \in L^\infty(0,1)$ *con* $c, d > 0$ *en casi todo punto, y* (u,v) *una solución no trivial del problema de valor frontera*

$$\begin{cases} -u'' = c(x)v & \text{en } \langle 0,1\rangle\,, \\ -v'' = d(x)u & \text{en } \langle 0,1\rangle\,, \\ Bu = Bv = 0 & \text{en } \{0,1\}\,. \end{cases} \tag{2.1}$$

Entonces para ningún punto $x^* \in [0,1]$ *se cumplen las siguientes desigualdades:*

$$u(x^*) \geq 0\,,\ u'(x^*) \geq 0\,,\ v(x^*) \leq 0\,,\ v'(x^*) \leq 0, \tag{2.2}$$

$$u(x^*) \geq 0\,,\ u'(x^*) \leq 0\,,\ v(x^*) \leq 0\,,\ v'(x^*) \geq 0, \tag{2.3}$$

$$u(x^*) \leq 0\,,\ u'(x^*) \leq 0\,,\ v(x^*) \geq 0\,,\ v'(x^*) \geq 0, \tag{2.4}$$

$$u(x^*) \leq 0\,,\ u'(x^*) \geq 0\,,\ v(x^*) \geq 0\,,\ v'(x^*) \leq 0. \tag{2.5}$$

Además:

- *Para* $\overline{x} \in [0,1]$,

  (A1) si $u(\overline{x}) = 0$ *(o* $v(\overline{x}) = 0$ *) entonces* $u'(\overline{x})\,v'(\overline{x}) > 0$,

  (A2) si $u'(\overline{x}) = 0$ *(o* $v'(\overline{x}) = 0$ *) entonces* $u(\overline{x})\,v(\overline{x}) > 0$;

- *Para* $x_1, x_2 \in [0,1]$, $x_1 < x_2$,

  (B1) si $u'(x_1) = u'(x_2) = 0$ *y* $u'(x) \neq 0$ *para* $x \in \langle x_1, x_2\rangle$ *entonces* $u(x_1)\,u(x_2) < 0$ *, y lo mismo ocurre para* v ;

  (B2) si $u(x_1) = u(x_2) = 0$ *y* $u(x) \neq 0$ *para* $x \in \langle x_1, x_2\rangle$ *entonces* $u'(x_1)\,u'(x_2) < 0$ *, y lo mismo ocurre para* v .

Demostración. Sea (u,v) una solución no trivial de (2.1). La prueba se hará en varias etapas.

1° Observamos que en ningún punto $x^* \in [0,1]$ se cumple

$$u(x^*) = u'(x^*) = v(x^*) = v'(x^*) = 0. \tag{2.6}$$

En efecto, si en algún punto $x^* \in [0,1]$ tuviéramos (2.6), entonces la única solución del PVI

$$\begin{cases} -u'' = c(x)v & \text{en } \langle 0,1\rangle\,, \\ -v'' = d(x)u & \text{en } \langle 0,1\rangle\,, \\ u(x^*) = v(x^*) = u'(x^*) = v'(x^*) = 0 \end{cases}$$

sería $u = v \equiv 0$, pero este no es el caso.

2° Ahora vemos que en ningún punto $x^* \in [0,1]$ se verifican las desigualdades estrictas en (2.2)-(2.5). Para ello usaremos algunas identidades que deducimos a continuación.
Sean $x, x_0 \in [0,1]$. Integrando de x_0 a x las ecuaciones en (2.1), tenemos

$$u'(x) = u'(x_0) - \int_{x_0}^{x} c(\xi_1)v(\xi_1)\,d\xi_1\,, \tag{2.7}$$

$$v'(x) = v'(x_0) - \int_{x_0}^{x} d(\xi_1)u(\xi_1)\,d\xi_1\,. \tag{2.8}$$

Y volviendo a integrar de x_0 a x, tenemos

$$u(x) = u(x_0) + u'(x_0)(x - x_0) - \int_{x_0}^{x} d\xi_1 \int_{x_0}^{\xi_1} c(\xi_2)v(\xi_2)\,d\xi_2\,, \tag{2.9}$$

$$v(x) = v(x_0) + v'(x_0)(x - x_0) - \int_{x_0}^{x} d\xi_1 \int_{x_0}^{\xi_1} d(\xi_2)u(\xi_2)\,d\xi_2\,. \tag{2.10}$$

i) Para ningún $x^* \in \langle 0,1\rangle$ se verifican las desigualdades estrictas en (2.2). Procediendo por contradicción, suponemos que para algún $x^* \in \langle 0,1\rangle$ se verifican las desigualdades

$$u(x^*) > 0\,,\ u'(x^*) > 0\,,\ v(x^*) < 0\,,\ v'(x^*) < 0\,. \tag{2.11}$$

Entonces $u'(x) \neq 0$ y $v'(x) \neq 0$, $\forall x \in \langle x^*, 1\rangle$. En efecto, si esto no ocurriera, tomamos $x_1 > x^*$ como el primer punto donde $u'(x_1) = 0$ o $v'(x_1) = 0$. Así, en el intervalo $\langle x^*, x_1]$ ambas funciones u y v conservarían su signo. Luego, como $c(x), d(x) > 0$, de (2.7) y (2.8) tendríamos

$$u'(x_1) = \underbrace{u'(x^*)}_{>0} - \int_{x^*}^{x_1} \underbrace{c(\xi_1)v(\xi_1)}_{<0}\,d\xi_1 > 0 \quad \text{y}$$

$$v'(x_1) = \underbrace{v'(x^*)}_{<0} - \int_{x^*}^{x_1} \underbrace{d(\xi_1)u(\xi_1)}_{>0}\,d\xi_1 < 0\,,$$

lo cual contradice lo supuesto. Entonces $u'(x) \neq 0$ y $v'(x) \neq 0$, $\forall x \in \langle x^*, 1\rangle$, más aún, teniendo en cuenta (2.11) llegamos a que $u'(x) > 0$ y $v'(x) < 0$, $\forall x \in \langle x^*, 1\rangle$, lo cual nos da que u es estrictamente creciente y v es estrictamente decreciente en $\langle x^*, 1\rangle$. Por tanto u y v no podrían satisfacer las condiciones de frontera en 1, y esto es una contradicción.
Aquí observamos que la prueba desarrollada sigue siendo válida para el caso en que $u(x^*) = 0$ o $v(x^*) = 0$ o ambos inclusive; en particular observamos que para el problema tipo Dirichlet no se verifica (2.2) en $x^* = 0$ ni en $x^* = 1$.

ii) Para ningún $x^* \in \langle 0,1\rangle$ se verifican las desigualdades estrictas en (2.3). El argumento de la prueba es similar al caso anterior. Procediendo por contradicción, suponemos existe $x^* \in \langle 0,1\rangle$ para el cual se verifican las desigualdades

$$u(x^*) > 0\,,\ u'(x^*) < 0\,,\ v(x^*) < 0\,,\ v'(x^*) > 0\,. \tag{2.12}$$

Entonces $u'(x) \neq 0$ y $v'(x) \neq 0$, $\forall x \in \langle 0, x^* \rangle$. Pues si ocurriera lo contrario, elegimos $x_2 < x^*$ como el mayor punto tal que $u'(x_2) = 0$ o $v'(x_2) = 0$.
Se observa que u y v mantienen su signo en el intervalo $[x_2, x^* \rangle$. Entonces, como $c(x), d(x) > 0$, de (2.7) y (2.8) tenemos

$$u'(x_2) = \underbrace{u'(x^*)}_{<0} + \int_{x_2}^{x^*} \underbrace{c(\xi_1)v(\xi_1)}_{<0} \, d\xi_1 < 0 \quad \text{y}$$

$$v'(x_2) = \underbrace{v'(x^*)}_{>0} + \int_{x_2}^{x^*} \underbrace{d(\xi_1)u(\xi_1)}_{>0} \, d\xi_1 > 0 \, ,$$

lo cual contradice lo supuesto. Luego $u'(x) \neq 0$ y $v'(x) \neq 0, \forall x \in \langle 0, x^* \rangle$, más aún $u'(x) < 0$ y $v'(x) > 0, \forall x \in \langle 0, x^* \rangle$, es decir, u es estrictamente decreciente y v es estrictamente creciente en $\langle 0, x^* \rangle$. Por tanto u y v no podrían satisfacer las condiciones de frontera en 0, y esto es una contradicción.
También aquí observamos que la prueba desarrollada sigue siendo válida para el caso en que $u(x^*) = 0$ o $v(x^*) = 0$ o ambos inclusive; en particular observamos que para el problema tipo Dirichlet no se verifica (2.3) en $x^* = 0$ ni en $x^* = 1$.

iii) No se verifica (2.2) aún cuando sólo una de las desigualdades es estricta. En efecto, sea $u(x^*) = 0$. Entonces

$$u'(x^*) = \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{u(x^* + h)}{h}$$

y por la continuidad de u' existe una vecindad a la derecha de x^* en la cual u y u' tienen el mismo signo. Análogamente, si $v(x^*) = 0$, existe una vecindad a la derecha de x^* en la cual v y v' tienen el mismo signo.
Si $u'(x^*) = 0$, entonces por (2.7) tenemos que

$$u'(x) = \underbrace{u'(x^*)}_{=0} - \int_{x^*}^{x} c(\xi_1)v(\xi_1) \, d\xi_1$$

y observamos que existe una vecindad a la derecha de x^* en la cual u' tiene signo opuesto al de v . Análogamente, si $v'(x^*) = 0$, entonces existe una vecindad a la derecha de x^* en la cual v' y u tienen signos opuestos. Así, si $u(x^*) > 0$, $u'(x^*) = v(x^*) = v'(x^*) = 0$, tomando la intersección de todas las vecindades tenemos que $u > 0$, $v' < 0$, $v < 0$ y $u' > 0$. También, si $u(x^*) = 0$, $u'(x^*) > 0$, $v(x^*) = v'(x^*) = 0$, tomando la intersección de todas las vecindades tenemos que $u > 0$, $u' > 0$, $v' < 0$ y $v < 0$. Los otros casos son análogos. Pero ya hemos demostrado que no se verifican las desigualdades estrictas en (2.2).

iv) No se verifica (2.3) aún cuando sólo una de las desigualdades es estricta. La prueba es análoga a iii) considerando vecindades a la izquierda de x^* .

v) Con lo ya demostrado e intercambiando los roles de las funciones u y v , también tenemos que para ningún $x^* \in \langle 0, 1 \rangle$ se verifican las desigualdades estrictas en (2.4) ni las desigualdades estrictas en (2.5). Asimismo, tenemos que tampoco se verifican (2.4) y (2.5) aún cuando en ellas sólo una de las desigualdades es estricta.

vi) Ahora observamos que para el problema tipo Dirichlet, (2.5) y (2.2) así como (2.4) y (2.3) son equivalentes para $x^* = 0$ y para $x^* = 1$. Luego, por las observaciones al final de i) y ii), tampoco se verifican (2.4) y (2.5) en 0 y 1 . Finalmente, para el problema tipo Neumann, notamos que (2.3) es equivalente a (2.2) y que (2.5) es equivalente a (2.4) en $x^* = 0$ y en $x^* = 1$, y también para este caso, de iii), iv) y v), tenemos que las desigualdades (2.2)-(2.5) no se verifican en 0 y 1 .
Con esto tenemos completa la prueba de la primera parte del lema.

3° Ahora probamos (A1)
Sea $u(\overline{x}) = 0$:

i) Si $v(\overline{x}) \leq 0$: de (2.2) y (2.3) vemos que $u'(\overline{x}) \neq 0$, pues en caso contrario tendríamos que $\overline{x}$ satisface (2.2) o (2.3) para cualquier valor de $v'(\overline{x})$, lo cual es una contradicción. Así tenemos que $u'(\overline{x}) > 0$ o $u'(\overline{x}) < 0$. Si $u'(\overline{x}) > 0$, dado que no se verifica (2.2), tenemos que $v'(\overline{x}) > 0$. Y si $u'(\overline{x}) < 0$, debido a que no se verifica (2.3), tenemos que $v'(\overline{x}) < 0$. En cualquier caso concluimos que $u'(\overline{x})\, v'(\overline{x}) > 0$.

ii) Si $v(\overline{x}) \geq 0$: de (2.4) y (2.5) se observa que $u'(\overline{x}) \neq 0$, pues si $u'(\overline{x}) = 0$ tendríamos que $\overline{x}$ satisface (2.4) o (2.5) para cualquier valor de $v'(\overline{x})$, y eso es una contradicción. Ahora, si $u'(\overline{x}) > 0$, como no se verifica (2.5), tenemos que $v'(\overline{x}) > 0$. Y si $u'(\overline{x}) < 0$, al no verificarse (2.4), tenemos que $v'(\overline{x}) < 0$. Por tanto, en cualquier caso tenemos $u'(\overline{x})\, v'(\overline{x}) > 0$.

El argumento de la prueba es análogo para $v(\overline{x}) = 0$.

4° Veamos (A2)
Sea $u'(\overline{x}) = 0$:

i) Si $v'(\overline{x}) \leq 0$: de (2.2) y (2.5) concluimos que $u(\overline{x}) \neq 0$. Si fuera $u(\overline{x}) = 0$ tendríamos que $\overline{x}$ verifica (2.2) o (2.5) para todo valor de $v(\overline{x})$, lo cual es una contradicción. Entonces $u(\overline{x}) > 0$ o $u(\overline{x}) < 0$. Si $u(\overline{x}) > 0$, al no verificarse (2.2), tenemos que $v(\overline{x}) > 0$. Y si $u(\overline{x}) < 0$, como no se verifica (2.5), tenemos que $v(\overline{x}) < 0$. Luego, en ambos casos concluimos que $u(\overline{x})\, v(\overline{x}) > 0$.

ii) Si $v'(\overline{x}) \geq 0$: usando (2.3) y (2.4), también tenemos a $u(\overline{x})\, v(\overline{x}) > 0$.

La prueba es análoga si $v'(\overline{x}) = 0$.

5° Ahora veamos (B1)
Recordemos que por hipótesis tenemos para $x_1, x_2 \in [0,1]$, $x_1 < x_2$, $u'(x_1) = u'(x_2) = 0$ y $u'(x) \neq 0$ para $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$.
Por (A2) tenemos que $u(x_1)\, v(x_1) > 0$ y $u(x_2)\, v(x_2) > 0$, en particular $v(x_1) \neq 0 \neq v(x_2)$.
Luego, por (2.7)

$$0 = u'(x_2) = -\int_{x_1}^{x_2} c(\xi_1) v(\xi_1)\, d\xi_1 ,$$

lo cual implica que v cambia de signo en $\langle x_1, x_2 \rangle$. Si v cambiara de signo sólo una vez tendríamos que $v(x_1)\, v(x_2) < 0$ y luego por (A2) se concluiría que $u(x_1)\, u(x_2) < 0$. En efecto, vamos a demostrar que v sólo cambia de signo una vez en $\langle x_1, x_2 \rangle$ y con ello terminamos la prueba de (B1).
Antes de seguir con la prueba, observamos que u no puede tener más de un cero en $\langle x_1, x_2 \rangle$, pues en caso contrario existiría también un punto $\overline{x} \in \langle x_1, x_2 \rangle$ tal que $u'(\overline{x}) = 0$, lo cual sería una contradicción con la hipótesis. Ahora, supongamos que v cambia de signo más de una vez en $\langle x_1, x_2 \rangle$. Afirmamos que existe un intervalo $[x_3, x_4] \subset \langle x_1, x_2 \rangle$ tal que $u\,v < 0$ en $\langle x_3, x_4 \rangle$ y $v(x_3) = v(x_4) = 0$. En efecto, tenemos dos situaciones:

1) Cuando u no tiene ceros en $\langle x_1, x_2 \rangle$.
Al ser $u\,v > 0$ en x_1 y x_2, v cambiaría de signo un número par de veces, es decir v tendría un número par de ceros en $\langle x_1, x_2 \rangle$. La afirmación se verifica haciendo x_3 y x_4 los dos primeros ceros de v en $\langle x_1, x_2 \rangle$.

2) Cuando u tiene un cero en $\langle x_1, x_2 \rangle$, digamos r.
Al ser $u\,v > 0$ en x_1 y x_2, v cambiaría de signo un número impar $n \geq 3$ de veces, es decir v tendría un número impar $n \geq 3$ de ceros en $\langle x_1, x_2 \rangle$. Aquí tenemos los siguientes casos:

   i) El intervalo $\langle x_1, r \rangle$ contiene un número par de ceros de v. En este caso hacemos x_3 y x_4 los dos primeros ceros de v en $\langle x_1, x_2 \rangle$ y se verifica la afirmación.

   ii) El intervalo $\langle x_1, r \rangle$ contiene un número impar de ceros de v. Observamos que en este intervalo v cambia de signo un número impar de veces mientras que u mantiene su signo inicial. Entonces la afirmación es válida haciendo x_3 y x_4 los dos primeros ceros de v en $\langle r, x_2 \rangle$.

   iii) Todos los ceros de v en $\langle x_1, x_2 \rangle$ están en el intervalo $\langle x_1, r \rangle$. En este caso hacemos x_3 y x_4 los dos primeros ceros de v y se cumple la afirmación.

iv) Todos los ceros de v en $\langle x_1, x_2 \rangle$ están en el intervalo $\langle r, x_2 \rangle$. Aquí, haciendo x_3 y x_4 los dos últimos ceros de v en $\langle x_1, x_2 \rangle$ se verifica la afirmación.

Así, en todos los casos tenemos que si v cambiara de signo más de una vez en $\langle x_1, x_2 \rangle$, entonces existiría un intervalo $[x_3, x_4] \subset \langle x_1, x_2 \rangle$ tal que $uv < 0$ en $\langle x_3, x_4 \rangle$ y $v(x_3) = v(x_4) = 0$. En consecuencia, existiría un punto $\overline{x} \in \langle x_3, x_4 \rangle$ tal que $v'(\overline{x}) = 0$ y $u(\overline{x})\, v(\overline{x}) < 0$, pero esto contradice (A2). Por tanto, v sólo cambia de signo una vez en $\langle x_1, x_2 \rangle$ y , como ya fue visto, esto implica que $u(x_1)\, u(x_2) < 0$.

6° Finalmente, veamos (B2)
Por hipótesis tenemos que $x_1, x_2 \in [0,1]$, $x_1 < x_2$, $u(x_1) = u(x_2) = 0$ y $u(x) \neq 0$ para $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$. Por (A1) sabemos que los ceros de u son simples, y como $u(x_1) = 0 = u(x_2)$, entonces u y u' tienen el mismo signo en una vecindad a la derecha de x_1, y en una vecindad a la izquierda de x_2. Luego $u'(x_1)u'(x_2) < 0$, y con esto tenemos todo el lema demostrado.

■

3. Propiedades sobre el número de ceros de las soluciones del sistema acoplado de Fucik

Aquí mostramos dos resultados que nos brindan importantes propiedades sobre el número de ceros de las funciones u y v, siendo el par (u, v) una solución no trivial del problema (1.1).

Proposición 3.1 *Si* $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}$ *y* (u, v) *es la correspondiente solución no trivial del problema (1.1), entonces para* (u, v) *se tienen las mismas conclusiones que el lema anterior; en particular* u *y* v *solo tienen ceros simples y ambas tienen el mismo signo en una vecindad de* 0 *y de* 1.

Demostración.
Sea $\mathcal{X}_A(x)$ la función característica. Observamos que

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{\{f \geq 0\}}(x)\, f(x) &= \begin{cases} 0, & f(x) < 0 \\ f(x), & f(x) \geq 0 \end{cases} \\ &= f^+(x) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{\{f < 0\}}(x)\, f(x) &= \begin{cases} f(x), & f(x) < 0 \\ 0, & f(x) \geq 0 \end{cases} \\ &= -f^-(x). \end{aligned}$$

Luego, si (u, v) es solución del problema (1.1), entonces

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ v^+ - \lambda^- v^- = [\lambda^+ \mathcal{X}_{\{v \geq 0\}} + \lambda^- \mathcal{X}_{\{v < 0\}}]\, v & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ -v'' = \lambda^+ u^+ - \mu^- u^- = [\lambda^+ \mathcal{X}_{\{u \geq 0\}} + \mu^- \mathcal{X}_{\{u < 0\}}]\, u & \text{en } \langle 0, 1 \rangle, \\ Bu = Bv = 0 \quad \text{en } \{0, 1\}. \end{cases}$$

Así, (u, v) es solución del problema (2.1) con

$$c(x) = \lambda^+ \mathcal{X}_{\{v \geq 0\}}(x) + \lambda^- \mathcal{X}_{\{v < 0\}}(x) > 0,$$
$$d(x) = \lambda^+ \mathcal{X}_{\{u \geq 0\}}(x) + \mu^- \mathcal{X}_{\{u < 0\}}(x) > 0$$

y se verifican todas las hipótesis del lema anterior. Por lo tanto, para (u, v) tenemos que se cumplen todas las conclusiones del lema 2.1.
En particular, (A1) implica que los ceros de u y v son simples, pues si $u(\overline{x}) = 0$ o $v(\overline{x}) = 0$

entonces $u'(\overline{x}) \neq 0$ y $v'(\overline{x}) \neq 0$. También, para el caso Dirichlet, al ser $u(0) = v(0) = 0$, tenemos que $u'(0)v'(0) > 0$ con lo cual u' y v' tienen el mismo signo en una vecindad B_{ε_1} a la derecha de 0. Pero

$$u'(0) = \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{u(0+h)}{h} \quad \text{y} \quad v'(0) = \lim_{k \longrightarrow 0^+} \frac{v(0+k)}{k}$$

entonces u' y u, así como v' y v tienen el mismo signo en vecindades B_{ε_2} y B_{ε_3} a la derecha de 0, respectivamente. Luego, u y v tienen el mismo signo en la vecindad B_ε $(\varepsilon = min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\})$. En forma similar tenemos, para el caso Dirichlet, que u y v tienen el mismo signo en una vecindad a la izquierda de 1.

Para el caso Neumann, al ser $u'(0) = v'(0) = 0$ y $u'(1) = v'(1) = 0$, (A2) implica que $u(0)v(0) > 0$ y $u(1)v(1) > 0$, y de ahí que u y v tienen el mismo signo en una vecindad a la derecha de 0 y en una vecindad a la izquierda de 1. ■

Finalmente, tenemos el siguiente resultado

Proposición 3.2 *Si $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}$ y (u, v) es la correspondiente solución no trivial del problema (1.1), siendo u y v funciones que cambian de signo, entonces u y v tienen el mismo número de ceros (simples).*

Demostración. La prueba se hará en varias etapas.

1° Sea x_1 el primer punto estacionario de u, es decir $u'(x_1) = 0$. Para el caso Neumann tenemos que $x_1 = 0$; Para el caso Dirichlet vemos que no hay ceros de u ni de v en $\langle 0, x_1]$. En efecto, por (A1) del lema 2.1, $u'(0)v'(0) > 0$ y notamos que u y u' mantienen su signo en $\langle 0, x_1 \rangle$. Si v tuviera un cero $\overline{x} \in \langle 0, x_1]$, también tendría un punto estacionario $\overline{y} \in \langle 0, \overline{x} \rangle$. Entonces $v'(0)v'(\overline{x}) \leq 0$ y como u' mantiene su signo en $\langle 0, x_1 \rangle$ tenemos que $u'(0)u'(\overline{x}) \geq 0$. Pero al ser $u'(0)v'(0) > 0$, tendríamos que $u'(\overline{x})v'(\overline{x}) \leq 0$, contradiciendo (A1).

2° Sea x_2 el segundo punto estacionario de u. Como $u'(x_1) = u'(x_2) = 0$, (B1) implica que $u(x_1)\,u(x_2) < 0$ y entonces u tiene exactamente un cero $x_u \in \langle x_1, x_2 \rangle$. Afirmamos que v también tiene un único cero en $[x_1, x_2]$. En efecto:

a) Si v tuviera un número par de ceros en $[x_1, x_2]$, v cambiaría de signo un número par de veces en $[x_1, x_2]$ y tendríamos $v(x_1)\,v(x_2) \geq 0$. Pero por (A2) tenemos que $u(x_1)\,v(x_1) > 0$ y $u(x_2)\,v(x_2) > 0$, y como $u(x_1)\,u(x_2) < 0$, concluímos que $v(x_1)\,v(x_2) < 0$. Entonces v no tiene un número par de ceros en $[x_1, x_2]$.

b) Si v tuviera tres o más ceros en $[x_1, x_2]$, también tendría al menos dos puntos estacionarios y_1 e y_2.

i) Si $y_1, y_2 \in \langle x_1, x_u]$ o $y_1, y_2 \in [x_u, x_2 \rangle$, entonces $u(y_1)\,v(y_1) \leq 0$ y $u(y_2)\,v(y_2) \geq 0$ o $u(y_1)\,v(y_1) \geq 0$ y $u(y_2)\,v(y_2) \leq 0$.

ii) Si $y_1 \in \langle x_1, x_u]$, $y_2 \in [x_u, x_2 \rangle$, entonces $u(y_1)\,v(y_1) \leq 0$ y $u(y_2)\,v(y_2) \geq 0$.

De i) y ii) se concluye que en alguno de los puntos estacionarios resulta $uv \leq 0$, contradiciendo (A2).

3° Con el mismo argumento de b) se demuestra que en todos los intervalos entre dos puntos estacionarios de u, u y v tienen exactamente un cero.

4° Finalmente, para x_n el último punto estacionario de u, vemos que no hay ceros de u ni de v en $[x_n, 1\rangle$. En efecto, u y u' mantienen su signo en $\langle x_n, 1 \rangle$. Por (A1) del lema 2.1, tenemos que $u'(1)v'(1) > 0$. Si v tuviera un cero $\overline{x} \in \langle x_n, 1 \rangle$, también tendría un punto estacionario $\overline{y} \in \langle \overline{x}, 1 \rangle$. Entonces $v'(\overline{x})v'(1) \leq 0$ y como u' mantiene su signo en $\langle x_n, 1 \rangle$ tenemos que $u'(\overline{x})u'(1) \geq 0$. Pero como $u'(1)v'(1) > 0$, tendríamos que $u'(\overline{x})v'(\overline{x}) \leq 0$, lo cual contradice (A1).

■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Campos J. y Dancer E. N. *On the resonance set in a fourth-order equation with jumping nonlinearity.* Differential Integral Equations 14(3) (2001), 257-272.

[2] Fucik S. *Boundary value problem with jumping nonlinearities.* Casopis Pest. Mat 101 (1) (1976), 69-87.

[3] Fucik S. *Solvability of Nonlinear Equations and Boundary Value Problems.* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1980.

[4] Massa E. *On a variational characterization of the Fucik Spectrum of the Laplacian and a superlinear Sturm-Liouville equation.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect A 134(3) (2004), 557-577.

[5] Massa E. *On the Fucik Spectrum and superlinear elliptic equations.* PhD. Thesis, Universitá degli Studi di Milano, Italy) (2003).

[6] Rojas S. *El Espectro de Fucik para un sistema acoplado con soluciones que no cambian de signo.* Pesquimat, revista de investigación de la Fac. Ciencias Mat. UNMSM Vol XV, no. 2 (2012), 61-69.