PESQUIMAT , Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XVII N°2, pp. 7 -13, Lima - Perú, Octubre 2014

SOBRE UNA ECUACION ELIPTICA DEL TIPO $p(x)$-KIRCHHOFF CON TERMINO FUENTE NO LOCAL

Eugenio Cabanillas Lapa [1]***, Willy Barahona Martínez***[2]***,***
Rocío De La Cruz Marcacuzco [3]***, Gabriel Rodríguez Varillas***[4]***,***
Luis Macha Collotupa[5]

(Recibido: 11/08/2014 - Aceptado: 10/09/2014)

Resumen: En este trabajo demostramos la existencia de soluciones débiles de un problema del tipo $p(x)$-Kirchhoff con término no local. Usando el método de Galerkin, el teorema del punto fijo en dimensión finita y la teoría de los Espacios de Sobolev con exponente variable, se establece el resultado.
Palabras clave: Espacio de Sobolev con exponente variable, Punto fijo, Método de Galerkin, Término no local.

ON A TYPE ELLIPTIC EQUATION $p(x)$ - KIRCHHOFF WITH NO LOCAL SOURCE TERM

Abstract: In this work we prove a result on the existence of weak solutions for a $p(x)$-Kirchhoff type problem involving nonlocal source. By means of the Galerkin method, a fixed point theorem in finite dimensions and the theory of the variable exponent Sobolev spaces, we establish our result.
Keywords: The variable exponent Sobolev spaces, Fixed point, Galerkin method, Nonlocal source.

1. Introducción

En este artículo estudiaremos el problema del tipo $p(x)$-Kirchhoff

$$\begin{aligned} &-M\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) + \lambda \int_\Omega u(x)^{r(x)}dx = f(x,u) \quad en \quad \Omega \\ &u = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad sobre \quad \partial\Omega \end{aligned} \tag{1}$$

donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera regular $\partial\Omega$, $p(x), r(x) \in C_+(\overline{\Omega})$ con

$$1 < p^- = \min_{x\in\overline{\Omega}} p(x) \le p^+ = \max_{x\in\overline{\Omega}} p(x) < \infty$$

$$1 < r^- = \min_{x\in\overline{\Omega}} r(x) \le r^+ = \max_{x\in\overline{\Omega}} r(x) < \infty,$$

M es una función continua, f es una función de Caratheodory y $\lambda < 0$.

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: cleugenio@yahoo.com
[2]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail:wilbara_73@yahoo.es
[3]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: rodema_71@yahoo.es
[4]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: grodriguezv@unmsm.edu.pe
[5]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail:lmachac@hotmail.com

Los problemas del tipo $p(x)$-Kirchhoff con condición de Dirichlet en la frontera, han sido estudiados por diversos autores: Dai y Hao [2], Fan [3], entre otros.

Para los problemas del tipo $p(x)$-Laplace con condiciones no lineales en la frontera, puede verse Guo y Zhao [4] y sus referencias.

Recientemente Avci [1] ha obtenido existencia de la solución para una ecuación del tipo $p(x)$-Kirchhoff (1) con $\lambda = 0$, utilizando el método de Galerkin.

Motivado por los trabajos mencionados, investigamos un problema del tipo $p(x)$-Kirchhoff, pero con término fuente no local con exponente variable. Este es un tópico completamente nuevo cuando $r(x) = r$ es una constante, además presenta importantes dificultades matemáticas por resolver.

2. Preliminares

En primer lugar, veamos algunas definiciones sobre los Espacios Generalizados de Lebesgue $L^{p(x)}(\Omega)$ y los Espacios de Sobolev $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.
Consideramos el conjunto

$$C_+(\overline{\Omega}) = \{p(x) \in C(\overline{\Omega}) : p(x) > 1, \forall x \in \overline{\Omega}\}$$

para algún $p(x) \in C_+(\overline{\Omega})$.
Definimos el Espacio de Lebesgue con exponente variable

$$L^{p(x)}(\Omega) = \{u \in M(\Omega) : \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx < \infty\}$$

con la norma

$$|u|_{p(x)} = inf\{\mu > 0 : \int_\Omega |\frac{u(x)}{\mu}|^{p(x)} dx \leq 1\}$$

donde $M(\Omega)$ es el conjunto de todas las funciones reales medibles definidas sobre Ω.
También consideramos el espacio

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \{u \in L^{p(x)}(\Omega) : |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega).\}$$

A la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^{1,p(x)}(\Omega)$ la denotamos con $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, con norma dada por

$$\|u\| = |u|_{p(x)} + |\nabla u|_{p(x)}$$

Se sabe que $|\nabla u|_{p(x)}$ y $\|u\|$ son normas equivalentes en $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Por lo que usaremos la norma $\|u\| = |\nabla u|_{p(x)}$ para todo $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Proposición 2.1 *El Espacio conjugado de $L^{p(x)}(\Omega)$ es $L^{p'(x)}(\Omega)$ donde $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$. Para cada $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ y $v \in L^{p'(x)}(\Omega)$ tenemos la siguiente desigualdad del tipo Hölder.*

$$|\int_\Omega uv dx| \leq (\frac{1}{p^-} + \frac{1}{(p^-)'})|u|_{p(x)}|v|_{p'(x)}$$

Proposición 2.2 *Los Espacios $L^{p(x)}(\Omega)$, $W^{1,p(x)}(\Omega)$ y $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ son Espacios de Banach Separables y Reflexivos.*

Proposición 2.3 *Denotamos* $\rho(u) = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}dx$. $\forall u, u_\nu \in L^{p(x)}(\Omega)$, *entonces tenemos*

(1) $u \neq 0$, $|u|_{p(x)} = \lambda \Longleftrightarrow \rho(\frac{u}{\lambda}) = 1$;

(2) $|u|_{p(x)} < 1 \ (= 1; > 1) \Longleftrightarrow \rho(u) < 1 \ (= 1; > 1)$;

(3) Si $|u|_{p(x)} > 1$, $\Longrightarrow |u|^{p^-}_{p(x)} \leq \rho(u) \leq |u|^{p^+}_{p(x)}$;

(4) Si $|u|_{p(x)} < 1$, $\Longrightarrow |u|^{p^+}_{p(x)} \leq \rho(u) \leq |u|^{p^-}_{p(x)}$;

(5) $\lim_{\nu\to+\infty} |u_\nu|_{p(x)} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{\nu\to+\infty} \rho(u_\nu) = 0$;

(6) $\lim_{\nu\to+\infty} |u_\nu|_{p(x)} = +\infty \Longleftrightarrow \lim_{\nu\to+\infty} \rho(u_\nu) = +\infty$.

Proposición 2.4 *En* $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ *(Desigualdad de Poincaré)Existe una constante* C_0 *positiva tal que*

$$|u|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq C_0 |\nabla u|_{L^{p(x)}(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

Proposición 2.5 *Si* $\mu \in C_+(\overline{\Omega})$ *y* $\mu(x) \leq p^*(x)$ *(*$\mu(x) < p^*(x)$*) para* $x \in \overline{\Omega}$, *entonces* $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{\mu(x)}(\Omega)$, *donde*

$$p^*(x) = \begin{cases} \frac{Np(x)}{N-p(x)}, & p(x) < N; \\ +\infty, & p(x) \geq N. \end{cases}$$

Definición 2.6 *Diremos que* $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ *es una solución débil del problema (1) si*

$$M\Big(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\Big)\Big(\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p(x)-2}\nabla u(x)\nabla v(x)dx\Big) + \lambda\Big(\int_\Omega u(x)^{r(x)}dx\Big)\Big(\int_\Omega v(x)dx\Big) = \int_\Omega f(x,u)vdx$$

$$\text{para toda } v \in X = W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

3. Teorema Central

El resultado principal de este trabajo está dado por el siguiente teorema:

Teorema 3.1 *Supongamos que* $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función de Caratheodory satisfaciendo la condición de crecimiento*

$$f(x,t)t \leq a(1 + |t|^{\alpha(x)}), \quad \forall (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$$

donde $\alpha \in C_+(\overline{\Omega})$.

Además, si $a < \frac{m_0 - 2|\lambda|c_r^{r^+}}{c_\alpha^{\alpha^+}}$, $1 \leq r^+ + 1 < p^-$ *y* $1 \leq \alpha^+ < p^-$, *entonces el problema (1) tiene una solución débil. También, cualquier solución u de (1) satisface que*

$$\|u\| < max\{1, [\frac{a|\Omega|}{m_0 - (2|\lambda|c_r^{r^+} + ac_\alpha^{\alpha^+})}]^{\frac{1}{p^-}}\} \qquad [*]$$

donde c_μ *es una constante de inmersión de* $W_0^{1,p(x)} \hookrightarrow L^{\mu(x)}(\Omega)$, $\mu = r$ *o* α.

Demostración. La solución será obtenida vía el Método de Galerkin.
Dado que el espacio X es separable, existe un sistema fundamental $\{w_\nu\}_{\nu\geq 1} \subseteq X$ y $\{w_\nu^*\}_{\nu\geq 1} \subseteq X^*$ tal que $X = \overline{span\{w_\nu\}}_{\nu\geq 1}$; $X^* = \overline{span\{w_\nu^*\}}_{\nu\geq 1}$ y

$$\langle w_\nu^*, w_\eta\rangle = \begin{cases} 1, & \nu = \eta; \\ 0, & \nu \neq \eta. \end{cases}$$

Sea V_m el espacio vectorial finito dimensional

$$V_m = [\{w_1, w_2, ..., w_m\}]$$

equipado con la norma inducida por la norma usual de X.

Por lo tanto, si $u \in V_m$, existe un único $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m) \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$u = \sum_{j=1}^{m} \xi_j w_j$$

y como consecuencia se tiene que

$$\|u\|_{V_m} = (\sum_{j=1}^{m} |\xi_j|^2)^{\frac{1}{2}} = |\xi|_{\mathbb{R}^m}$$

Así los espacios V_m y $\mathbb{R}^m$ son isomorfos e isométricos mediante la aplicación lineal natural

$$\begin{array}{rcl} T \;:\; V_m & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ u = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \xi_j w_j & \longmapsto & T(u) = \xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m) \end{array}$$

A partir de ahora, identificaremos $u \longleftrightarrow \xi$ vía esta isometría.

Buscamos soluciones $u_m \in V_m$ del sistema aproximado

$$M(\int_\Omega \frac{|\nabla u_m|^{p(x)}}{p(x)} dx)(\int_\Omega |\nabla u_m|^{p(x)-2} \nabla u_m \nabla w_i dx) + \lambda(\int_\Omega u_m(x)^{r(x)} dx)(\int_\Omega w_i dx) = \int_\Omega f(x, u_m) w_i dx \tag{2}$$

Para resolver este sistema algebraico, definimos la función

$$F : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

dado por

$$F(\xi) = (F_1(\xi), F_2(\xi), ..., F_m(\xi))$$

$$F_i(\xi) = M(\int_\Omega \frac{|\nabla u_m|^{p(x)}}{p(x)} dx)(\int_\Omega |\nabla u_m|^{p(x)-2} \nabla u_m \nabla w_i dx) + \lambda(\int_\Omega u_m(y)^{r(y)} dy)(\int_\Omega w_i dx) - \int_\Omega f(x, u_m) w_i dx$$

De la continuidad de M y $f(x, u)$ con respecto a u, observamos que F es continua. Por lo tanto, podemos utilizar el teorema del punto fijo de Brouwer: Si existe $R > 0$ talque $\langle F(\xi), \xi\rangle_{\mathbb{R}^m} \geq 0$

para $|\xi|_{\mathbb{R}^m} = R$, entonces existe $\xi_0 \in \overline{B(\theta, R)}$ tal que $F(\xi_0) = \theta$.

Por lo tanto, por las hipótesis sobre M, f y la desigualdad de Poincaré, para $u \in V_m$ con $\|u\| > 1$ obtenemos

$$\begin{aligned}\langle F(\xi), \xi\rangle &\geq m_0(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx) + \lambda(\int_\Omega u(x)^{r(x)}dx)(\int_\Omega u(x)dx) - \int_\Omega f(x,u)udx \\ &\geq \tfrac{m_0}{p^+}\|u\|^{p^-} + \lambda C_r^{r^+} C_2 |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|u\|^{r^+ + 1} - aC_\alpha^{\alpha^+}\|u\|^{\alpha^+} - a|\Omega|\end{aligned}$$

Luego existe una constante positiva $R > 0$ tal que

$$\langle F(\xi), \xi\rangle \geq 0; \quad si \quad \|u\| = R.$$

Entonces, por el teorema del punto fijo de Brouwer, el sistema (2) tiene una solución $u_m \in V_m$, con $\|u_m\| \leq R$, R no depende de m. De la acotación de $(\|u_m\|)$ tenemos

$$\begin{gathered}\|u_m\| \longrightarrow \gamma; \\ M(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_m|^{p(x)}dx) \longrightarrow \eta, \\ u_m \rightharpoonup u, \quad en \quad W_0^{1,p(x)}(\Omega) \\ u_m \longrightarrow u, \quad en \quad L^{r(x)}(\Omega) \\ u_m(x) \longrightarrow u(x), \quad ctp \quad en \quad \Omega.\end{gathered}$$

Entonces, gracias a la continuidad de M obtenemos

$$\begin{gathered}M(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_m|^{p(x)}dx) \longrightarrow M(\eta), \\ (u_m(x))^{r(x)} \longrightarrow (u(x))^{r(x)}, \quad ctp \quad en \quad \Omega\end{gathered}$$

y de la continuidad de la aplicación de Nemytskii

$$f(.,u_m) \longrightarrow f(.,u) \in L^{\alpha'(x)}(\Omega)$$

Además

$$|u_m(x)^{r(x)}| \leq h(x), \quad h \in L^1(\Omega)$$

Entonces, del teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue se sigue que

$$\int_\Omega (u_m(x))^{r(x)}dx \longrightarrow \int_\Omega (u(x))^{r(x)}dx.$$

Desde que $L : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \longrightarrow (W_0^{1,p(x)}(\Omega))'$

$$\langle L(u), v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v dx$$

es estrictamente monótona, no es difícil probar que $\forall v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$

$$M(\int_\Omega \frac{|\nabla u_m|^{p(x)}}{p(x)}dx)\int_\Omega |\nabla u_m|^{p(x)-2}\nabla u_m \nabla w_i dx \longrightarrow M(\eta)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v dx$$

Fijando $i < m$ y haciendo que $m \to +\infty$ en (2) obtenemos

$$M(\eta)(\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla w_i dx) + \lambda(\int_\Omega u(x)^{r(x)}dx)(\int_\Omega w_i dx) = \int_\Omega f(x,u)w_i dx \tag{3}$$

Como $\{w_\nu\}_{\nu\geq 1}$ es una "base", la identidad (3) se cumple para toda $v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.
En particular cuando $v = u$ obtenemos

$$M(\eta)(\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx) + \lambda(\int_\Omega u(x)^{r(x)}dx)(\int_\Omega udx) = \int_\Omega f(x,u)udx. \tag{4}$$

Ahora, tomamos $v = u_m$ en (2) para obtener

$$M((\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_m|^{p(x)}dx))(\int_\Omega |\nabla u_m|^{p(x)}dx) + \lambda(\int_\Omega u_m^{r(x)}dx)(\int_\Omega u_m dx) = \int_\Omega f(x,u_m)u_m dx$$

Tomando límites en ambos miembros de esta igualdad obtenemos

$$M(\eta)\eta_0 + \lambda(\int_\Omega u(x)^{r(x)}dx)(\int_\Omega udx) = \int_\Omega f(x,u)udx. \tag{5}$$

Entonces, por (4) y (5) se deduce que

$$\eta_0 = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx. \tag{6}$$

Así, a partir de la continuidad de M y de la unicidad del limite deducimos que

$$M(\eta_0) = M(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx). \tag{7}$$

Consecuentemente, de las consideraciones anteriores y (3) tenemos que $\forall v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$

$$M(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx)(\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla vdx) + \lambda(\int_\Omega u(x)^{r(x)}dx)(\int_\Omega vdx) = \int_\Omega f(x,u)vdx$$

Ahora queda por demostrar la acotación de$\|u\|$. De hecho, si u es cualquier solución débil del problema (1) entonces

$$M(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx + \lambda(\int_\Omega u(x)^{r(x)}dx)(\int_\Omega udx) = \int_\Omega f(x,u)udx$$

Por lo tanto:

$$\|u\| \leq 1$$

o

$$\|u\| < [\frac{a|\Omega|}{m_0 - (2|\lambda|c_r^{r^+} + ac_\alpha^{\alpha^+})}]^{\frac{1}{p^-}}$$

■

4. Conclusión

El problema (1) admite solución débil, encontrada mediante el Método de Galerkin. Esta solución tiene una cota dada por la relación [*]. El método usado permite abordar problemas similares en espacios de Sobolev con exponente variable.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Avci M. Existence results for a nonlocal problem involving the $p(x)$-Laplacian,*Pure. Appl. Math. J.* Vol 2 No 1,(2013) 20-27.

[2] Dai G.U and Hao R.F.; Existence of solutions for a $p(x)$-Kirchhoff type equation. *J. Math. Anal Appl.* 359(2009)275-284.

[3] Fan X. L., On nonlocal $p(x)$-Laplacian Dirichlet problems. *Nonlinear Anal.* 72(2010)3314-3323.

[4] Guo and Zhao, Existence and multiplicity of solutions for nonlocal $p(x)$-Laplacian equations with nonlinear Neumann boundary conditions. *Boundary Value Prob.* 2012, 2012:1 doi: 10.1186/1687-2770-2012-1.