PESQUIMAT, Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XVI N°1, pp. 73-85, Lima - Perú, Abril 2014

SINGULARIDAD DE CURVAS ALGEBROIDES PLANAS LA (A)-EQUIVALENCIA

Frank Collantes[1], *Marlo Carranza*[2].

Resumen: En este trabajo vamos a exponer resultados importantes sobre la teoría de las curvas planas irreducibles, vitales para desarrollar investigación sobre la teoría de singularidades de curvas algebroides planas ya sea esta representada en forma de Weierstrass o en serie de potencias formales.
Palabras clave: Curvas algebroides planas, transformada cuadrática, (a)-equivalencia, contacto maximal, género de una curva.

Abstract: In this paper we present important results on the theory of irreducible plane curves, vital to develop research on the theory of singularities of plane curves algebroids is represented either in the form of Weierstrass or formal power series.
Key Words: Algebroids planar curves, quadratic transformation, (a)-equivalence, maximal contact, a genus curve.

1. Introducción

En este trabajo estudiamos las curvas algebroides planas singulares e introducimos las transformadas cuadráticas que desingularizan una curva singular.Damos tres definiciones de equivalencia de curva algebroides planas singulares, para luego dar el teorema principal, la equivalencia de estas tres definiciones debido a Oscar Zariski.

2. Equivalencia de curvas planas

Estudiaremos la definición de equivalencia de singularidades de curvas planas reducibles, en $K[[X,Y]]$ donde K es de característica cero y probaremos que ellas son equivalentes.

2.1. Curvas Algebroides Planas

Los conceptos básicos de esta sección, particularmente las curvas algebroides planas se encuentran en [1]

Definición 2.1 Dada una curva reducible cualquiera

$$f = f_1 f_2 \cdots f_h$$

llamamos a los f_i como las *componentes irreducibles o ramos* de (f) . Al escribir (f) en series de potencias

$$f = F_n(X,Y) + F_{n+1}(X,Y) + \cdots$$

el polinomio homogéneo F_n es llamado *la forma inicial* de (f)

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: frank1400113@hotmail.com
[2]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: marlocpx5@hotmail.com

Si $F_{i,n}$ representa la forma inicial del ramo (f_i), se sigue por el lema de la unitangente que se encuentra en [3] capítulo 3 que

$$F_{i,n_i} = (a_iX + b_iY)^{n_i} \tag{1}$$

Definición 2.2 Cada recta

$$l_i : (a_iX + b_iY)$$

es llamada la *recta tangente a la curva algebroide plana irreducible* (f_i). Note que $\text{dir}(f_i) = n_i$. Sigue que la forma inicial de (f) es

$$F_n(X,Y) = \prod_{i=1}^{n} F_{i,n}(X,Y) = \prod_{i=1}^{n}(a_iX + b_iY)^{n_i}$$

El conjunto de rectas tangentes $l_i : (a_ix + b_iY)$ donde $i = 1, \ldots, h$ es llamado *cono tangente de la curva* (f)

De (1), consideremos las rectas tangentes de (f)

$$p_\nu : \ \ Y - \alpha_\nu X = 0, \ \ \nu = 1, \ldots, t$$

Donde el conjunto

$$I_\nu = \{i, \ 1 \leq i \leq h \ / - \frac{a_i}{b_i} = \alpha_\nu\}$$

está formado por los índices asociados a la recta tangente p_ν

Definición 2.3 Los ramos de (f) teniendo a p_ν como recta tangente será llamada *la componente tangencial* de (f) y denotamos

$$(\mathbf{F}_\nu) = \bigcup_{i \in I_\nu}(f_i)$$

Cuya ecuación asociada es

$$\mathbf{F}_\nu(X,Y) = \prod_{i \in I_\nu} f_i(X,Y) = \mathbf{F}_{\nu,s_\nu}(X,Y) + \mathbf{F}_{\nu,s_\nu+1}(X,Y) + \cdots \tag{2}$$

donde $s_\nu = \text{dir}(\mathbf{F}_\nu)$ y $\mathbf{F}_{\nu,s_\nu}$ es la forma inicial de la componente tangencial.

Luego la curva (f) puede ser representada

$$(f) = \bigcup_{\nu=1}^{t}(\mathbf{F}_\nu)$$

y su ecuación asociada es

$$f(X,Y) = \prod_{\nu=1}^{t} \mathbf{F}_\nu(X,Y)$$

La ecuación de los ramos irreducibles de F_ν es

$$f_i(X,Y) = F_{i,n_i}(X,Y) + F_{i,n_i+1}(X,Y) + \cdots, \ \ i \in I_\nu \tag{3}$$

con $n_i = \text{dir}(f_i)$. De (1) podemos expresar $F_{i,n_i}(X,Y) = (Y - \alpha_\nu X)^{n_i}$ para $i \in I_\nu$.

2.2. La transformada cuadrática

Definición 2.4 Una transformada cuadrática de $K[[X,Y]]$ en $K[[X_1,Y_1]]$ es un homomorfismo de K-álgebras definido

$$\begin{array}{rlcl} \sigma: & K[[X,Y]] & \to & K[[X_1,Y_1]] \\ & X & \to & X_1 \\ & Y & \to & X_1Y_1 \end{array}$$

Aplicando la transformada cuadrática a (f_i) de (3) se tiene que

$$\begin{aligned} \sigma(f_i(X,Y)) &= F_{i,n_i}(X_1,X_1Y_1)+F_{i,n_i+1}(X_1,X_1Y_1)+\cdots \\ &= (X_1Y_1-\alpha_\nu X_1)^{n_i}+F_{i,n_i+1}(X_1,X_1Y_1)+\cdots \\ &= X_1^{n_i}[(y_1-\alpha_\nu)^{n_i}+X_1F_{i,n_i+1}(1,Y_1)+\cdots] \end{aligned}$$

Definimos

$$\sigma_P^*(f)=f_i^{(1)}(X_1,Y_1)=(Y_1-\alpha_\nu)^{n_i}+X_1F_{i,n_i+1}(1,Y_1)+\cdots \tag{4}$$

como la *transformada estricta o explosión* de (f_i) cuyo nuevo origen de coordenadas es $P_\nu^{(1)}(0,\alpha_\nu)$

Aplicamos la transformada cuadrática a la ecuación (2) obtenemos

$$\sigma^*(\mathbf{F}_\nu)=\mathbf{F}_\nu^{(1)}(X_1,Y_1)=\prod_{i\in I_\nu} f_i^{(1)}(X_1,Y_1)=(Y_1-\alpha_\nu)^{s_\nu}+X_1\mathbf{F}_{\nu,s_\nu+1}(1,Y_1)+\cdots$$

cuyas ramas irreducibles son $(f_i^{(1)})$ con $i\in I_\nu$

Consecuentemente la ecuación de $(f^{(1)})$ esta dada por

$$\sigma^*(f)=f^{(1)}(X_1,Y_1)=\prod_{\nu=1}^{t}\mathbf{F}_\nu^{(1)}(X_1,Y_1) \tag{5}$$

Definición 2.5 En las condiciones de la ecuación (5) los $(\mathbf{F}_1^{(1)}),(\mathbf{F}_2^{(1)}),\cdots,(\mathbf{F}_t^{(1)})$ son llamados *componentes conectadas* de $\mathbf{F}^{(1)}$ con orígenes de coordenadas los puntos $P_1^{(1)},P_2^{(1)},\cdots,P_t^{(1)}$ respectivamente.

Observación 2.1 Si hacemos un cambio de coordenadas a la componente irreducible $f_i^{(1)}(x_1,Y_1)$ de la ecuación (4) en el origen de coordenadas $P_\nu(0,\alpha_\nu)$ así, $X_2=X_1$ y $Y_2=Y_1-\alpha_\nu$ obtenemos una curva con origen de coordenadas $P_{\nu,2}(0,0)$. Luego si $E^{(1)}: X_2=0$ es el *divisor excepcional*, vea [1] Capítulo 5, el índice de intersección de esta nueva curva con el divisor excepcional esta dado por

$$I(f_i^{(1)},E^{(1)})=I(f^{(1)},X_2)=I(Y_2^{n_1},X_2)=n_1=\mathrm{dir}_P f_i \tag{6}$$

Definición 2.6 Sean $f=f_1f_2\dots f_h$ y $g=g_1g_2\dots g_h$ con origen P y Q respectivamente. Un mapeo uno a uno $\Pi:(f)\to(g)$ es llamado un *pareado tangencialmente estable*, si para los ramos (f_i) y (f_j) de (f), los correspondientes ramos $\Pi(f_i)$ y $\Pi(f_j)$ de (g) tienen la misma tangente, si solo si, (f_i) y (f_j) tiene la misma tangente.

Si el pareado Π es tangencialmente estable , entonces (f) y (g) tiene el mismo número t de distintas rectas tangentes y Π induce un mapeo uno a uno del conjunto $\{p_1,p_2,\dots,p_t\}$ de rectas tangentes de (f), sobre el conjunto $\{q_1,q_2,\dots,q_t\}$ de rectas tangentes de (g).
Indexamos a las rectas tangentes p_ν y q_ν las correspondientes componentes tangenciales $(\mathbf{F}_\nu)$ y $(\mathbf{G}_\nu)$ de las curvas (f) y (g) respectivamente, entonces Π induce un mapeo uno a uno

$$\Pi_\nu:(\mathbf{F}_\nu)\to(\mathbf{G}_\nu)\mathrm{para}\nu=1,2,\dots,t$$

Las explosiones σ_P^* y σ_Q^* actúan sobre (f), (g) y sus componentes tangenciales,

$$\begin{array}{ll} (f^{(1)}) = \sigma_P^*((f)), & (\mathbf{F}_\nu^{(1)}) = \sigma_P^*(\mathbf{F}_\nu) \\ (g^{(1)}) = \sigma_Q^*((g)), & (\mathbf{G}_\nu^{(1)}) = \sigma_Q^*(\mathbf{G}_\nu) \end{array}$$

Luego Π_ν induce un mapeo uno a uno

$$\Pi_\nu^{(1)} : (\mathbf{F}_\nu^{(1)}) \to (\mathbf{G}_\nu^{(1)})$$

Observación 2.2 Si el centro de coordenadas P es un punto singular, esto es $\mathrm{dir}_P(f) > 1$, entonces se puede resolver la singularidad de (f) en P, por medio de una sucesión finita de explosiones vea [1] Teorema 5.5 esto es, dada la resolución canónica

$$\{(f), (f^{(1)}), \ldots, (f^{(i)}), \ldots\}$$

tal que para cada i, $(f^{(i+1)}) = \sigma^*_{P^{(i)}}(f^{(i)})$, existe un entero N tal que las explosiones, $(f^{(i)})$ son regulares si $i \geq N$, denotamos por $\omega(f)$ el menor entero N con esta propiedad. Si $\omega(f) = 0$ la curva f es regular.

2.3. La (a)-equivalencia

Ahora procederemos a dar nuestra primera definición de equivalencia de curvas algebraicas planas.

Definición 2.7 Sea el pareado $\Pi : (f) \to (g)$ entre los ramos de (f) y los ramos de (g), donde ellos tienen el mismo número h de ramos. Si P el origen de coordenadas es un punto simple de (f), esto es $\mathrm{dir}_P(f) = 1$, sigue que (f) es regular, entonces (f) tiene un solo ramo, y además (g) también tiene un solo ramo. Luego Π es una *(a)-equivalencia* , si su origen de coordenadas de (g) es un punto simple y (g) es regular.

Definición 2.8 Una (a)-equivalencia $\Pi : (f) \to (g)$ es un pareado entre los ramos de (f) y los ramos de (g) teniendo los siguientes propiedades:

1. Π es tangencialmente estable.
2. Si $g_i = \Pi(f_i)$, para $i = 1, 2 \ldots, h$ entonces $\mathrm{dir}_P(f_i) = \mathrm{dir}_Q(g_i)$.
3. El pareado $\Pi_\nu^{(1)} : (\mathbf{F}_\nu^{(1)}) \to (\mathbf{G}_\nu^{(1)})$ para $\nu = 1, 2, \ldots, t$ es una (a)-equivalencia.

Ejemplo 1.

Sean (f) y (g) dos curvas reducibles, a decir

$$\begin{array}{ll} (f) : f(X,Y) = & (Y^2 - X^5)(Y^3 - X^5) \\ (g) : g(X,Y) = & ((Y - X^2)^2 - X^5)(Y^3 - X^5) \end{array}$$

verificaremos que son (a)-equivalentes.

En efecto sea $\Pi : (f) \to (g)$ un pareado entre los ramos de (f) y los ramos de (g) Llamemos

$$\begin{array}{lll} (\mathbf{F}_1) : f_1(X,Y) = & (Y^2 - X^5), & f_2(X,Y) = (Y^3 - X^5) \\ (\mathbf{G}_1) : g_1(X,Y) = & (Y - X^2)^2 - X^5, & g_2(X,Y) = (Y^3 - X^5) \end{array}$$

Se tiene que $(\mathbf{F}_1)$ y $(\mathbf{G}_1)$ tienen la misma recta tangente horizontal (Y), luego ellas son tangencialmente estables.

Además $\Pi(f_1) = (g_1)$ y $\Pi(f_2) = (g_2)$ luego

$$\begin{array}{l} \mathrm{dir}(f_1) = \mathrm{dir}(g_1) = 2 \\ \mathrm{dir}(f_2) = \mathrm{dir}(g_2) = 3 \end{array}$$

la condición ii) está cumplida.
Sea ahora

$$\Pi_1^{(1)} : (\mathbf{F}_1^{(1)}) \to (\mathbf{G}_1^{(1)})$$

donde

$$\begin{array}{ll} (\mathbf{F}_1^{(1)}) : f_1^{(1)}(X,Y) = \quad (Y^2 - X^3), & f_2^{(1)}(X,Y) = (Y^3 - X^2) \\ (\mathbf{G}_1^{(1)}) : g_1^{(1)}(X,Y) = \quad (Y - X)^2 - X^3, & g_2^{(1)}(X,Y) = (Y^3 - X^2) \end{array}$$

Luego $(\mathbf{F}_1^{(1)})$ y $(\mathbf{G}_1^{(1)})$ tienen tangentes las rectas (X) y (Y), por tanto ellos son tangencialmente estables.
Además si denotamos $(\mathbf{F}_{11}^{(1)}) = (f_1^{(1)})$, $(\mathbf{F}_{12}^{(1)}) = (f_2^{(1)})$, $(\mathbf{G}_{11}^{(1)}) = (g_1^{(1)})$ y $(\mathbf{F}_{12}^{(1)}) = (g_2^{(1)})$, luego

$$\begin{array}{c} \mathrm{dir}(f_1^{(1)}) = \mathrm{dir}(g_1^{(1)}) = 2 \\ \mathrm{dir}(f_2^{(1)}) = \mathrm{dir}(g_2^{(1)}) = 2. \end{array}$$

Tenemos

$$\Pi_{11}^{(2)} : (\mathbf{F}_{11}^{(2)}) \to (\mathbf{G}_{11}^{(2)})$$

que es obviamente tangencialmente estable, además $\mathrm{dir}(f_1^{(2)}) = \mathrm{dir}(g_1^{(2)}) = 1$. Sigue que $\mathbf{F}_{11}^{(2)}$ y $\mathbf{G}_{11}^{(2)}$ son regulares y consecuentemente son (a)-equivalentes. También

$$\Pi_{12}^{(2)} : (\mathbf{F}_{12}^{(2)}) \to (\mathbf{G}_{12}^{(2)}),$$

que es obviamente tangencialmente estable, además $\mathrm{dir}(f_2^{(2)}) = \mathrm{dir}(g_2^{(2)}) = 1$. se tiene de aquí que $\mathbf{F}_{12}^{(2)}$ y $\mathbf{G}_{12}^{(2)}$ son regulares y luego son (a)-equivalentes. Consecuentemente $\Pi_1^{(1)}$ y Π son una (a)-equivalencia.
Sea $E^{(1)} : X_1 = 0$ el divisor excepcional de la explosión σ_P^*. Denotamos por

$$(\mathcal{F}_\nu^{(1)})^* = \sigma_P^*(\mathbf{F}_\nu) = \mathbf{F}_\nu^{(1)} \cup E^{(1)}.$$

de igual manera denotamos a $(f^{(1)})^* = \sigma_P^*(f) \cup E^{(1)}$
Se sabe que después de un número finito de sucesivas transformaciones cuadráticas, uno puede tener un estado donde la transformada total de (f) tenga un solo punto doble ordinario, es decir existe un entero $N \geq 0$ con la propiedad. Si

$$\{(f), (f^{(1)})^*, (f^{(2)})^*, \ldots (f^{(i)})^* \ldots\}$$

es una sucesión de curvas algebroide planas tal que para algún i, tenemos

$$(f^{(i+1)})^* = (f^{(i+1)}) \cup E^{(i+1)}$$

donde $(f^{(i+1)})$ es la componente conectada de la propia transformada cuadrática de $(f^{(i)})^*$. ($(\sigma^{(i)})^*$ siendo una transformada cuadrática con centro el origen $P^{(i)}$ de $(f^{(i)})^*$) y $E^{(i+1)}$ es la curva excepcional de $(\sigma^{(1)})^*$, luego para $i \geq N$ el origen $P^{(i)}$ de $(f^{(i)})^*$ es un punto doble ordinario de $(f^{(i)})^*$. Denotamos por $\omega^*(f)$ el menor entero N con esta propiedad.

Es claro que $\omega^*(f) = 0$ si solo si, el origen P de (f) es un punto doble ordinario de (f). Si (f) es regular entonces una estricta interpretación de nuestra definición de $\omega^*(f)$ podría requerir tomar $\omega^*(f) = 1$. Sin embargo concordamos en colocar $\omega^*(f) = 0$ también, si (f) es una curva regular.

Si (f) y (g) tienen el mismo número de ramos y si $\Pi : (f) \to (g)$ un pareado de los ramos de (f) sobre los ramos de (g).

Si $\omega^*(f) = 0$ i.e. si P es un simple punto ordinario o un doble punto ordinario de (f), entonces nosotros podremos decir que Π es una *(b)-equivalencia* entre (f) y (g) si solo si también $\omega^*(g) = 0$, i.e. si solo si, el origen Q de (g) es un punto simple o un punto doble ordinario de (f).

Definición 2.9 Una (b)-equivalencia $\Pi : (f) \to (g)$ es *un pareado* Π entre los ramos de (f) y los ramos de (g) teniendo las siguientes propiedades:

1. Π es tangencialmente estable
2. Los $\Pi_\nu^{(1)} : (\mathbf{F}_\nu^{(1)}) \to (\mathbf{G}_\nu^{(1)})$ para $\nu = 1, \ldots, t$ son (b)-equivalentes.
3. Si $(\mathbf{F}_\nu^{(1)})^* = (\mathbf{F}_\nu^{(1)}) \cup E^*$, $(\mathbf{G}_\nu^{(1)})^* = (\mathbf{G}_\nu^{(1)}) \cup \mathbf{E}^*$, donde E^* y $\mathbf{E}^*$ son las curvas excepcionales de las explosiones σ_P y σ_Q, luego la extension
$$\Pi_\nu^{(1)^*} : (\mathbf{F}_\nu^{(1)})^* \to (\mathbf{G}_\nu^{(1)})^*$$
con $\Pi_\nu^{(1)^*}(E^*) = \mathcal{E}^*$, es una (b)-equivalencia.

Procedemos a definir la equivalencia formal, para esto procedemos por inducción sobre $\omega^*(f)$, nosotros decimos que si $\omega^*(f) = 0$ la *equivalencia formal* coincide con la (b)-equivalencia.

Definición 2.10 (f) y (g) son *formalmente equivalentes*, si existe un pareado tangencialmente estable $\Pi : (f) \to (g)$ entre los ramos de (f) y los ramos de (g) tal que

1. $(\mathbf{F}_\nu^{(1)})$ y $(\mathbf{G}_\nu^{(1)})$ son formalmente equivalentes $(\nu = 1, \ldots, t)$
2. $(\mathbf{F}_\nu^{(1)})^*$ y $(\mathbf{F}_\nu^{(1)})^*$ son formalmente equivalentes $(\nu = 1, \ldots, t)$

Observe que en esta definición nosotros no decimos nada de la naturaleza del pareado
$$\Pi_\nu^{(1)} : (\mathbf{F}_\nu^{(1)}) \longrightarrow (\mathbf{G}_\nu^{(1)})$$
y
$$\Pi_\nu^{(1)^*} : (\mathbf{F}_\nu^{(1)})^* \to (\mathbf{G}_\nu^{(1)})^*$$
inducidos por Π.
La condición 1, simplemente requiere que exista para cada $\nu = 1, \ldots, t$ algún pareado tangencialmente estable $\Omega_\nu^{(1)} : (\mathbf{F}_\nu^{(1)}) \to (\mathbf{G}_\nu^{(1)})$ cumpliendo las condiciones de la definición inductiva.

De manera similar la condición 2, requiere que exista un pareado tangencialmente estable
$$\Omega_\nu^{(1)^*} : (\mathbf{F}_\nu^{(1)^*}) \to (\mathbf{G}_\nu^{(1)^*})$$
cumpliendo similares condiciones. Esto no exactamente requiere que $\Omega_\nu^{(1)^*}$ sea una extension $\Omega_\nu^{(1)}$. Por esta razón la definición de formalmente equivalente es más sutil, y también la más débil, de nuestras otras definiciones.

Lema 2.1 *Sea* Π *una (a)-equivalencia entre* (f) *y* (g) *y sea* (w) *una curva regular pasando por* P *y* (u) *una curva regular pasando por* Q*. Asumimos que* (w) *no es un ramo de* (f) *y que* (u) *no es un ramo de* (g)*, y que* $\Pi(f_i) = (g_i)$*. Si*
$$I(f_i, w) = I(g_i, u), \ i = 1, 2, \ldots, h. \tag{7}$$
Entonces el pareado $\widehat{\Pi} : (f) \cup (w) \to (g) \cup (u)$ *es una (a)-equivalencia.*

Demostración. Por inducción sobre $\omega^*((f)\cup(w))$. Si $\omega^*((f)\cup(w))=0$, entonces (f) es una curva regular, y (f) y (W) tienen distintas tangentes. Luego de [1] Teorema 4.11 item 5, nosotros tenemos $I(f,W)=1$. Como (f) y (g) son (a)-equivalentes, se sigue que (g) es una curva regular y por (7) $I(g,u)=I(f,w)=1$, luego $\omega^*((g)\cup(u))=0$.

Consecuentemente $\widehat{\Pi}$ es una (a)-equivalencia. Si $\omega^*((f)\cup(w))>0$, y supongamos el lema válido para curvas $(\overline{f})$ y $(\overline{g})$ y las curvas regulares $\overline{w}$ y $\overline{u}$ con

$$\omega^*((\overline{f})\cup(\overline{w}))<\omega^*((f)\cup(w)). \tag{8}$$

Verificaremos que $\widehat{\Pi}$ cumple la definición de (a)-equivalencia.
Sea (f_i) y (f_j) ramos de (f), se tiene $\widehat{\Pi}(f_i)=\Pi(f_i)=(g_i)$ y $\widehat{\Pi}(f_j)=\Pi(f_j)=(g_j)$, luego si (g_i) y (g_j) tienen tangente común, sigue que (f_i) y (f_j) tienen tangente común, pues Π es (a)-equivalente. Además, si (f_i) y (w) son ramos de $(f)\cup(w)$ donde $\widehat{\Pi}(w)=(u)$. Entonces si, (u) y (g_i) tienen tangente común, se sigue del teorema 4.14 de [1] y de (7) que,

$$I(f,w)=I(g_i,u)>\operatorname{dir}_Q(g_i)=\operatorname{dir}_P(f_i)$$

luego (w) y (f_i) tienen tangente común, y por tanto $\widehat{\Pi}$ es un pareado tangencialmente estable.
Tenemos que

$$\begin{gathered}\operatorname{dir}_P(f_i)=\operatorname{dir}_Q(g_i)\ i=1,2,\ldots,h\\ \operatorname{dir}(w)=\operatorname{dir}(u)\end{gathered}$$

la condición ii) está cumplida. Sea σ_P^* y σ_Q^* explosiones. Verificaremos la condición iii) en dos casos.

Caso 1. (w) no tiene tangente común con los ramos de (f), se sigue que

$$I(w,f_i)=\operatorname{dir}_P(f_i)=\operatorname{dir}_Q(g_i)=I(u,g_i),\ \ i=1,2,\ldots,h$$

luego (u) no tiene tangente común con los ramos de (g). En este caso las $t+1$ componentes conectadas de $\sigma_P^*((f)\cup(w))$

$$\{\mathbf{F}_1^{(1)},\mathbf{F}_2^{(1)},\ldots,\mathbf{F}_t^{(1)},(w^{(1)})\}$$

y las componentes conectadas de $\sigma_P^*((g)\cup(u))$

$$\{\mathbf{G}_1^{(1)},\mathbf{G}_2^{(1)},\ldots,\mathbf{G}_t^{(1)},(u^{(1)})\}$$

Luego $\widehat{\Pi}_\nu^{(1)}=\Pi_\nu^{(1)}$ para $\nu=2,3,\ldots,t$ es una (a)-equivalencia, además

$$\widehat{\Pi}_{t+1}^{(1)}:(w^{(1)})\to(u^{(1)})$$

es (a)-equivalente pues $(w^{(1)})$ y $(u^{(1)})$ son regulares.

Caso 2. La tangente de (w) coincide con una de las t tangentes $p_1,p_2,\ldots,p_t$ de (f), digamos que p_1 es la tangente de (w). Luego

$$I(u,g_i)=I(w,f_i)>\operatorname{dir}_P(f_i)=\operatorname{dir}_Q(g_i),i\in I_1,$$

sigue que la tangente de (u) es q_1.
Tenemos las t componentes tangenciales de $(f)\cup(w)$

$$\{(\mathbf{F}_1)\cup(w),(\mathbf{F}_2),\ldots,(\mathbf{F}_t)\}$$

y las correspondientes t componentes tangenciales de $(g)\cup(u)$

$$\{(\mathcal{G}_1)\cup(u),(\mathbf{G}_2)\ldots(\mathbf{G}_t)\}$$

luego las componentes conectadas de $\sigma_P^*((f)\cup(w))$

$$\{(\mathbf{F}_1^{(1)})\cup(w^{(1)}),(\mathbf{F}_2^{(1)}),\ldots(\mathbf{F}_t^{(1)})\}$$

y las componentes conectadas de $\sigma_Q^*((g) \cup (u))$

$$\{(\mathbf{G}_1^{(1)}) \cup (u^{(1)}), (\mathbf{G}_2^{(1)}), \ldots (\mathbf{G}_t^{(1)})\}$$

Si consideremos el pareado

$$\Pi_\nu^{(1)} : (\mathbf{F}_\nu^{(1)}) \to (\mathbf{G}_\nu^{(1)}), \nu = 2, 3, \ldots t$$

luego $\widehat{\Pi}_\nu^{(1)} = \Pi_\nu^{(1)} \nu = 2, \ldots, t$ es una (a)-equivalencia, para terminar probaremos que la extensión de $\Pi_1^{(1)}$

$$\widehat{\Pi}_1^{(1)} : (\mathbf{F}_1^{(1)}) \cup (w^{(1)}) \to (\mathbf{G}_1^{(1)}) \cup (u^{(1)}),$$

con $\Pi_1^{(1)}(w^{(1)}) = (u^{(1)})$, es una (a)-equivalencia.
Para esto, sea $(f_i^{(1)})$, $i \in I_1$ los ramos de $\mathbf{F}_1^{(1)}$ y correspondientes $(g_i^{(1)}) = \Pi(f_i^{(1)})$, $i \in I_1$, donde $(g_i^{(1)})$ es un ramo de $(G_1^{(1)})$. Luego de [1], teorema 5.7 tenemos que

$$I(f_i, w) = \mathrm{dir}_P(f_i) + I(f_1^{(1)}, w^{(1)})$$
$$I(g_i, u) = \mathrm{dir}_Q(g_i) + I(g_1^{(1)}, u^{(1)})$$

sigue que $I(f_i^{(1)}, w^{(1)}) = I(g_i^{(1)}, u^{(1)})$, $i \in I_1$. Además tenemos que $\Pi_1^{(1)}$ es (a)-equivalente, y también $(w^{(1)})$ y $(u^{(1)})$ son curvas regulares, con $\Pi_1^{(1)}(f_i^{(1)}) = (g_i^{(1)})$, $i \in I_1$.
Luego $\omega^*((\mathbf{F}_1^{(1)}) \cup (w^{(1)})) < \omega((f) \cup (w))$.
Sigue, por hipótesis inductiva que $\widehat{\Pi}_1^{(1)}$ es una (a)-equivalencia, y el lema esta probado. ■

Lema 2.2 *Si* Π *es una (a)-equivalencia entre* (f) *y* (g), *tal que* $\Pi(f_i) = g_i$, $i = 1, \ldots, h$, *entonces* $I(f_i, f_j) = I(g_i, g_j)$ *para* $i \neq j$

Demostración. Por inducción sobre $\omega(f)$. Si $\omega(f) = 0$, sigue que (f) es regular, y tiene un solo ramo por tanto el lema es válido.
Si $\omega(f) > 0$. Supongamos el lema válido para curvas (h) tal que $\omega(h) < \omega(f)$. Luego para $\omega(f^{(1)}) < \omega(f)$ tenemos

$$I(f_i^{(1)}, f_j^{(1)}) = I(g_i^{(1)}, g_j^{(1)}).$$

Por teorema 5.7 de [2], tenemos que

$$I(f_i, f_j) = \mathrm{dir}_P(f_i)\mathrm{dir}_P(f_i) + I(f_i^{(1)}, f_j^{(1)})$$
$$I(g_i, g_j) = \mathrm{dir}_Q(g_i)\mathrm{dir}_Q(g_j) + I(g_i^{(1)}, g_j^{(1)})$$

Consecuentemente $I(f_i, f_j) = I(g_i, g_j)$ ■

Teorema 2.3 (de Zariski) *Sean* (f) *y* (g) *curvas algebroides planas, si* Π *es una (a)-equivalencia, si solamente si,* Π *es también una (b)-equivalencia.*

Demostración. La demostración será por inducción sobre $\omega^*(f)$. Si $\omega^*(f) = 0$, se sigue (f) es regular, y la (a)-equivalencia coincide con la (b)-equivalencia. Suponemos la proposición valida para toda curva (h) tal que $\omega^*(h) < \omega^*(f)$.
Primero probaremos que si Π es una (a)-equivalencia entonces Π es también una (b)-equivalencia, por lo tanto se tiene que $\Pi_\nu^{(1)} : (\mathbf{F}_\nu^{(1)}) \to (\mathbf{G}_\nu^{(1)})$, $v = 1, \ldots, t$. es una (a)-equivalencia. Como $\omega^*(\mathbf{F}_\nu^{(1)}) < \omega^*(f)$, se sigue que $\Pi_\nu^{(1)}$ es una (b)-equivalencia.
Sea $E^{(1)}$ y $\mathrm{E}^{(1)}$ los divisores excepcionales de σ_P^* y σ_Q^*, se tiene de la observación i)

$$I(f_i^{(1)}, E^{(1)}) = \mathrm{dir}_P(f_i)$$
$$I(g_i^{(1)}, \mathrm{E}^{(1)}) = \mathrm{dir}_Q(g_i)$$

Consecuentemente por el Lema 2.1

$$\Pi_\nu^{(1)^*} : (\mathbf{F}_\nu^{(1)}) \cup E^{(1)} \to (\mathbf{G}_\nu^{(1)}) \cup \mathbf{E}^{(1)}$$

es una (a)-equivalencia. Además $\omega^*(\mathbf{F}_\nu^{(1)}) < \omega^*(f)$, sigue que $\Pi_\nu^{(1)^*}$ es una (b)-equivalencia.

Ahora vamos a demostrar que si Π es una (b)-equivalencia entonces Π es también una (a)-equivalencia.

Sea la (b)-equivalencia $\Pi : (f) \to (g)$. Luego $\Pi_\nu^{(1)^*} : (\mathbf{F}_\nu^{(1)}) \cup E^{(1)} \to (\mathbf{G}_\nu^{(1)}) \cup \mathbf{E}^{(1)}$ es una (b)-equivalencia. Como $\omega^*(\mathbf{F}_\nu^{(1)}) < \omega^*(f)$, sigue que $\Pi_\nu^{(1)^*}$ es una (a)-equivalencia y por el Lema 2.2 y la observación i)

$$\mathrm{dir}(f_i) = I(f_i^{(1)}, E^{(1)}) = I(g_i^{(1)}, \mathrm{E}^{(1)}) = \mathrm{dir}(g_i).$$

Por otro lado

$$\Pi_\nu^{(1)} : (\mathbf{F}_\nu^{(1)}) \to (\mathbf{G}_\nu^{(1)}),\ v = 1, \ldots, t.$$

es una (b)-equivalencia, luego como $\omega^*(\mathbf{F}_\nu^{(1)}) < \omega^*(f)$, sigue que $\Pi_\nu^{(1)}$ es una (a)-equivalencia. Por tanto Π es una (a)-equivalencia. ■

Lema 2.4 *Sean* $(\delta_1) \cup (d)$ *y* $(\gamma_1) \cup (e)$ *componentes tangenciales de las curvas* (f) *y* (g) *respectivamente, con* (d) *y* (e) *curvas regulares. Si* $(\delta_1) \equiv (\gamma_1)$ *y* $(\delta_1) \cup (d) \equiv (\gamma_1) \cup (e)$. *Entonces existe*

$$\Pi : (\delta_1) \cup (d) \to (\gamma_1) \cup (e)$$

tal que $\Pi(d) = (e)$

Demostración. Por inducción sobre $\omega^*(f)$. Si $\omega^*(f) = 0$, sigue que (δ_1) es regular y también (γ) es regular.Luego existe un pareado equivalente $\Pi_0 : (\delta_1) \to (\gamma_1)$, que al ser extendido tenemos $\Pi : (\delta_1) \cup (d) \to (\gamma_1) \cup (e)$ tal que $\Pi(d) = (e)$.

Si $\omega^*(f) > 0$, supongamos el lema valido para curvas (h) tal que $\omega^*(h) < \omega^*(f)$. Sean las explosiones

$$\sigma_P^*((\delta_1) \cup (d)) = (\delta_1^{(1)}) \cup (d^{(1)}) \cup \mathbf{E}^{(1)}$$
$$\sigma_Q^*((\gamma_1) \cup (e)) = (\gamma_1^{(1)}) \cup (e^{(1)}) \cup \mathbf{E}^{(1)}$$

Por definición de (a)-equivalencia tenemos $(\delta_1^{(1)}) \equiv (\gamma_1^{(1)})$ y $(\delta_1^{(1)}) \cup (d^{(1)}) \equiv (\gamma_1^{(1)}) \cup (e^{(1)})$. y por la definición de (b)-equivalente tenemos

$$(\delta_1^{(1)}) \cup (d^{(1)}) \cup E^{(1)} \equiv (\gamma_1^{(1)}) \cup (e^{(1)}) \cup \mathbf{E}^{(1)}.$$

donde $E^{(1)}$ y $(d^{(1)})$ son curvas regulares con tangentes distintas y $\mathbf{E}^{(1)}$ y $(e^{(1)})$ son regulares con distintas tangentes.

Como $\omega^*((\delta_1^{(1)}) \cup (d^{(1)})) < \omega^*(f)$, sigue que existe un pareado equivalente

$$\Pi^* : (\delta_1^{(1)}) \cup (d^{(1)}) \cup E^{(1)} \to (\gamma_1^{(1)}) \cup (e^{(1)}) \cup \mathbf{E}^{(1)},$$

tal que $\Pi^*(d^{(1)}) = (e^{(1)})$ y $\Pi^*(E^{(1)}) = (\mathbf{E}^{(1)})$ Luego Π^* induce un pareado equivalente

$$\Pi : (\delta_1) \cup (d) \to (\gamma_1) \cup (e)$$

tal que $\Pi(d) = (e)$. ■

Proposición 2.5 *Sean* (f) *y* (g) *curvas algebroides con el mismo número de ramos, sea* (d) *y* (e) *ramos regulares de* (f) *y* (g) *respectivamente. Escriba* $(f) = (\delta) \cup (d)$ *y* $(g) = (\gamma) \cup (e)$. *Si* $(\delta) \equiv (\gamma)$ *y* $(\delta) \cup (d) \equiv (\gamma) \cup (e)$. *Entonces existe un pareado equivalente* $\Pi : (f) \to (g)$ *tal que* $\Pi(d) = (e)$

Demostración. Tenemos dos casos.

1er caso. La recta tangente de (d) no es tangente a (δ). Como $(\delta) \equiv (\gamma)$, sigue que (δ) y (γ), tienen el mismo numero t de rectas tangentes distintas. Como $(\delta) \cup (d) \equiv (\gamma) \cup (e)$ sigue que $(\delta) \cup (d)$ y $(\gamma) \cup (e)$ tienen $t + 1$ rectas tangentes distintas. Luego la recta tangente de (e) no es tangente a (γ). Luego por definición de (a)-equivalencia el pareado (a)-equivalente $\Pi_0 : (\delta) \to (\gamma)$ se extiende $\Pi : (\delta) \cup (d) \to (\gamma) \cup (e)$ con $\Pi(d) = (e)$.

2do caso. La recta tangente de (d) coincide con alguna de las rectas tangentes de (δ). Luego por el mismo razonamiento del 1er caso la recta tangente de (e) coincide con algunas de las rectas tangentes de (γ). Sean $\{(\delta_1),(\delta_2),\dots,(\delta_t)\}$ y $\{(\gamma_1),(\gamma_2),\dots,(\gamma_t)\}$ conjuntos de las componentes tangenciales de (δ) y (γ). Digamos que la recta tangente de (d) coincide con la recta tangente de (δ_1),y que la recta tangente a (e) coincide con la recta tangente a (γ_1). Llamemos

$$\{(\delta_1)\cup(d),(\delta_2),\dots,(\delta_t)\} \text{ y } \{(\gamma_1)\cup(e),(\gamma_2),\dots,(\gamma_t)\}$$

a los conjuntos de las componentes tangenciales de las curvas $(\delta)\cup(d)$ y $(\gamma)\cup(e)$ respectivamente. Sea $a=\sharp\{(\delta_1)\cup(d),(\delta_2),\dots,(\delta_t)\ /\ (\delta_1)\equiv(\delta_1)\cup(d)\equiv(\delta_2)\equiv\dots\equiv(\delta_t)\}$, luego

$$a+1=\sharp\{(\delta_1),(\delta_2),\dots,(\delta_t)\ /\ (\delta_1)\equiv(\delta_1)\equiv(\delta_2)\equiv\dots\equiv(\delta_t)\}.$$

Como

$$(\delta)\equiv(\gamma)$$

se sigue que $(\delta_i)\equiv(\gamma_j)$ para algún j y $(\gamma_i)\equiv(\delta_j)$ para algún j. Luego

$$a+1=\sharp\{(\gamma_1),(\gamma_2),\dots,(\gamma_t)\ /\ (\delta_1)\equiv(\gamma_1)\equiv(\gamma_2)\equiv\dots\equiv(\gamma_t)\}$$

Además

$$(\delta)\cup(d)\equiv(\gamma)\cup(e)$$

sigue que

$$a=\sharp\{(\gamma_1)\cup(e),(\gamma_2),\dots,(\gamma_t)\ /\ (\delta_1)\equiv(\gamma_1)\cup(e)\equiv(\gamma_2)\equiv\dots\equiv(\gamma_t)\}$$

Consecuentemente

$$(\delta_1)=(\gamma_1) \tag{9}$$

Sea $b=\sharp\{(\delta_1),(\delta_2),\dots,(\delta_t)\ /\ (\delta_1)\cup(d)\equiv(\delta_1)\cup(d)\equiv(\delta_2)\equiv\dots\equiv(\delta_t)\}$,
Se sigue que

$$b+1=\sharp\{(\delta_1)\cup(d),(\delta_2),\dots,(\delta_t)\ /\ (\delta_1)\cup(d)\equiv(\delta_1)\cup(d)\equiv(\delta_2)\equiv\dots\equiv(\delta_t)\}.$$

Además $(\delta)\cup(d)\equiv(\gamma)\cup(e)$, entonces

$$b+1=\sharp\{(\gamma_1)\cup(e),(\gamma_2),\dots,(\gamma_t)\ /\ (\delta_1)\cup(d)\equiv(\gamma_1)\cup(e)\equiv(\gamma_2)\equiv\dots\equiv(\gamma_t)\}$$

Como $(\delta)\equiv(\gamma)$, se tiene que

$$b=\sharp\{(\gamma_1),(\gamma_2),\dots,(\gamma_t)\ /\ (\delta_1)\cup(d)\equiv(\gamma_1)\equiv(\gamma_2)\equiv\dots\equiv(\gamma_t)\}$$

Consecuentemente

$$(\delta_1)\cup(d)=(\gamma_1)\cup(e) \tag{10}$$

De (9) y (10) sigue por el Lema 2.4 que existe un pareado equivalente

$$\Pi_1:(\delta_1)\cup(d)\to(\gamma_1)\cup(e),\quad \Pi_1(d)=(e) \tag{11}$$

Para concluir la prueba extenderemos, Π_1 a un pareado equivalente

$$\Pi:(f)\to(g)$$

Sean

$$M=\{(\delta_1)\cup(d),(\delta_2),\dots,(\delta_t)\ /\ (\delta_1)\cup(d)\equiv(\delta_1)\cup(d)\equiv(\delta_2)\equiv\dots\equiv(\delta_t)\}$$

y

$$N=\{(\gamma_1)\cup(e),(\gamma_2),\dots,(\gamma_t)\ /\ (\gamma_1)\cup(e)\equiv(\gamma_1)\cup(e)\equiv(\gamma_2)\equiv\dots\equiv(\gamma_t)\},$$

se sigue por (10) y por la transitividad de la relación de equivalencia $\sharp(M)=\sharp(N)$.

Además tenemos que $(f)\equiv(g)$ luego existe un pareado equivalente

$$\Lambda:(f)\to(g)$$

este pareado induce una equivalencia $\Lambda_\nu:(\mathbf{F}_\nu)\to(\mathbf{G}_\nu)$, $\nu=1,2,\dots,t$, donde

$$(\mathbf{F}_1)=(\delta_1)\cup(d),\quad (\mathbf{F}_\nu)=(\delta_\nu),\nu=2,3\dots,t$$
$$(\mathbf{G}_1)=(\gamma_1)\cup(e),\quad (\mathbf{G}_\nu)=(\gamma_\nu),\nu=2,3\dots,t$$

Luego de (11) tenemos que $\Lambda_1=\Pi_1$, tal que $\Pi_1(d)=(e)$. Construiremos los Π_ν para $\nu=2,3\dots,t$ en dos casos :

1. Si $(\mathbf{F}_\nu) \notin M$, sigue $(\mathbf{G}_\nu) \notin N$, diremos $\Pi_\nu = \Lambda_\nu : (\mathbf{F}_\nu) \to (\mathbf{G}_\nu)$

2. Si $(\mathbf{F}_\nu) \in M \setminus \{(\delta_1) \cup (d)\}$, luego se tiene una correspondencia uno a uno entre el conjunto $M \setminus \{(\delta_1) \cup (d)$ y $N \setminus \{(\gamma_1) \cup (e)\}$. Indexamos tal correspondencia por μ, entonces $(\mathbf{F}_\mu) \equiv (\mathbf{G}_\mu)$ para todo μ donde $(\mathbf{F}_\mu) \in M \setminus \{(\delta_1) \cup (d)\}$ y $(\mathbf{G}_\mu) \in N \setminus \{(\gamma_1) \cup (e)\}$. Luego nosotros fijamos tal equivalencia $\Pi_m u : (\mathbf{F}_\mu) \to (\mathbf{G}_\mu)$

De ambos casos y de (11) tenemos el pareado equivalente Π_ν. ∎

Teorema 2.6 *Sea (f) y (g) curvas algebroides con el mismo número de ramos, sea $(d_1), (d_2), \ldots, (d_m)$ ramos regulares de (f) con distintas tangentes. En forma similar sea $(e_1), (e_2), \ldots, (e_m)$ ramos de (g) con distintas tangentes. Sea*

$$(f) = (\delta) \cup (d_1) \cup \cdots \cup (d_m), \quad (g) = (\gamma) \cup (e_1) \cup \ldots \cup (e_m)$$

Asuma que $(\delta) \equiv (\gamma)$ y que para cada $\alpha = 1, 2, \ldots, m$ también $(\delta) \cup (d_1) \cup \cdots \cup (d_\alpha) \equiv (\gamma) \cup (e_1) \cup \ldots \cup (e_\alpha)$. Entonces existe un pareado equivalente $\Pi : (f) \to (g)$ tal que $\Pi(d_\alpha) = (e_\alpha)$ para $\alpha = 1, 2 \ldots, m$.

Demostración. Tenemos dos casos: $m = 1$ o $m > 1$. Cuando $m = 1$, el teorema es probado por la Proposición 2.5. Se probará para el caso $m > 1$.
Sea $(\mathbf{F}_j)$ la componente tangencia de (f) determinada por la tangente de la curva (d_j). De manera similar sea $(\mathbf{G}_j)$ la componente tangencial de (g) determinada por la tangente de (e_j). Entonces $(\mathbf{F}_1), (\mathbf{F}_2), \ldots, (\mathbf{F}_m)$ son las distintas componentes tangenciales de (f) y de manera para $(\mathbf{G}_1), (\mathbf{G}_2), \ldots, (\mathbf{G}_m)$ y (g). Como

$$(\delta) \cup (d_1) \cup \cdots \cup (d_{j-1}) \equiv (\gamma) \cup (e_1) \cup \cdots \cup (e_{j-1}))$$

y

$$(\delta) \cup (d_1) \cup \cdots \cup (d_{j-1}) \cup (d_j) \equiv (\gamma) \cup (e_1) \cup \cdots \cup (e_{j-1})) \cup (d_j),$$

sigue por la proposición 2.5 que existe una equivalencia

$$\Lambda_j : (\delta) \cup (d_1) \cup \cdots \cup (d_{j-1}) \cup (d_j) \to (\gamma) \cup (e_1) \cup \cdots \cup (e_{j-1})) \cup (d_j),$$

tal que $\Lambda_j(d_j) = (e_j)$. Entonces Λ_j induce una equivalencia $\Pi_j : (\mathbf{F}_j) \to (\mathbf{G}_j)$, con $\Pi_j(d_j) = (e_j)$.
En el desarrollo de la prueba de la Proposición 2.5 después de la ecuación (11), se mostró que si $(f) \equiv (g)$ y dada la equivalencia $\Pi_1 : (\mathbf{F}_1) \to (\mathbf{G}_1)$, entonces Π_1 puede ser extendida a una equivalencia $\Pi : (f) \to (g)$.
De manera similar las m equivalencias $\Pi_j : (\mathbf{F}_j) \to (\mathbf{G}_j)$ puede ser extendida a una sola equivalencia $\Pi : (f) \to (g)$, como $\Pi(d_j) = (e_j)$, la prueba del teorema esta terminada. ∎

Corolario 2.7 *Si (f) y (g) son formalmente equivalentes si solo si ellos (b) son equivalentes.*

Demostración. Por inducción sobre $\omega^*(f)$. Si $\omega^*(f) = 0$ la formal equivalencia coincide con la (b)-equivalencia. Si $\omega^*(f) > 0$, podemos suponer que el corolario es valido para curvas (h) tal que $\omega^*(h) < \omega^*(f)$.
Primero probaremos que si (f) y (g) son formalmente equivalentes entonces (f) y (g) (b) son equivalentes.
Sean (f) y (g), formalmente equivalentes, se tiene que $(\mathbf{F}_\nu^{(1)})$ y $(\mathbf{G}_\nu^{(1)})$ son formalmente equivalentes y $(\mathbf{F}_\nu^{(1)}) \cup E^{(1)}$ y $(\mathbf{G}_\nu^{(1)}) \cup \mathbf{E}^{(1)}$ también son formalmente equivalentes para $\nu = 1, 2, \ldots, t$.
Como

$$\omega^*((\mathbf{F}_\nu^{(1)})) < \omega^*(f) \text{ y } \omega^*((\mathbf{F}_\nu^{(1)}) \cup E^{(1)}) < \omega^*(f)$$

se sigue

$$(\mathbf{F}_\nu^{(1)}) \equiv (\mathbf{G}_\nu^{(1)})$$

y $(\mathbf{F}_\nu^{(1)}) \cup E^{(1)} \equiv (\mathbf{G}_\nu^{(1)}) \cup \mathbf{E}^{(1)}$. Luego por la Proposición 2.5 sigue que existe un pareado equivalente $\Pi_\nu^{(1)}$ entre $(\mathbf{F}_\nu^{(1)}) \cup E^{(1)}$ y $(\mathbf{G}_\nu^{(1)}) \cup \mathbf{E}^{(1)}$ tal que

$$\Pi_\nu^{(1)}(E^{(1)}) = \mathbf{E}^{(1)}$$

Ahora probaremos que si (f) y (g) son (b) equivalentes entonces (f) y (g) son formalmente equivalentes. Sea la (b)-equivalencia $\Pi : (f) \to (g)$, luego tenemos que

$$\Pi_\nu : (\mathbf{F}_\nu^{(1)}) \to (\mathbf{G}_\nu^{(1)}) \text{ y } \Pi_\nu^{(1)^*} : (\mathbf{F}_\nu^{(1)}) \cup E^{(1)} \to (\mathbf{G}_\nu^{(1)}) \cup \mathbf{E}^{(1)}$$

son (b)-equivalentes. Como $\omega^*(\mathbf{F}_\nu^{(1)}) < \omega^*(f)$, sigue que $\mathbf{F}_\nu^{(1)}$ y $\mathbf{G}_\nu^{(1)}$ son formalmente equivalentes y que también $\mathbf{F}_\nu^{(1)} \cup E^{(1)}$ y $\mathbf{G}_\nu^{(1)} \cup \mathrm{E}^{(1)}$ son formalmente equivalentes. Consecuentemente (f) y (g) son formalmente equivalentes. ∎

Observación 2.3 En el caso que la curvas sean irreducible podemos decir que (f) y (g) son (a)-equivalentes, si solo si, $\mathrm{dir}_P(f) = \mathrm{dir}_Q(g)$ y $(f^{(1)})$ y $(g^{(1)})$ son (a)-equivalentes, si solo si, $\mathrm{dir}_{P^{(j)}}(f^{(j)}) = \mathrm{dir}_{Q^{(j)}}(g^{(j)})$ para $j = 1, 2, \ldots N$ tal que si $j \geq N$, entonces $(f^{(j)})$ es regular.

3. Conclusiones

Mostramos las tres definiciones de equivalencia de curvas algebroides planas y demostramos que estas definiciones son equivalentes, este resultado es sumamente útil para la clasificación de las curvas algebraicas planas en el cuerpo de característica cero.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Collantes, F. (2009) *Singularidad de Curvas Planas*, Tesis de Licenciatura en Matemática, UNMSM.

[2] Zariski, O. (1965) *Studyes in Equisingularity I*, Amer. J. Math.507-536.

[3] Hefez, A. (2000) *Singularidad de Curvas Irreductiveis planas*, minicurso 6^{th} Workshop on Real and Complex Singularities, USP-Sao Carlos, 17-21