PESQUIMAT, Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XVI N°1, pp. 86-97, Lima - Perú, Abril 2014

TRES DIFERENTES MODELOS DEL ESPACIO HIPERBOLICO, ISOMETRICOS Y DE IGUAL CURVATURA SECCIONAL

Josué Aguirre Enciso[1], *Rodolfo Galvez Perez*[2],
Luis Nuñez Ramirez[3], *Humberto Galvez Perez*[4],
Alex Cruz Huallpara[5].

Resumen: En este trabajo presentamos tres variedades Riemannianas, cada una de ellas con su respectiva métrica. Además probamos que ellas son Isométricas, para finalmente mostrar que la curvatura seccional de ellas es constante y negativa.

Palabras Claves: Variedades Riemannianas. Variedades Semi-Riemannianas. Variedades isométricas. Curvatura seccional.

THREE DIFFERENT MODELS OF HYPERBOLIC SPACE, ISOMETRICS AND SECTIONAL CURVATURE EQUAL

Abstract: We present three Riemannian manifolds, each with its respective metric. Moreover we prove that they are isometric to finally show that the sectional curvature of which is constant and negative.

Key words: Riemannian manifolds. Semi-Riemannian manifolds. Isometric manifolds. Sectional curvature.

Antecedentes

Esta nueva geometría inicia como consecuencia de la veracidad del quinto postulado de Euclides. Nikolai Lobachevski comenzó a elaborar una nueva geometría no euclidiana, que llamó geometría imaginaria o pangeometría. Para ello sustituyó el quinto postulado de Euclides (dada una línea recta y un punto exterior a ésta, sólo se puede trazar una única línea en el plano que pase a través del punto y que sea paralela a la recta anterior) por la proposición siguiente: "Todas las líneas rectas de un plano originadas en un punto dado pueden ser divididas en dos clases, según su relación con las otras rectas del mismo plano: la clase de las rectas secantes y de las no secantes. La línea recta que, en cierta manera, hace oficio de frontera para cada una de estas clases es denominada paralela a la recta considerada. De ello resulta que una línea recta puede ser paralela a dos rectas que se cortan".

Al desarrollar las consecuencias de este nuevo postulado, Lobachevski pudo construir una geometría coherente, sin contradicciones y, por otra parte, sin ninguna relación con la experiencia. En su geometría la suma de los ángulos de un triángulo es menor que la de dos rectos. La conclusión de este intento era la siguiente: la elección de un postulado no tiene consecuencias sobre el valor lógico de una geometría, luego este postulado es indemostrable.

El intento de Lobachevski data de principios del siglo XIX y ya había sido precedido de un intento análogo realizado por Gauss, quien no había publicado sus resultados. Después de Lobachevski, el húngaro Bolyai volvió a considerar el problema y llegó a unos resultados muy semejantes. A la geometría de Lobachevski también se la conoce como "Geometría hiperbólica".

Este trabajo esta basado en esa geometría y en particular se muestra los diferentes modelos de dicha geometría.

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: josue.aguirre@pucp.pe
[2]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: rgalvezp@unmsm.edu.pe
[3]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: lnuñezr@unmsm.edu.pe
[4]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: hgalvezp@unmsm.edu.pe
[5]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: alexsould@hotmail.com

1. Variedades Riemannianas

Definición 1.1 *Una variedad diferenciable de dimensión n es un conjunto M y una familia de aplicaciones biunívocas $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$, $\alpha \in I$ de abiertos U_α de $\mathbb{R}^n$ en M tal que*

(1) $\bigcup_\alpha \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = M$,

(2) Para todo par $\alpha, \beta \in I$ con $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, los conjuntos $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W)$ y $\mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$ son abiertos de $\mathbb{R}^n$ y las aplicaciones $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$ son diferenciables,

(3) La familia $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ es maxima relativa a las condiciones (1) y (2).

Al par $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ (o aplicación) con $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ se le llama *parametrización* de M en p, $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ es entonces llamada una *vecindad coordenada* en p. Una familia $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ satisfaciendo *(1) y (2)* es llamada una *estructura diferenciable* en M.

Observación. Una estructura diferenciable en un conjunto M induce de una manera natural una topología en M. Basta definir que $A \subset M$ es un abierto de M si y solo si $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(A \cap \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha))$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ para todo α. Es fácil verificar que M y el vacío ϕ son abiertos. Observe que la topología es definida de tal modo que los conjuntos $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ son abiertos y las aplicaciones $\mathbf{x}_\alpha$ son continuas.

Definición 1.2 *Sean M_1^n y M_2^m variedades diferenciables. Una aplicación $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ es diferenciable en $p \in M_1$ si dada una parametrización $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow M_2$ en $\varphi(p)$ existe una parametrización $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M_1$ en p tal que $\varphi(\mathbf{x}(U)) \subset \mathbf{y}(V)$ y la aplicación*

$$\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

es diferenciable en $\mathbf{x}^{-1}(p)$. φ es diferenciable en un abierto de M_1 si es diferenciable en todos los puntos de ese abierto.

Las consideraciones siguientes motivan una definición que daremos mas adelante. Sea $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva diferenciable de $\mathbb{R}^n$, con $\alpha(0) = p$. Escribamos

$$\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots\ldots, x_n(t)), \quad t \in (-\epsilon, \epsilon), \quad (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces $\alpha'(0) = (x_1'(0), x_2'(0), \ldots\ldots, x_n'(0)) = v \in \mathbb{R}^n$. Sea ahora f una función diferenciable $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en una vecindad de p. Podemos restringir f a una curva α y escribir la derivada direccional según el vector $v \in \mathbb{R}^n$ como

$$\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}|_{t=0} \frac{dx_i}{dt}|_{t=0} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f.$$

Por tanto la derivada direccional según el vector v es un operador sobre funciones diferenciables que depende únicamente de v. Esta es la propiedad característica que usaremos para definir el vector tangente en variedades.

Definición 1.3 *Sea M una variedad diferenciable. Una aplicación diferenciable $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ es llamada una Curva Diferenciable en M. Suponga que $\alpha(0) = p \in M$, y sea $\mathcal{D}(M)$ el conjunto de funciones lineales de M diferenciables en p. Entonces el vector tangente a la curva α en $t = 0$ es la función $\alpha'(0) : \mathcal{D}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\alpha'(0)f = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}|_{t=0},$$

Un vector tangente en p es el vector tangente en $t = 0$ de alguna curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ con $\alpha(0) = p$. El conjunto de los vectores tangentes a M en p sera indicado por T_pM.

Si escogemos una parametrización $\mathbf{x} : U \longrightarrow M^n$ en $p = \mathbf{x}(0)$, podemos denotar a la función f y a la curva α así

$$f \circ \mathbf{x}(q) = f(x_1, x_2, ..., x_n), \quad q = (x_1, x_2, ..., x_n) \in U,$$

y

$$\mathbf{x}^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)),$$

respectivamente. Por tanto, restringiendo f a α, obtenemos

$$\alpha'(0)f = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}|_{t=0} = \frac{d(f \circ \mathbf{x} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha)}{dt}|_{t=0},$$

$$= \frac{d(f \circ \mathbf{x})}{dt}|_{t=0} \frac{d(\mathbf{x}^{-1} \circ \alpha)}{dt}|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))|_{t=0},$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0\right) f.$$

En otras palabras el vector $\alpha'(0)$ puede ser expresado en la parametrización $\mathbf{x}$ por

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0. \tag{1}$$

Observe que $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0$ es el vector tangente en p con respecto a la llamada *curva coordenada.*

$$x_i \longrightarrow \mathbf{x}(0, 0, ..., x_i, ..., 0).$$

La expresión (1) muestra que el vector tangente a una curva α en p depende apenas de las derivadas de α en un sistema de coordenadas. También se tiene de (1) que el conjunto T_pM, con las operaciones usuales de funciones, forma un espacio vectorial de dimensión n, y que escogida una parametrización $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ esta determina una base *asociada* $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_0, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_0, ..., \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_0\right\}$ en T_pM. Es inmediato verificar que la estructura lineal en T_pM así definida no depende de la parametrización $\mathbf{x}$. El espacio vectorial T_pM es llamado el *espacio tangente* de M en p.

1.1. Métricas Riemannianas

Definición 1.4 *Una métrica Riemanniana (o estructura Riemanniana) es una variedad diferenciable M y una correspondencia que asocia a cada punto p de M un producto interno $\langle \ , \ \rangle$ (esto es una forma bilineal simétrica y definida positiva) en el espacio tangente T_pM, que varia diferencialmente en el sentido siguiente, si $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ es un sistema de coordenadas locales en torno de p, con $\mathbf{x}(x_1, x_2, ..., x_n) = p \in \mathbf{x}(U)$ y $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx_q(0, 0, ..., 1, ., 0)$, entonces $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle_q = g_{ij}(x_1, ..., x_n)$, es una función diferenciable en U.*

Es claro que esta definición no depende del sistema de coordenadas elegido. Otra manera de definir una métrica Riemanniana es, para todo par de campos de vectores diferenciables X, Y en una vecindad $V \subset M$, la función $\langle X, Y \rangle$ es diferenciable en V, esta definición es equivalente a la anterior. Una variedad diferenciable con una métrica Riemanniana dada se llama *Variedad Riemanniana.*

Definición 1.5 *Sean M y N variedades Riemannianas. Un difeomorfismo $f : M \longrightarrow N$ es llamado una isometría si solo si*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \quad para \ \ todo \ \ p \in M, \quad u, v \in T_pM.$$

Definición 1.6 *Una aplicación diferenciable $c : I \longrightarrow M$ de un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ en una variedad diferenciable M, se llama curva parametrizada.*

Definición 1.7 *Un campo vectorial V a lo largo de una curva parametrizada $c : I \longrightarrow M$ es una aplicación que a cada $t \in I$ le asocia un vector tangente $V(t) \in T_{c(t)}M$. Se dice que V es diferenciable si para toda función diferenciable f en M, la función $t \longrightarrow V(t)f$ es una función diferenciable en I.*

Si M es una variedad Riemanniana y sea la curva c definida en $[a,b] \subset I$ definimos la longitud de la curva así

$$l_a^b(c) = \int_a^b \left\langle \frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt} \right\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

1.2. Conexiones Afines, Conexión Riemanniana

Definición 1.8 **[Conexiones Afines]**

Una conexión afín ∇ en una variedad diferenciable M es una aplicación

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M),$$

que se indica por

$$(X,Y) \longrightarrow \nabla_X Y,$$

y que satisface las siguientes propiedades

(1) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z.$

(2) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z.$

(3) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y.$

Donde $\mathfrak{X}(M)$ es el conjunto de los campos de vectores de clase C^∞ en M y $\mathcal{D}(M)$ es el anillo de las funciones reales de clase C^∞ definidas en M.

Proposición 1.9 *Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇. Entonces existe una única correspondencia que asocia a un campo vectorial V a lo largo de una curva diferenciable $c : I \longrightarrow M$ otro campo vectorial $\frac{DV}{dt}$ a lo largo de c, denominado la Derivada Covariante de V a lo largo de c, tal que*

(a) $\frac{D}{dt}(V+W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$,

(b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, *donde W es un campo de vectores a lo largo de c y f es una función diferenciable en I,*

(c) Si V es inducido por un campo de vectores $Y \in \mathfrak{X}(M)$ si $V(t) = Y(c(t))$, entonces $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y.$

(Para la prueba ver Cap. 2 pag. 50 de [1])

Definición 1.10 **[Campos Paralelos]**

Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇. Un campo vectorial V a lo largo de una curva $c : I \longrightarrow M$ es llamado paralelo cuando

$$\frac{DV}{dt} = 0,$$

para todo $t \in I$.

Definición 1.11 [**Conexion Riemanniana**]

Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇ y una métrica Riemanniana $\langle\ ,\ \rangle$. La conexión es llamada compatible con la métrica cuando para toda curva diferenciable c y cualesquiera pares de campos de vectores paralelos P y P' a lo largo de c, tendremos que $\langle P, P'\rangle =$ constante.

Proposición 1.12 *Sea M una variedad Riemanniana. Una conexión ∇ en M es compatible con la métrica si solo si para todo par V y W de campos de vectores a lo largo de la curva diferenciable $c : I \longrightarrow M$ se tiene*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W\right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt}\right\rangle, \quad t \in I.$$

(Para la prueba ver Cap. 3 pag. 53 de [1])

Corolario 1.13 *Una conexión ∇ en una variedad Riemanniana M es compatible con la métrica si y solo si*

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \quad con \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M),$$

Demostración. Supongamos que ∇ es compatible con la métrica, sea $p \in M$ y sea $c : I \longrightarrow M$ una curva diferenciable con $c(t_0) = p$ $t_0 \in I$ y con $\frac{dc}{dt}\mid_{t=t_0}= X(p)$. Entonces

$$X(p)\langle Y, Z\rangle = \frac{d}{dt}\langle Y, Z\rangle \mid_{t=t_0}= \langle \nabla_{X(P)}Y, Z\rangle_p + \langle Y, \nabla_{X(P)}Z\rangle_p,$$

desde que p es arbitrario se tiene la igualdad. ∎

Definición 1.14 *Una conexión afín ∇ en una variedad diferenciable M es llamada simétrica cuando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

para todo

$$X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Observación. Si escogemos un sistema de coordenadas $(x_1, x_2, ..., x_n)$ en un entorno de p y escribimos

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i X_i, \qquad Y = \sum_{j=1}^{n} y_j X_j,$$

donde $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ tenemos

$$\nabla_X Y = \sum_i x_i \nabla_{X_i}(\sum_j y_j X_j) = \sum_{ij} x_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{ij} x_i X_i(y_j) X_j,$$

haciendo $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$, concluimos que Γ_{ij}^k son funciones diferenciables.

Además en un sistema de coordenadas $(U, \mathbf{x})$, el hecho de ser simétrica ∇ implica que para todo $i, j = 1, 2, ..., n$.

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0, \qquad X_i = \frac{\partial}{\partial x_i},$$

observe que esto es equivalente a $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

2. Hiperboloide de dos Hojas y el Disco de Poincaré

Sea el conjunto $\mathcal{H} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -x^2 - y^2 + z^2 = 1\}$, llamado el hiperboloide de 2 hojas y sea $\mathbb{D} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u^2 + v^2 < 1\}$ el disco unitario Euclidiano, es claro que ambos conjuntos son Variedades Diferenciables 2-dimensionales.

En esta primera parte vamos a utilizar la proyección estereográfica sobre $\mathcal{H}$, para ser mas específicos sobre una de sus hojas y probaremos que ambas Variedades son difeomorfas, luego dotaremos a ambas Variedades de una métrica Riemanniana y verificaremos que son Isométricas.

Vamos a considerar la proyección teniendo como base el punto $S = (0, 0, -1)$ y considerando los valores $z > -1$, es decir

Utilizaremos la noción de vectores paralelos $\overrightarrow{UP} = \lambda \overrightarrow{SU}$ donde $U \in \mathbb{D}$, $P \in \mathcal{H}$ y $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ con coordenadas $P = (x, y, z)$; $U = (u, v, 0)$ entonces se tiene

$$(x - u, y - v, z) = \lambda(u, v, 1)$$

de donde se concluye

$$z = \lambda; \quad u = \frac{x}{1+z}; \quad v = \frac{y}{1+z}$$

lo cual define la siguiente aplicación

$$\begin{array}{rcl} \pi: \quad \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{D} \\ (x, y, z) & \longrightarrow & \left(\dfrac{x}{1+z}, \dfrac{y}{1+z}\right) \end{array}$$

donde $\mathbb{D} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u^2 + v^2 < 1\}$ disco unitario Euclidiano.

Claramente es un difeomorfismo de $\mathcal{H}$ sobre $\mathbb{D}$ pues su inversa será

$$\begin{array}{rcl} \pi^{-1}: \quad \mathbb{D} & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ (u, v) & \longrightarrow & \left(\dfrac{2u}{1-u^2-v^2}; \dfrac{2v}{1-u^2-v^2}; \dfrac{1+u^2+v^2}{1-u^2-v^2}\right) \end{array}$$

donde se verifica

$$\pi \circ \pi^{-1}(u, v) = (u, v)$$

y

$$\pi^{-1} \circ \pi(x, y, z) = (x, y, z)$$

Además se tiene que $\pi(x, y, z) \in \mathbb{D}$, pues

$$\left(\frac{x}{1+z}\right)^2 + \left(\frac{y}{1+z}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{(1+z)^2}$$

y como $(x, y, z) \in \mathcal{H}$ se tiene $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ y considerando $z > -1$, podemos reescribir la igualdad anterior como

$$\frac{x^2 + y^2}{(1+z)^2} = \frac{z^2 - 1}{(1+z)^2}$$

Luego, se concluye que $z^2 - 1 < (1+z)^2$, si suponemos lo contrario

$$z^2 - 1 \geq (1+z)^2$$

$$z^2 - 1 \geq z^2 + 1 + 2z$$

$$0 \geq 2 + 2z$$

$$0 \geq 1 + z$$

se tiene

$$-1 \geq z$$

lo cual es una contradicción.

Ahora vamos a dotar de una métrica a ambos espacios,

$$(\mathcal{H} \; ; \; h^1_{\mathcal{H}})$$

$$h^1_{\mathcal{H}} = i^*\mathfrak{m}$$

donde $i : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es la inclusión, y $\mathfrak{m}$ es la métrica *Lorentziana* que satisface,
$\mathfrak{m}(U, V) = U_1V_1 + U_2V_2 - U_3V_3$, para todo (U_1, U_2, U_3), $(V_1, V_2, V_3) \in T_p\mathcal{H}$

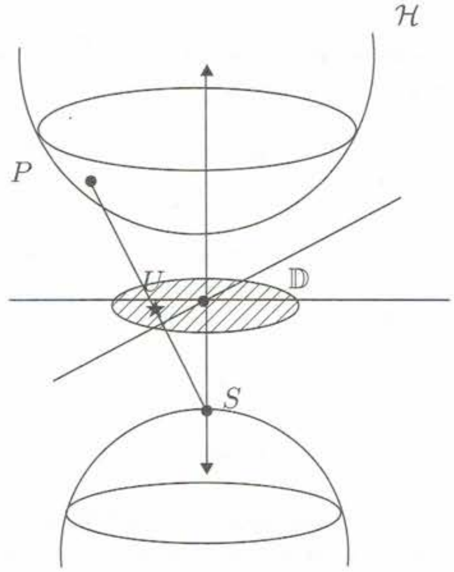

Figura 7: Hiperboloide de dos hojas

Ahora

$$(\mathbb{D} \; ; \; h^2_{\mathcal{H}})$$

$$h^2_{\mathcal{H}} = 4\frac{(du_1)^2 + (dv_2)^2}{[1 - (u_1^2 + v_2^2)]^2}$$

está es la métrica del disco.

Entonces debemos verificar que la aplicación

$$\pi^{-1}(u, v) = \left(\frac{2u}{1 - u^2 - v^2}; \frac{2v}{1 - u^2 - v^2}; \frac{1 + u^2 + v^2}{1 - u^2 - v^2}\right) = \left(\frac{2z}{1 - \|z\|^2}; \frac{1 + \|z\|^2}{1 - \|z\|^2}\right)$$

donde $z = (u, v)$ y $\|.\|$ es la norma Euclidiana, es una isometría con las métricas dadas anteriormente.

Es decir, $(\pi^{-1})^* h^1_{\mathcal{H}} = h^2_{\mathcal{H}}$. Sea $V = (V_1, V_2) \in T_p\mathbb{D}$ luego, se tiene

$$(\pi^{-1})^* h^1_{\mathcal{H}}(V, V) = h^1_{\mathcal{H}}(\pi_*^{-1}V, \pi_*^{-1}V) = \mathfrak{m}(\pi_*^{-1}V, \pi_*^{-1}V).$$

Ahora vamos a tomar la derivada de la función π^{-1} por partes, considerando a $V = \alpha'(0)$ como un vector en p, es decir

$$d\pi_p^{-1}(V) = \frac{d}{dt}(\pi^{-1} \circ \alpha(t)) \mid_{t=0},$$

con $\alpha(0) = p = (u, v) \in \mathbb{D}$.

Entonces

$$d\pi_1^{-1}(V) = \left[\frac{2z}{1 - \|z\|^2}\right]' = \frac{d}{dt}\left[\frac{2\alpha(t)}{1 - \langle\alpha(t), \alpha(t)\rangle}\right]$$

$$= \frac{2\alpha'(t)[1-\langle\alpha(t),\alpha(t)\rangle] - 2\alpha(t)[-2\langle\alpha'(t),\alpha(t)\rangle]}{[1-\langle\alpha(t),\alpha(t)\rangle]^2}$$

$$= \frac{2\alpha'(t) - 2\alpha'(t)\langle\alpha(t),\alpha(t)\rangle + 4\alpha(t)\langle\alpha'(t),\alpha(t)\rangle}{[1-\langle\alpha(t),\alpha(t)\rangle]^2}$$

$$= \frac{2\alpha'(t)}{1-\langle\alpha(t),\alpha(t)\rangle} + \frac{4\alpha(t)\langle\alpha'(t),\alpha(t)\rangle}{[1-\langle\alpha(t),\alpha(t)\rangle]^2}$$

en $t=0$ se tiene

$$d\pi_1^{-1}(V) = \left(\frac{2V_1}{1-\|z\|^2} + \frac{4u\langle V,z\rangle}{[1-\|z\|^2]^2}; \frac{2V_2}{1-\|z\|^2} + \frac{4v\langle V,z\rangle}{[1-\|z\|^2]^2}\right)$$

De igual manera

$$d\pi_2^{-1}(V) = \left[\frac{1+\|z\|^2}{1-\|z\|^2}\right]' = \frac{d}{dt}\left[\frac{1+\langle\alpha(t),\alpha(t)\rangle}{1-\langle\alpha(t),\alpha(t)\rangle}\right]$$

$$d\pi_2^{-1}(V) = \frac{4\langle\alpha'(t),\alpha(t)\rangle}{[1-\langle\alpha(t),\alpha(t)\rangle]^2} = \frac{4\langle V,z\rangle}{[1-\|z\|^2]^2}$$

de donde se concluye que

$$\pi_*^{-1}V = \left(\frac{2V_1}{1-\|z\|^2} + \frac{4u\langle V,z\rangle}{[1-\|z\|^2]^2}; \frac{2V_2}{1-\|z\|^2} + \frac{4v\langle V,z\rangle}{[1-\|z\|^2]^2}; \frac{4\langle V,z\rangle}{[1-\|z\|^2]^2}\right)$$

Ahora apliquemos la métrica *Lorentziana* es decir

$$\mathfrak{m}(\pi_*^{-1}V,\pi_*^{-1}V) = \left(\frac{2V_1}{1-\|z\|^2} + \frac{4u\langle V,z\rangle}{[1-\|z\|^2]^2}\right)^2 + \left(\frac{2V_2}{1-\|z\|^2} + \frac{4v\langle V,z\rangle}{[1-\|z\|^2]^2}\right)^2 - \left(\frac{4\langle V,z\rangle}{[1-\|z\|^2]^2}\right)^2$$

$$= \frac{4V_1^2}{[1-\|z\|^2]^2} + \frac{16uV_1\langle V,z\rangle}{[1-\|z\|^2]^3} + \frac{16u^2\langle V,z\rangle^2}{[1-\|z\|]^4}$$

$$+\frac{4V_2^2}{[1-\|z\|^2]^2} + \frac{16vV_2\langle V,z\rangle}{[1-\|z\|^2]^3} + \frac{16v^2\langle V,z\rangle^2}{[1-\|z\|]^4}$$

$$-\frac{16\langle V,z\rangle^2}{[1-\|z\|^2]^4}$$

Sumando se tiene

$$= \frac{4\|V\|^2}{[1-\|z\|^2]^2} + \frac{16\langle V,z\rangle\langle V,z\rangle}{[1-\|z\|^2]^3} + \frac{16\|z\|^2\langle V,z\rangle^2}{[1-\|z\|]^4} - \frac{16\langle V,z\rangle^2}{[1-\|z\|^2]^4}$$

Agrupando las 2 ultimas se tiene

$$= \frac{4\|V\|^2}{[1-\|z\|^2]^2} + \frac{16\langle V,z\rangle\langle V,z\rangle}{[1-\|z\|^2]^3} + \frac{16\langle V,z\rangle^2[\|z\|^2-1]}{[1-\|z\|^2]^4},$$

de donde se concluye que

$$\mathfrak{m}(\pi_*^{-1}V,\pi_*^{-1}V) = \frac{4\|V\|^2}{[1-\|z\|^2]^2}.$$

Por lo tanto

$$\mathfrak{m}(\pi_*^{-1}V,\pi_*^{-1}V) = h_{\mathcal{H}}^2(V,V).$$

Es decir, $\mathcal{H}$ es isométrico a $\mathbb{D}$.

3. Espacio Hiperbólico (Plano de Lobachevski)

Sea $H^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0\}$ el espacio Hiperbólico,

$$(H^2 \; ; \; h^3_{\mathcal{H}}),$$

con la métrica

$$h^3_{\mathcal{H}} = \frac{(dx_1)^2 + (dy_2)^2}{y^2}.$$

Vamos a probar que $\mathbb{D}$ es isométrica a H^2. Sea

$$\begin{array}{cccc} k: & \mathbb{D} & \longrightarrow & H^2 \\ & (u,v) & \longrightarrow & \left(\dfrac{2u}{u^2+(v-1)^2}; \dfrac{1-u^2-v^2}{u^2+(v-1)^2}\right) \end{array}$$

Evidentemente es un difeomorfismo pues su inversa es

$$\begin{array}{cccc} k^{-1}: & H^2 & \longrightarrow & \mathbb{D} \\ & (x,y) & \longrightarrow & \left(\dfrac{2x}{x^2+(y+1)^2}; \dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}\right) \end{array}$$

donde se verifica que:

$$k \circ k^{-1}(x,y) = (x,y)$$

y

$$k^{-1} \circ k(u,v) = (u,v).$$

Debemos probar que:

$$k^* h^3_{\mathcal{H}} = h^2_{\mathcal{H}},$$

para ello consideremos $V \in T_p H^2$, de donde se tiene

$$k^* h^3_{\mathcal{H}}(V,V) = h^3_{\mathcal{H}}(k_* V, k_* V) = \frac{\langle k_* V, k_* V \rangle}{y^2}.$$

Ahora debemos derivar la aplicación k que podemos expresarla como

$$k(z) = \frac{1-zi}{z-i}$$

con $z = u + iv$, y consideremos $V = \alpha'(0)$ tal que $\alpha(0) = z$, luego

$$dk_z(V) = \frac{d}{dt}(K \circ \alpha(t)) \mid_{t=0} .$$

Entonces

$$\begin{aligned} dk_z(V) &= \left[\frac{1-zi}{z-i}\right]' = \frac{d}{dt}\left[\frac{1-\alpha(t)i}{\alpha(t)-i}\right] \\ &= \frac{-2\alpha'(t)}{(\alpha(t)-i)^2} = \frac{-2V}{u^2+(v-1)^2} \end{aligned}$$

Ahora, apliquemos la métrica hiperbólica

$$\frac{\langle k_* V, k_* V \rangle}{y^2} = \frac{\frac{4\langle V,V \rangle}{(u^2+(v-1)^2)^2}}{\frac{(1-u^2-v^2)^2}{(u^2+(v-1)^2)^2}} = \frac{4\langle V, V \rangle}{(1-u^2-v^2)^2},$$

de donde se concluye que

$$\frac{\langle k_* V, k_* V \rangle}{y^2} = h^2_{\mathcal{H}}(V,V)$$

Por lo tanto, $\mathbb{D}$ es isométrico a H^2.

4. Curvatura del Hiperboloide

Calcular la curvatura del hiperboloide de dos hojas $\mathcal{H}$ es equivalente a calcular la curvatura de H^2 pues la curvatura es invariante por isometrías.

Como H^2 es una variedad Riemanniana calcular la curvatura Gaussiana de $\mathcal{H}$ es equivalente a calcular la curvatura de seccional de H^2, entonces para cualquier $p \in H^2$ y cualquier base (X, Y) de T_pH^2 la curvatura seccional es,

$$K = \frac{F(X,Y,X,Y)}{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y\rangle^2},$$

donde R es el tensor curvatura, es decir $R : \mathfrak{X}(M)^3 \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$, definida así

$$R(X,Y,Z) = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z$$

y

$$F(X,Y,X,Y) = \langle R(X,Y,X), Y\rangle$$

Ahora como H^2 es un abierto de $\mathbb{R}^2$ consideremos la parametrización dada por la identidad es decir $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ base de T_pH^2 con $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tal que:

$$g_{11} = \langle \varphi_u, \varphi_u\rangle = \frac{1}{v^2} = \langle \varphi_v, \varphi_v\rangle = g_{22};$$

$$g_{12} = \langle \varphi_u, \varphi_v\rangle = 0 = g_{21}.$$

Entonces la matriz inversa es

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} v^2 & 0 \\ 0 & v^2 \end{pmatrix},$$

donde se verifica

$$\nabla_{\varphi_u}\varphi_u = \Gamma^1_{11}\varphi_u + \Gamma^2_{11}\varphi_v$$
$$\nabla_{\varphi_u}\varphi_v = \Gamma^1_{12}\varphi_u + \Gamma^2_{12}\varphi_v$$
$$\nabla_{\varphi_v}\varphi_u = \Gamma^1_{21}\varphi_u + \Gamma^2_{21}\varphi_v$$
$$\nabla_{\varphi_v}\varphi_v = \Gamma^1_{22}\varphi_u + \Gamma^2_{22}\varphi_v$$

y usando

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{2} g^{km}\left\{\frac{\partial g_{jm}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m}\right\}$$

se tiene

$$R(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_u) = \nabla_{\varphi_v}\nabla_{\varphi_u}\varphi_u - \nabla_{\varphi_u}\nabla_{\varphi_v}\varphi_u + \nabla_{[\varphi_u,\varphi_v]}Z,$$

de donde

$$R(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_u) = \nabla_{\varphi_v}\nabla_{\varphi_u}\varphi_u - \nabla_{\varphi_u}\nabla_{\varphi_v}\varphi_u,$$

pues $[\varphi_u, \varphi_v] = 0$; además,

$$\nabla_{\varphi_u}\varphi_u = \frac{1}{v}\varphi_v,$$

$$\nabla_{\varphi_u}\varphi_v = \nabla_{\varphi_v}\varphi_u = -\frac{1}{v}\varphi_u,$$

$$\nabla_{\varphi_v}\varphi_v = -\frac{1}{v}\varphi_v,$$

Luego

$$R(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_u) = \nabla_{\varphi_v}\left(\frac{1}{v}\varphi_v\right) - \nabla_{\varphi_u}\left(-\frac{1}{v}\varphi_u\right)$$

$$= \frac{1}{v}\nabla_{\varphi_v}\varphi_v + \varphi_v\left(\frac{1}{v}\right)\varphi_v + \frac{1}{v}\nabla_{\varphi_u}\varphi_u + \varphi_u\left(\frac{1}{v}\right)\varphi_u,$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{v}\nabla_{\varphi_v}\varphi_v - \frac{1}{v^2}\varphi_v + \frac{1}{v^2}\varphi_v,\\
&= \frac{1}{v}\nabla_{\varphi_v}\varphi_v = \frac{1}{v}\left(-\frac{1}{v}\varphi_v\right),\\
&= -\frac{1}{v^2}\varphi_v
\end{aligned}
$$

Finalmente

$$
K = \frac{F(\varphi_u,\varphi_v,\varphi_u,\varphi_v)}{\|\varphi_u\|^2\|\varphi_v\|^2 - \langle\varphi_u,\varphi_v\rangle^2} = \frac{-\frac{1}{v^2}\langle\varphi_v,\varphi_v\rangle}{\frac{1}{v^2}\frac{1}{v^2}} = \frac{-\frac{1}{v^2}\frac{1}{v^2}}{\frac{1}{v^2}\frac{1}{v^2}} = -1
$$

Por lo tanto, la curvatura del Hiperboloide es constante y negativa.

5. Conclusiones

En este trabajo se muestra que la idea de elaborar geometría no se queda solo en el plano, si no que existen objetos sobre los cuales podemos elaborar una geometría en la cual los Postulados de la geometría plana no se satisfacen del todo, es decir hay espacios sobre los cuales el quinto Postulado de Euclides no es cierto, como las variedades trabajadas aquí, otro ejemplo que el lector podría comprobar bajo los mismos argumentos de este trabajo seria la esfera, sobre la cual se elabora la llamada "Geometría Esférica."

En conclusión creemos haber dado las herramientas para que el lector conciba el hecho de que hay mas espacios sobre los cuales se puede hacer geometría.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Do Carmo Manfredo P. 1988. *Geometría Riemanniana* - Rio de Janeiro: Instuto de Matematica Pura y Aplicada IMPA CNPQ- Proyecto Euclides.

[2] John M. Lee. 1997. *Riemannian Manifolds An Introduction to Curvature* Springer-Verlang, New York.

[3] Athanase Papadopoulos (IRMA) *On Lobachevsky's trigonometric formulae.* arXiv:1311.6034.

[4] Shoshichi-Kobayashi-Katsumi Nomizu. 1963. *Foundations of Diferential Geometry* Volumen 1. Interscience Publishers, New York- London.

[5] William S. Massey 1991. *A Basic Course in Algbraic Topology-* Departament of mathematics Yale University New Haven, Springer-Verlag.